Elementos de Estatística

Lupércio F. Bessegato & Marcel T. Vieira

UFJF – Departamento de Estatística
2013

Probabilidade

- Você acredita em destino?

Fenômenos Aleatórios

- Os resultados individuais são incertos
  - √ Há uma distribuição regular dos resultados em um número muito grande de repetições
  - √ Ex.: lançamento de uma moeda

- Estudo de situações em que os resultados são variáveis
  - √ Mesmo mantidas as condições

Não é possível afirmar o resultado com antecipação → Descrição do conjunto de todos os resultados possíveis → Repetição mostra regularidade nos resultados

---

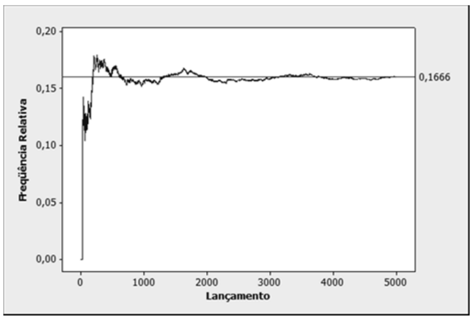
- Observações:
  - √ Aleatório não é sinônimo de “casual” ou “fortuito”
  - √ É a descrição de um tipo de ordem que surge somente a longo prazo
  - √ É presença constante em nosso cotidiano
  - √ Raramente podemos presenciar repetições suficientes do mesmo fenômeno aleatório para observar aleatoriedade a longo prazo.

- Exemplos:
  - √ Resultado do lançamento de uma moeda
  - √ Composição genética de indivíduos
  - √ Tráfego urbano
  - √ Tráfego de telefonia celular
  - √ Propagação de epidemia (ou boato)

Probabilidade

- <u>Probabilidade</u> de qualquer resultado de um fenômeno aleatório
  - √ Proporção de vezes que o resultado ocorreria em um sequência muito longa de repetições

- Freqüência relativa da ocorrência da face 1 em 5.000 lançamentos de um dado



Modelos de Probabilidade

- Modelo matemático para a aleatoriedade
- Ex: Lançamento de uma moeda:
  - √ Lista de resultados possíveis
  - √ Uma probabilidade para cada resultado

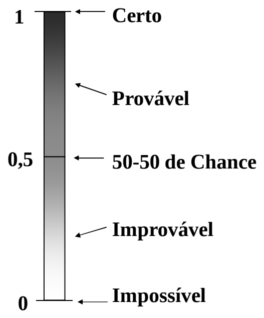
- Espaço amostral (Ω):
  - √ Conjunto de todos os resultados possíveis de um fenômeno aleatório.
- Evento:
  - √ Resultado ou um conjunto de resultados de um fenômeno aleatório
  - √ Um evento ocorre e qualquer dos resultados que formam esse evento ocorrer

- Exemplos:
  - √ Lançamento de duas moedas
    (ou nascimento de dois filhos)
  - √ Lançamento de dois dados

Probabilidade – Propriedades

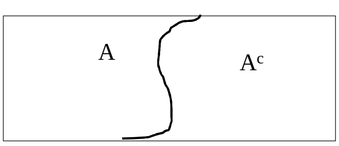
- Propriedades da atribuição de probabilidades:
  1. Qualquer probabilidade é um número entre 0 e 1
  2. Todos os resultados possíveis devem ter probabilidade 1
  3. Se dois eventos não têm resultados em comum, a probabilidade de ocorrência de um, ou de outro, é a soma de suas probabilidades individuais

Valores Possíveis para Probabilidades



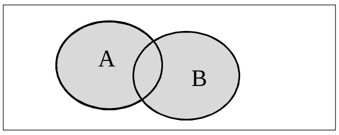
Evento Complementar

- Evento complementar de A (A^c):
  - √ A^c ocorre se A não ocorrer

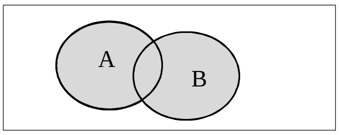


Combinação de Eventos

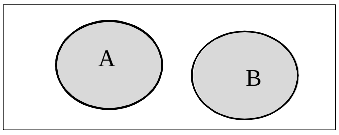
- A ou B:
  - √ Contém todos os resultados de A ou B (ou ambos)
  - √ Pelo menos um dos eventos ocorre



- A e B:
  - √ Contém todos os resultados que estão em ambos
  - √ Ocorrem simultaneamente



- Eventos mutuamente exclusivos:
  - √ Não tem nenhum resultado em comum
  - √ Não ocorrem simultaneamente



Distribuições de Probabilidade

- Selecionar ao acaso família com dois filhos
  - √ Mesmo modelo de lançamento de 2 moedas honestas

    Pr(FF) = Pr(MM) = Pr(MF) = P(FM) = ¼
  - √ Evento A: ao menos uma mulher

    Pr(A) = Pr(FF) + Pr(MF) + Pr(FM) = ¼+¼+¼ = ½

Distribuições de Probabilidade

- Selecionar ao acaso família com três filhos
  - √ Mesmo modelo de lançamento de 3 moedas

    Ω = {FFF, FFM, FMF, MFF, FMM, MFM, MMF, MMM}

  Quantidade de resultados possíveis $2^3 = 8$

  Probabilidade de cada sequência = 1/8
  - √ Evento B: nenhuma mulher

    Pr(B) = Pr(MMM) = 1/8

- Casal vai parar de ter filhos quando tiver um filho de cada sexo ou quando tiver 3 filhos
  - √ Mesmo modelo de lançamento de 3 moedas

    Ω = {FFF, FFM, FM, MF, MMF, MMM}

  Pr(FFF) = Pr(FFM) = Pr(MMF) = Pr(MMM) = 1/8 Pr(FM) = Pr(MF) = 1/4
  - √ Evento C = { 1º filho é do sexo masculino}

    C = {FFF, FFM, FM}

    Pr(C) = 1/8 + 1/8 + 1/4 = 1/2

Resultados Igualmente Prováveis

- Se W consiste em n resultados igualmente possíveis
  - √ Probabilidade de um evento A:

$$\Pr(A) = \frac{\#\text{Resultados em } A}{\#\text{Resultados em } \Omega}$$

Tabela de Dupla Entrada

- Perdas de emprego durante três anos.
  - √ Perdas classificadas de acordo com o sexo e com a razão da demissão

	Razão para a perda de emprego			
	Local fechou	Trabalho negligente	Cargo extinto	Total
Homem	1.703	1.196	548	3.447
Mulher	1.210	564	363	2.137
Total	2.913	1.760	911	5.584

  - √ Células representam empregos perdidos (em milhares e por uma razão em particular

- Determine:
  - √ Pr(perdido por mulher e local de trabalho fechado) = 0,217
  - √ Pr(perdido por mulher) = 0,383
  - √ Pr(perdido por homem e por negligência) = 0,214
  - √ Pr(fechamento local de trabalho e extinção de cargo)

- Proporções das perdas de emprego
  - √ Perdas classificadas de acordo com o sexo e com a razão da demissão

	Razão para a perda de emprego			
	Local fechou	Trabalho negligente	Cargo extinto	Total
Homem	0,305	0,214	0,098	0,617
Mulher	0,217	0,101	0,065	0,383
Total	0,522	0,315	0,163	1,000

Tabela Algébrica de 2 Fatores

- Para dois eventos A e B

	B	**B^c**	**Total**
A	Pr(A e B)	Pr(A e B^c)	Pr(A)
A^c	Pr(A^c e B)	Pr(A^c e B^c)	Pr(A^c)
Total	Pr(B)	Pr(B^c)	1,00

Exemplo

- Imagine que no período da tarde o Lupércio esteja disponível 70% do tempo; o Marcel esteja disponível durante 60 % do tempo e que ambos estejam à disposição durante 50% do tempo

	M	**M^c**	**Total**
L	0,5	0,2	0,7
L^c	0,1	0,2	0,3
Total	0,6	0,4	1,00

√ P(L ou M) = 0,5 + 0,2 + 0,1 = 0,8

√ Pr(Lupercio presente e Marcel ausente) = 0,2

Pr(L e M^c)

√ Pr(ao menos um ausente) = 0,2 + 0,1 + 0,2 = 0,5

Pr(L^c ou M^c)

√ Pr(um presente e o outro ausente) = 0,2 + 0,1 = 0,3

Pr{(L e M^c) ou (L^c e M)}

√ Pr(ambos presentes ou ambos ausentes) = 0,5+0,2 = 0,7

Pr{(L e M) ou (L^c e M^c)}

Probabilidade Condicional

- A avaliação da probabilidade de um evento A ocorrer pode mudar radicalmente se tivermos informação sobre a ocorrência (ou não) do evento B.

Probabilidade Condicional

- Probabilidade de A ocorrer dado que B ocorre

√ Espaços amostrais equiprováveis

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\#\text{Resultados em } A \text{ e } B}{\#\text{Resultados em } B}$$

√ Espaços amostrais quaisquer

$$\boxed{\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \text{ e } B)}{\Pr(B)}}$$

Exemplo

- Dados de pesquisa de opinião com 900 pessoas, com 15 anos ou mais
  - √ Pergunta: “Você aprova o aborto quando o filho não é desejado?”

Proporções de Mulheres e Homens e Suas Opiniões sobre Aborto				
	Sim	Não	Não sabe	Total
Mulheres	0,2489	0,2178	0,0733	0,5400
Homens	0,1967	0,2267	0,0366	0,4600
Total	0,4456	0,4445	0,1099	1,0000

- Probabilidade condicional de que uma pessoa seja a favor do aborto:

$$\begin{aligned}\Pr(\text{sim} \mid \text{mulher}) &= \frac{\Pr(\text{sim e mulher})}{\Pr(\text{mulher})} \\ &= \frac{0{,}2489}{0{,}5400} = 0{,}4609\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(\text{sim} \mid \text{homem}) &= \frac{\Pr(\text{sim e homem})}{\Pr(\text{homem})} \\ &= \frac{0{,}1967}{0{,}4600} = 0{,}4276\end{aligned}$$

- Probabilidade condicional da opinião de uma pessoa

$$\begin{aligned}\Pr(\text{mulher} \mid \text{sim}) &= \frac{\Pr(\text{sim e mulher})}{\Pr(\text{sim})} \\ &= \frac{0{,}2489}{0{,}4456} = 0{,}5586\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(\text{homem} \mid \text{sim}) &= \frac{\Pr(\text{sim e homem})}{\Pr(\text{sim})} \\ &= \frac{0{,}1967}{0{,}4456} = 0{,}4414\end{aligned}$$

Regra da Multiplicação

- É uma consequência direta da definição de probabilidade condicional:

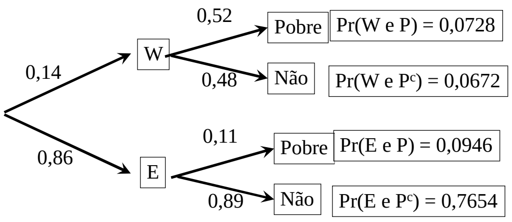
$$\Pr(A \text{ e } B) = \Pr(A \mid B)\,\Pr(B)$$

Diagrama em Árvore

- Em 1992, 14% da população de um país eram da região W, e desses, 52% foram considerados como vivendo abaixo do nível de pobreza. Por sua vez, 11% da população da região E vivem abaixo da linha da pobreza. Que proporção da população desse país consistia em pessoas vivendo abaixo do nível de pobreza?

Diagrama em Árvore

√ P:{ser pobre}



$$\Pr(W \text{ e } P) = \Pr(P \mid W)\,\Pr(W) = (0{,}52)(0{,}14) = 0{,}0728$$

- Proporções por região e pobreza:

	W	E	Total
Pobre	(0,52)(0,14)= 0,0728	(0,11)(0,86)= 0,0946	0,1674
Não pobre	0,0672	0,7654	0,8346
Total	0,1400	0,8600	1,0000

$$\Pr(W \mid P) = \frac{(0{,}14)(0{,}52)}{0{,}1674} = 0{,}4349 \quad \Pr(E \mid P) = \frac{(0{,}86)(0{,}11)}{0{,}1674} = 0{,}5651$$

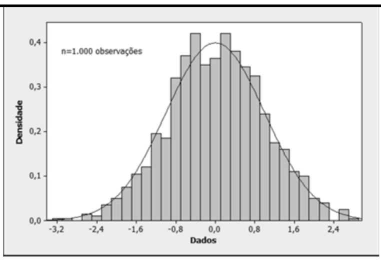
Variabilidade

No mundo real, a variabilidade está em toda parte e em todas as coisas

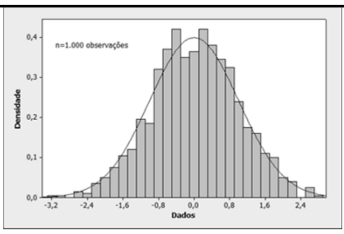
Distribuição Normal

Exploração de Dados Univariados

- Faça sempre um gráfico de seus dados
  - √ Em geral, ramo-e-folhas ou um histograma
- Procure um padrão global e desvios acentuados
  - √ *Outliers*
- Calcule um resumo numérico para descrever o centro e a dispersão
- Às vezes, o padrão global de um grande número de observações é tão regular que pode ser descrito por uma **curva suave**



- Curva descreve toda a distribuição em uma única expressão
  - √ Mais fácil para trabalhar
- A curva é um modelo matemático
  - √ descrição matemática idealizada



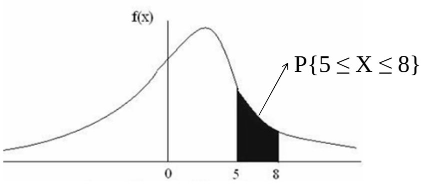
- Áreas das barras em um histograma representam contagens (ou proporções)
- Área sob a curva é exatamente 1
- Área sob a curva representa proporção de observações

área = frequência relativa

Curva de Densidade

- A curva é denominada curva de densidade
- Propriedades:
  - √ Está sempre sobre ou acima do eixo horizontal
  - √ Tem área exatamente igual a 1 entre ela e o eixo horizontal

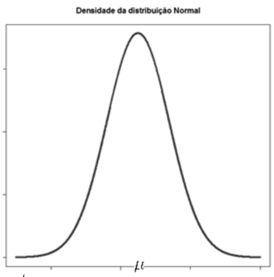
- A proporção entre 2 pontos é igual à área sob a curva, entre os dois pontos e o eixo x



Curvas Normais

- É uma classe importante de curvas de densidade
- Características:
  - √ São simétricas, unimodais e tem forma de sino
  - √ Descrevem distribuições normais (gaussianas)

Função de Densidade



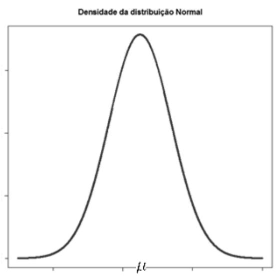
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

√ O gráfico tem o formato de sino

√ Parâmetros da distribuição normal:

- Média (μ)
- Desvio-padrão (σ) ou variância (σ^2)

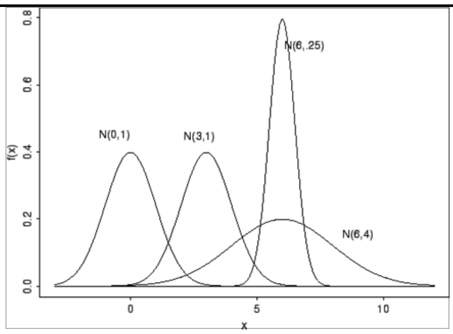
Características



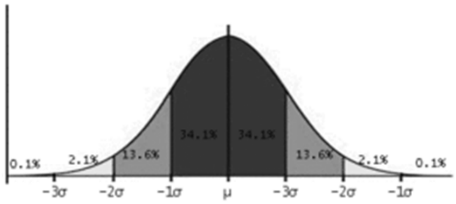
√ Simétrica em torno da média (μ)

- área antes de μ = área depois de μ = 0,5
- média = mediana = moda

√ Varia de – ∞ a + ∞

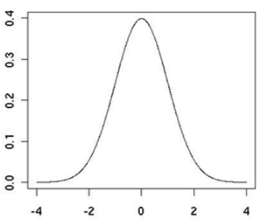


- Parâmetro de locação: μ
- Parâmetro de escala: σ (σ^2)



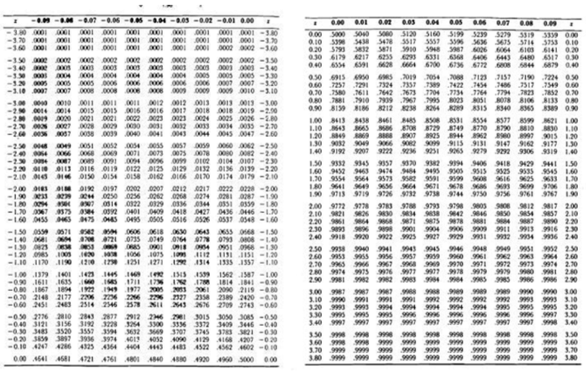
- Áreas de intervalos
  - √ $\mu \pm \sigma \approx 68\%$
  - √ $\mu \pm 2\sigma \approx 95\%$
  - √ $\mu \pm 3\sigma \approx 99{,}7\%$

Distribuição Normal Padrão



- $Z \sim N(0, 1)$
  - √ Média (μ) = 0
  - √ Desvio-padrão (σ) = 1
- Valores de área tabelados

Tabela A3



z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0.00	z
−3.80	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.80
−3.70	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.70
−3.60	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	−3.60
−3.50	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	−3.50
−3.40	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	−3.40
−3.30	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005	−3.30
−3.20	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	−3.20
−3.10	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010	−3.10
−3.00	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013	−3.00
−2.90	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	−2.90
−2.80	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026	−2.80
−2.70	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035	−2.70
−2.60	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047	−2.60
−2.50	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062	−2.50
−2.40	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082	−2.40
−2.30	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107	−2.30
−2.20	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139	−2.20
−2.10	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179	−2.10
−2.00	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228	−2.00
−1.90	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287	−1.90
−1.80	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359	−1.80
−1.70	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446	−1.70
−1.60	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548	−1.60
−1.50	.0559	.0571	.0582	.0594	.0606	.0618	.0630	.0643	.0655	.0668	−1.50
−1.40	.0681	.0694	.0708	.0721	.0735	.0749	.0764	.0778	.0793	.0808	−1.40
−1.30	.0823	.0838	.0853	.0869	.0885	.0901	.0918	.0934	.0951	.0968	−1.30
−1.20	.0985	.1003	.1020	.1038	.1056	.1075	.1093	.1112	.1131	.1151	−1.20
−1.10	.1170	.1190	.1210	.1230	.1251	.1271	.1292	.1314	.1335	.1357	−1.10
−1.00	.1379	.1401	.1423	.1445	.1469	.1492	.1515	.1539	.1562	.1587	−1.00
−0.90	.1611	.1635	.1660	.1685	.1711	.1736	.1762	.1788	.1814	.1841	−0.90
−0.80	.1867	.1894	.1922	.1949	.1977	.2005	.2033	.2061	.2090	.2119	−0.80
−0.70	.2148	.2177	.2206	.2236	.2266	.2296	.2327	.2358	.2389	.2420	−0.70
−0.60	.2451	.2483	.2514	.2546	.2578	.2611	.2643	.2676	.2709	.2743	−0.60
−0.50	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981	.3015	.3050	.3085	−0.50
−0.40	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336	.3372	.3409	.3446	−0.40
−0.30	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707	.3745	.3783	.3821	−0.30
−0.20	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090	.4129	.4168	.4207	−0.20
−0.10	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483	.4522	.4562	.4602	−0.10
0.00	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880	.4920	.4960	.5000	0.00

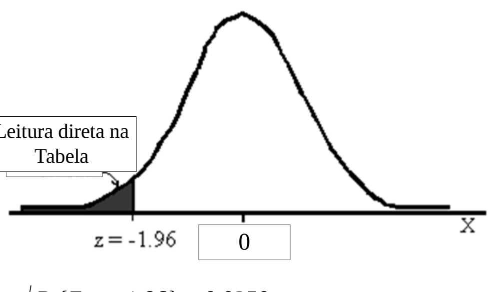
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	0.00
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.10
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.20
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.30
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.40
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.50
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.60
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.70
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.80
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.90
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.00
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.10
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	1.20
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	1.30
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	1.40
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	1.50
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	1.60
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	1.70
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	1.80
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	1.90
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	2.00
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	2.10
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	2.20
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	2.30
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	2.40
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952	2.50
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964	2.60
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974	2.70
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981	2.80
2.90	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	2.90
3.00	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990	3.00
3.10	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993	3.10
3.20	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995	3.20
3.30	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	3.30
3.40	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	3.40
3.50	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	3.50
3.60	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.60
3.70	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.70
3.80	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	3.80

Distribuição Normal – Cálculo de Probabilidades

- Seja a variável aleatória Z ~ N(0, 1)
  - √ Calcule P{Z < – 1,96}
  - √ Roteiro:
    - Esboce a curva normal
    - Trace uma linha para z = – 1,96
    - Verifique a área que se deseja calcular
    - Determine a área a partir da tabela

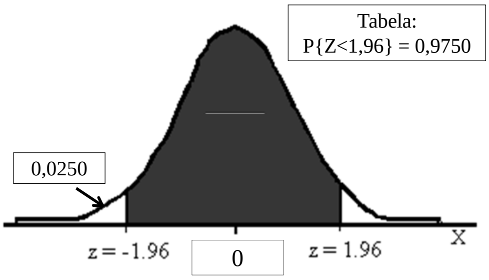
√ Área sob a curva para Z < – 1,96:

z	−0.09	−0.08	−0.07	−0.06	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	−0.01	0.00	z
−3.80	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.80
−3.70	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	−3.70
−3.60	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	−3.60
−3.50	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	−3.50
−3.40	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	−3.40
−3.30	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0005	.0005	.0005	−3.30
−3.20	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0007	.0007	−3.20
−3.10	.0007	.0007	.0008	.0008	.0008	.0008	.0009	.0009	.0009	.0010	−3.10
−3.00	.0010	.0010	.0011	.0011	.0011	.0012	.0012	.0013	.0013	.0013	−3.00
−2.90	.0014	.0014	.0015	.0015	.0016	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	−2.90
−2.80	.0019	.0020	.0021	.0021	.0022	.0023	.0023	.0024	.0025	.0026	−2.80
−2.70	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0033	.0034	.0035	−2.70
−2.60	.0036	.0037	.0038	.0039	.0040	.0041	.0043	.0044	.0045	.0047	−2.60
−2.50	.0048	.0049	.0051	.0052	.0054	.0055	.0057	.0059	.0060	.0062	−2.50
−2.40	.0064	.0066	.0068	.0069	.0071	.0073	.0075	.0078	.0080	.0082	−2.40
−2.30	.0084	.0087	.0089	.0091	.0094	.0096	.0099	.0102	.0104	.0107	−2.30
−2.20	.0110	.0113	.0116	.0119	.0122	.0125	.0129	.0132	.0136	.0139	−2.20
−2.10	.0143	.0146	.0150	.0154	.0158	.0162	.0166	.0170	.0174	.0179	−2.10
−2.00	.0183	.0188	.0192	.0197	.0202	.0207	.0212	.0217	.0222	.0228	−2.00
−1.90	.0233	.0239	.0244	.0250	.0256	.0262	.0268	.0274	.0281	.0287	−1.90
−1.80	.0294	.0301	.0307	.0314	.0322	.0329	.0336	.0344	.0351	.0359	−1.80
−1.70	.0367	.0375	.0384	.0392	.0401	.0409	.0418	.0427	.0436	.0446	−1.70
−1.60	.0455	.0465	.0475	.0485	.0495	.0505	.0516	.0526	.0537	.0548	−1.60



√ P {Z < – 1,96} = 0,0250

√ Calcule P{– 1,96 < Z < 1,96}

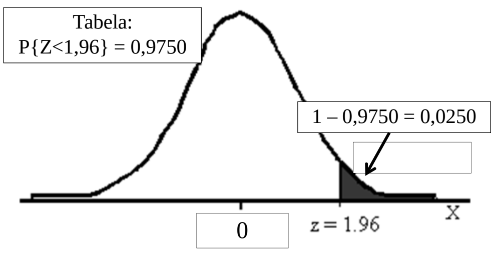


P{– 1,96 < Z < 1,96} = 0,9750 – 0,0250 = 0,9500

- Área sob a curva para Z < 1,96

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359	0.00
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753	0.10
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141	0.20
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517	0.30
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879	0.40
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224	0.50
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549	0.60
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852	0.70
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133	0.80
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389	0.90
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621	1.00
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830	1.10
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015	1.20
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177	1.30
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319	1.40
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441	1.50
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545	1.60
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633	1.70
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706	1.80
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767	1.90
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817	2.00
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857	2.10
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890	2.20
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916	2.30
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936	2.40

- Calcule P { Z > 1,96}

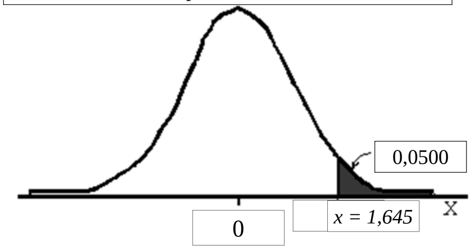


- Probabilidade contida em alguns intervalos

Intervalo	Probabilidade	
–1 < Z < 1	0,8413 – 0,1587 =	0,6826
–2 < Z < 2	0,9772 – 0,0228 =	0,9544
–3 < Z < 3	0,9987 – 0,0013 =	0,9974

- Determinar x, tal que P{Z > x} = 0,05

Tabela: Valor mais próximo de P{Z<x} = 0,9500



√ P { Z < 1,65} = 0,9505
√ P {Z < 1,64} = 0,9495

Intervalos Simétricos em Torno de Zero

Probabilidade	Intervalo
90%	–1,645 < Z < 1,645
95%	–1,96 < Z < 1,96
99%	–2,58< Z < 2,58

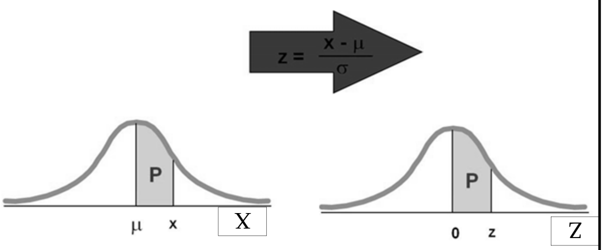
Outras Distribuições Normais

- Caso Geral:
  - √ Média: μ
  - √ Desvio-padrão: σ
- Transformação:

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

- Mesmos procedimentos após transformação (tabela Normal Padrão)

Conversão na Normal Padrão

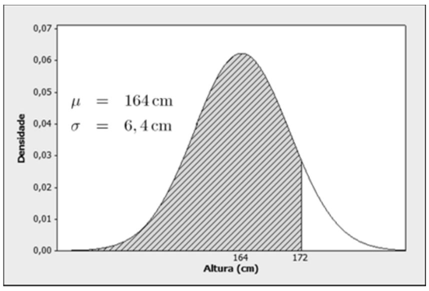


- P{μ < X < x } = P {0 < Z < z }

Exemplo

- As alturas de mulheres com 18 a 24 anos de idade é aproximadamente normal com média 164 cm e desvio-padrão 6,4 cm.
  - √ X: altura de mulheres entre 18 e 24 anos (cm)
    X ~ N (164, 6,4)

✓ Encontre a proporção de mulheres com altura inferior a 172 cm



√ Padronização

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$z = \frac{172-164}{6,4} = 1,25$$

√ Pela tabela

P { Z < 1,25} = 0,8944

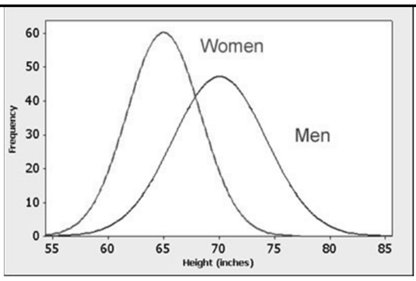
P { X < 100} = 0,8944 = 89,44%

- Qual o valor de altura que delimita 5% das mulheres mais altas?

$$X = \mu + Z\sigma = 164 + 1,645(6,4) = 174,5\text{cm}$$

Aplicações da Distribuição Normal

- Usada como um modelo para estudar uma grande variedade de variáveis
  - √ Objetivo: responder questões sobre probabilidades relacionadas com essas variáveis
- Exemplos:
  - √ Altura humana
  - √ Inteligência



Referências

Bibliografia

- Wild, C.J. e Seber, G.A.F. (LTC) *Encontros com o Acaso: um Primeiro Curso de Análise de Dados e Inferência*
- Moore, D.S. e McCabe, G.P. (LTC) *Introdução à Prática da Estatística*
- Agresti, A. e Finlay, B. (Penso) *Métodos Estatísticos para as Ciências Sociais*