

## Estadística Econômica II

Lupércio França Bessegato  
Departamento de Estatística/UFJF

## Testes de Significância



### Roteiro Geral



1. Introdução
2. Modelos probabilísticos
3. Amostragem
4. Distribuições amostrais e estimação
- 5. Testes de significância**
6. Comparações de médias
7. Tópicos especiais
8. Referências

Estadística Econômica II - 2018

2



### Roteiro do Módulo



5. Testes de significância:
  - a) Introdução
  - b) Tipos de hipóteses
  - c) Medição da evidência contra  $H_0$
  - d) Teste de hipótese como tomada de decisão
  - e) Testes de hipóteses e intervalos de confiança
  - f) Questões de uma amostra

Estadística Econômica II - 2018

4

# Introdução

## Exemplo

- Medidas da densidade da terra.
  - Medidas da densidade da terra.
    - Quantidade de medidas:  $n = 23$
    - Média da amostra:  $\bar{x} = 5,4835$
    - Desvio-padrão da amostra:  $s = 0,1904$
  - Valor teórico da densidade da terra:
    - $\mu = 5,517$
- O instrumento de Cavendish era viciado?

Estadística Econômica II - 2018 6

### Simulação de 400 medidas da densidade

- Instrumento não viciado de mesma precisão
  - $\mu = 5,517$  e  $\sigma = 0,1904$

- Valor obtido não é incomum para as médias de amostras de experimento não viciado
- Valor obtido cai dentro dos 60% centrais da distribuição
- Dados não podem estabelecer que as medidas são viciadas
  - ✓ Aceitável que são não viciadas
- Conclusão:
  - ✓ Não há evidência de que procedimento fosse viciado

Estadística Econômica II - 2018 7

## Distância entre Estimativa e Valor Teórico

- Se valor hipotético está correto
  - ✓ (admitido por hipótese, valor teórico, etc.)
  - ✓ Estimativa do parâmetro, obtida a partir dos dados, não estará muito longe do valor suposto
- Distância entre a estimativa e o valor hipotético
  - ✓ Medida em termos de número de erros padrão da estimativa

$$T = \frac{\text{estimativa} - \text{valor hipotético do parâmetro}}{\text{erro padrão da estimativa}}$$

Estadística Econômica II - 2018 8

$T = \frac{\text{estimativa} - \text{valor hipotético do parâmetro}}{\text{erro padrão da estimativa}}$

- Se distância é inaceitavelmente grande:
  - √ Rejeita-se o valor admitido por hipótese

O que é uma distância inaceitável?

9

Se o problema estiver em conformidade com uma distribuição t ou Normal(0, 1)

- √ Mesmo que aproximadamente
- √ Distribuição de T seria conhecida!

1. Valor observado ( $t_0$ ) é valor típico dessa distribuição
  - √ Verdadeiro valor do parâmetro é o valor suposto
2. Valor observado não é típico
  - √ Verdadeiro valor não é o valor suposto
  - √ Conclusão:
    - Não temos o verdadeiro valor do parâmetro

10

### Exemplo

- Medidas da densidade da terra.
  - √ Medidas da densidade da terra.
    - Quantidade de medidas:  $n = 23$
    - Média da amostra:  $\bar{x} = 5,4835$
    - Desvio-padrão da amostra:  $s = 0,1904$
  - √ Valor teórico da densidade da terra:
    - $\mu = 5,517$
- Distância entre estimativa e valor hipotético
 
$$\text{ep}(\bar{x}) = \frac{0,1904}{\sqrt{23}} = 0,0397 . \quad t_0 = \frac{\text{média amostral} - 5,517}{\text{erro padrão da média amostral}} = \frac{5,4835 - 5,517}{0,0397} = -0,844 .$$

11

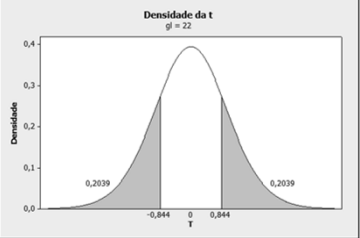
$$t_0 = \frac{5,4835 - 5,517}{0,0397} = -0,844 .$$

- √ Média das observações de Cavendish está 0,844 erros padrão abaixo do valor teórico
- Distribuição amostral da distância (T)
  - √  $T \sim t_{23-1}$

- √ Essa diferença pode ser explicada em termos da variação amostral?

12

- Caso o valor teórico seja o verdadeiro:
  - √ Probabilidade de erro amostral produzir distâncias maiores que a observada ( $|t_0|=0,844$ )



- 40,8% das médias amostrais estariam mais afastadas do verdadeiro valor
  - √ Medidas em erros padrão
- É plausível que a média populacional verdadeira seja o valor hipotético (teórico)
  - √ Diferença entre  $\bar{x}$  e  $\mu$  pode ser devido à variação amostral
- Não foi provada uma verdade
  - √ Ela é crível

Estadística Econômica II - 2018 13

### Teste de Significância e Intervalo de Confiança

- Intervalo de confiança:
  - √ Escolhe-se um nível de confiança
  - √ Determina-se um intervalo de valores possíveis para o parâmetro, consistente com os dados
  - √ Ex.:
    - [5,40; 5,57]: IC com 95% para a média verdadeira  $\mu$

Estadística Econômica II - 2018 14

### Teste de Significância e Intervalo de Confiança


- Teste de significância:
  - √ Testa-se apenas um valor possível para o parâmetro (valor hipotético)
  - √ Determina-se a a força da evidência fornecida pelos dados contra a proposição
    - Proposto: valor hipotético é o verdadeiro valor
  - √ Ex.:
    - $\mu$  pode ser 5,517?

Estadística Econômica II - 2018 15

## Tipos de Hipóteses

### Exemplo – Percepção Extra-sensorial

- Experimento para investigar PES
  - √ Pratt e Woodruff (1938)
  - √ Experimentador virava uma carta aleatória de baralho Zener (ou Rhine)



- √ Sujeito experimental não podia ver a carta e indicava o formato que “achava” estava desenhado
- √ Sujeitos experimentais: vários estudantes

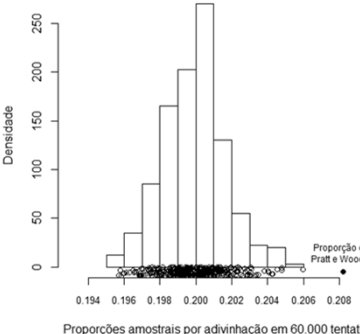
Estadística Econômica II - 2018 17

### Exemplo – Percepção Extra-sensorial

- √ Dados amostrais:
  - 12.489 adivinhações corretas em 60.000 tentativas
- √ Se todos os sujeitos estivessem apenas adivinhando
  - Obter cerca de 12.000 observações corretas
  - 20% (1/5) das tentativas
- √ Taxa de sucesso do experimento:  $\hat{p} = \frac{12.489}{60.000} = 20,8\%$ .
- É possível que todos os estivessem apenas adivinhando?
  - √ Variação amostral pode explicar sozinha a taxa de sucesso obtida?

Estadística Econômica II - 2018 18

- Simulação de 4.000 experimentos
  - √ Adivinhação apenas




- Nenhuma das proporções dos 4.000 experimentos de adivinhação foi tão grande quanto o de Pratt e Woodruff
- Adivinhação e variação amostral parecem não explicar a taxa de sucesso obtida
- √ Estimativa não é consistente com o padrão de variação que espera-se que ocorra com adivinhação

Estadística Econômica II - 2018 19


### Hipóteses

- Não podemos nunca demonstrar que um valor hipotético para um parâmetro seja o valor verdadeiro
- Abordagem oposta:
  - √ Podemos determinar se há evidência para descartar o valor admitido por hipótese

Estadística Econômica II - 2018 20




## Hipótese Nula




- Em Estatística, testamos a hipótese que podemos descartar
  - √ Proposta para se verificar se podemos derrubá-la

Estadística Econômica II - 2018 21




## Exemplo – Taxa de Retorno




- Empresas alvos para aquisição dão taxa de retorno menor do capital do investidor?
  - √ Considera-se que empresas com retornos menores do capital do acionista têm maior probabilidade de atrair ofertas de aquisição
- Suspeita:
  - √ Em média, os tipos de empresas visados para aquisição tendem a ser aquelas com retorno de capital pior do que a média
    - (Hipótese de pesquisa)

Estadística Econômica II - 2018 22




## Hipótese de Pesquisa




- Lança conjecturas que planejamos investigar através da pesquisa
- Se os ‘palpites’ dos pesquisadores se mostram corretos, são estabelecidos como verdadeiros

Estadística Econômica II - 2018 23




## Hipóteses Mais Comumente Testadas




- Hipóteses do tipo ‘não faz nenhuma diferença’
  - √ Não há diferença na motivação dos trabalhadores entre companhias com novo tipo de gestão e aquelas que não o adotam
  - √ Não há diferenças nas taxas de promoções entre homens e mulheres
  - √ Uma campanha de propaganda não fez qualquer diferença no volume de vendas

Estadística Econômica II - 2018 24




## Teste de Significância




- Uso principal do teste de significância
  - √ Verificar se as diferenças (ou efeitos) aparentes observados nos dados podem ser explicados simplesmente em termos de variação amostral
- Se elas podem, ninguém ficará impressionado

Estadística Econômica II - 2018 25




## Hipótese Nula




- Reação cética à hipótese de pesquisa (palpite)
  - √ São do tipo ‘não faz nenhuma diferença’
- Diferenças observadas nos dados são explicáveis em termos de variação amostral
  - √ Não fornecem evidências convincentes de que existam diferenças reais

Estadística Econômica II - 2018 26




## Exemplo – Percepção Extra-sensorial




- Reação cética:
  - √ “Eles estavam apenas adivinhando”
- $H_0$ :
  - √  $p = 0,20$

Estadística Econômica II - 2018 27





## Hipótese Alternativa ( $H_1$ )



- Corresponde à hipótese de pesquisa
- Especifica o tipo de afastamento da hipótese nula que esperamos detectar
  - √ Temos que pensar claramente a respeito do tipo de comportamento dos dados que seria evidência contra a hipótese nula, confirmando a hipótese alternativa

Estadística Econômica II - 2018 28





### Exemplo – PES

- Hipótese de pesquisa:
  - √ Alguns indivíduos poderiam receber informações sobre as cartas por meio de PES
- Hipótese nula (reação cética):
  - √ Taxa de sucesso deve-se apenas à adivinhação
- Hipóteses:
  - √  $H_0: p = 0,2$
  - √  $H_1: p \neq 0,2$

Comportamento dos dados que fornece evidências contra  $H_0$  (confirma  $H_1$ )

29

Estatística Econômica II - 2018





### Construção do Teste

- Hipóteses:
  - √  $H_0: p = 0,2$
  - √  $H_1: p \neq 0,2$
- Comportamento dos dados que confirma  $H_1$ 
  - √ Fornece evidências contra  $H_0$
  - √ Taxa amostral de sucesso suficientemente maior que 0,2
    - Não pode ser explicada simplesmente em termos da variação amostral

30

Estatística Econômica II - 2018

## Medição da Evidência contra a Hipótese Nula



### Teste de Significância

- Comparação de resultado dos dados com o padrão de variação amostral que seria gerado se  $H_0$  fosse verdadeira
- Evidência contra a hipótese:
  - √ Valor dos dados que está fora da amplitude usual daquela variação

32

Estatística Econômica II - 2018



### Exemplo – Percepção Extra-sensorial

- Experimento para investigar PES
  - ✓ Pratt e Woodruff (1938)
  - ✓ Experimentador virava uma carta aleatória de baralho Zener (ou Rhine)
- Hipóteses:
  - ✓  $H_0$ : sujeitos adivinharam vs.  $H_1$ : não adivinharam
  - ✓  $H_0$ :  $p = 0,20$  vs.  $H_1$ :  $p \neq 0,20$
- Estimativas (valores amostrais):
  - ✓  $n = 60.000$        $\hat{p} = \frac{12.489}{60.000} = 20,8\%$

33

### Simulação de 4.000 experimentos

- ✓ Adivinhação apenas

- Estimativa não é consistente com o padrão de variação que espera-se que ocorra com adivinhação ( $H_0$ )

34

### Exemplo

- Medidas da densidade da terra.
  - ✓ Efetuadas por Cavendish (1797-1798)
  - ✓ Valor teórico (hoje):  $\mu = 5,517$
- Hipóteses:
  - ✓  $H_0$ : instrumento não viciado vs.  $H_1$ : viciado
  - ✓  $H_0$ :  $\mu = 5,517$  vs.  $H_1$ :  $\mu \neq 5,517$
- Valores amostrais:
  - ✓ Quantidade de medidas:  $n = 23$
  - ✓ Média da amostra:  $\bar{x} = 5,4835$
  - ✓ Desvio-padrão da amostra:  $s = 0,1904$

35

### Simulação de 400 medidas da densidade

- ✓ Instrumento não viciado de mesma precisão
  - $\mu = 5,517$  e  $\sigma = 0,1904$

- Valor obtido não é incomum para as médias de amostras de experimento não viciado
  - ✓ Valor obtido cai dentro dos 60% centrais da distribuição

36

### Medição da Evidência contra $H_0$

Procedimento formal:

- Passo 1: Calcule a estatística de teste

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{ep(\hat{\theta})} = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

✓ com  $T \sim t_{gl}$  (ou  $N(0,1)$  se  $gl = \infty$ ).

✓ Estatística de teste:

- Quantos erros padrão a estimativa obtida a partir dos dados está afastada do valor hipotético
- Média:  $T$  e  $t_0$
- Proporção:  $Z$  e  $z_0$

✓ Significado de “mais afastada” depende de  $H_1$

37

### Passo 2: Calcule o p-valor:

✓ Medida da evidência contra  $H_0$

Hipótese alternativa	Evidência contra $H_0$ fornecida por	p-valor
Unilaterais	$H_1: \theta > \theta_0$ (ou seja $\hat{\theta} - \theta_0$ muito grande)	$p = \Pr\{T \geq t_0\}$
	$H_1: \theta < \theta_0$ (ou seja $\hat{\theta} - \theta_0$ muito negativa)	$p = \Pr\{T \leq t_0\}^a$
Bilateral	$H_1: \theta \neq \theta_0$ (ou seja $ \hat{\theta} - \theta_0 $ muito grande)	$p = 2 \times \Pr\{T \geq  t_0 \}$

✓ <sup>a</sup>Se  $\theta < \theta_0$  é positivo, o p-valor é maior do que 50% e não há necessidade de fazer o cálculo

38

### ✓ p-valor:

- Probabilidade de, se  $H_0$  for verdadeiro, a variação amostral produzir uma estimativa que esteja mais afastada do valor hipotético que a estimativa obtida a partir dos dados

✓ Consequência:

- Quanto menor o p-valor, mais forte a evidência contra  $H_0$ .

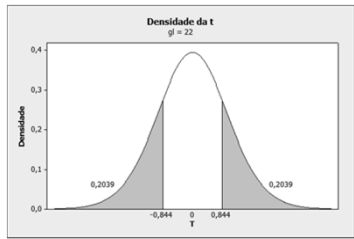
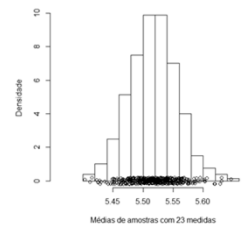
✓ Usamos testes bilaterais, a menos que:

- exista uma hipótese de pesquisa a priori (antes de o dado ser coletado)
- razão forte a priori para acreditar que o resultado deveria ir numa direção em particular.

39

### Passo 3: Interprete o p-valor no contexto dos dados

✓ p-valor grande:

– Se  $H_0$  fosse verdadeira, a variação amostral em torno do valor hipotético forneceria frequentemente valores que estariam ainda mais afastados do valor hipotético do que a estimativa (dados).

40

√ p-valor pequeno:

– Se  $H_0$  fosse verdadeira, a variação amostral em torno do valor admitido por hipótese quase sempre daria valores que estariam mais próximos do valor hipotético

Estadística Econômica II - 2018 41

√ Quanto menor o p-valor, menos plausível a ideia de que o valor hipotético é o verdadeiro valor do parâmetro

- Mais forte a evidência de que o valor hipotético não é o verdadeiro valor do parâmetro

Tamanho aproximado do p-valor	Tradução <sup>a</sup>
> 0,12	(12%) <b>Nenhuma</b> evidência contra $H_0$
0,10	(10%) Evidência <b>fraca</b> contra $H_0$
0,05	(5%) <b>Alguma</b> evidência contra $H_0$
0,01	(1%) <b>Forte</b> evidência contra $H_0$
$\leq 0,001$	(0,1%) Evidência <b>muito forte</b> contra $H_0$

<sup>a</sup>Essas traduções são dos autores e não são universalmente aceitas

Fonte: WILD, J. W.; SEBER, G. A. F. *Encontros com o acaso: Um primeiro curso de análise de dados e inferência*. Rio de Janeiro: LTC, 2004

Estadística Econômica II - 2018 42

### Exemplo – p-valor

- Medidas da densidade da Terra – Cavendish
- √ Hipóteses:
  - $H_0: \mu = 5,517$  vs.  $H_1: \mu \neq 5,517$
- Estatísticas amostrais:

n	$\bar{x}$	$s_X$	$ep(\bar{x})$
23	5,4835	0,1904	0,0397

- Estatística de teste:

$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{5,4835 - 5,517}{0,0397} = -0,844$$

Estadística Econômica II - 2018 43

- Determinação do p-valor

- √  $H_1: \mu \neq 5,517$  (bilateral)
- √ Distribuição amostral:  $t_{22}$  (gl = 23 – 1)

$$p\text{-valor} = 2 \times \Pr\{T \geq | -0,84426|\} = 0,408.$$

- √ P-valor é muito grande

- Conclusão:

- √ Dados não fornecem nenhuma evidência contra o valor admitido por hipótese (instrumento viciado)

- IC com 95% de confiança para média  $\mu$ :

$$\bar{x} \pm t_{gl} \times ep(\bar{x}) = 5,4835 \pm 2,073873 \times 0,0397 = [5,40; 5,57]$$

Estadística Econômica II - 2018 44

**Exemplo A**

Empresas com retornos fracos são aquelas que atraem mais ofertas de aquisição?

- √ *Retorno anormal*: retorno de capital da empresa menos retorno médio (todas as empresas)
  - Valor negativo para retorno menor que a média
- √ Hipótese de pesquisa:
  - *retornos anormais* para empresas-alvo para aquisição seriam em média negativos
- √ Dados amostrais

n	$\bar{x}$	$s_x$	$ep(\bar{x})$
88	-0,0029	0,0169	0,0018015

$$ep(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{0,0169}{\sqrt{88}} = 0,0018015 .$$

Estadística Econômica II - 2018 45

- Hipótese de pesquisa ( $H_1$ ):
  - √ *Retornos anormais* para os alvos para aquisição seriam negativos na média
- Reação cética a  $H_1$  ( $H_0$ )
  - √ Aquelas empresas não são diferentes de outras
- Parâmetro de interesse:
  - √  $\mu$ : média verdadeira (desconhecida) para a variável retornos anormais para empresas-alvo.
- Hipóteses
  - √  $H_0: \mu = 0$  vs.  $H_1: \mu < 0$

Estadística Econômica II - 2018 46

- Estatística de teste:
 
$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{-0,0029 - 0}{0,0018015} = -1,610 .$$
  - √ Estimativa está 1,61 erro padrão abaixo do valor admitido por hipótese
- Determinação do p-valor:
  - √ Médias amostrais negativas grandes são evidência contra  $H_0$ .
  - √ Distribuição amostral:  $t_{87}$  ( $gl = 88 - 1$ )
 
$$p - \text{valor} = \Pr\{T \leq -1,610\} = 0,056 .$$

Estadística Econômica II - 2018 47

- Conclusão:
  - √ Como o p-valor é aproximadamente 5%, isto nos fornece alguma evidência contra  $H_0$ , em favor da hipótese de pesquisa de que alvos para aquisição têm menores valores de retornos anormais em média do que empresas em geral.

Estadística Econômica II - 2018 48

• E se a hipótese alternativa fosse  $\mu \neq 0$ ?

√ Determinação do p-valor

$$p\text{-valor} = 2 \times \Pr\{T \geq -1,610\} = 0,112.$$

√ Conclusão:

- Os dados não fornecem evidência contra  $H_0$ , de que, em média, os valores de retornos anormais de empresas-alvo para aquisição são iguais aos das empresas em geral.

√ IC de 95% para o retorno anormal médio

$$\bar{x} \pm t_{gl} \times \text{ep}(\bar{x}) = -0,0029 \pm 1,98761 \times 0,0018015 = [-0,0065; 0,0007].$$

49

### Exemplo B

Reprodução mais veloz de propaganda pode aumentar a recordação?

√ Estudo comparativo dos efeitos de comerciais de tempo reduzido, com amostras independentes

- Grupo 1: versão acelerada (24s)
- Grupo 2: versão normal (30 s)

√ Hipótese de pesquisa:

- Taxa de recordação dois dias depois para a versão acelerada é significativamente maior?

50

√ Dados amostrais:

- X: número de pessoas que recordaram a propaganda

Versão	n	X	$\hat{p}$
reduzida	74	32	0,4324
normal	57	15	0,2632

√ Erro padrão:

- Resposta dicotômica em duas amostras independentes

$$\begin{aligned} \text{ep}(\hat{p}_A - \hat{p}_N) &= \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1 - \hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_N(1 - \hat{p}_N)}{n_N}} \\ &= \sqrt{\frac{0,4324 \times 0,5676}{74} + \frac{0,2632 \times 0,7368}{57}} \\ &= 0,0819667. \end{aligned}$$

51

• Hipótese de pesquisa ( $H_1$ ):

√ Acelerar a propaganda poderia mudar o nível de recordação

- Sem crença a priori de que melhoraria recordação

• Reação cética a  $H_1$  ( $H_0$ )

√ Não há diferença entre as versões quanto à taxa de recordação


• Parâmetro de interesse:

√  $p_A - p_N$ : verdadeira diferença desconhecida.

• Hipóteses


√  $H_0: p_A - p_N = 0$  vs.  $H_1: p_A - p_N \neq 0$

52




- Estatística de teste:
 
$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{(0,4324 - 0,2632) - 0}{0,0819667} = 2,0652 .$$
  - √ Estimativa está 2,07 erro padrão acima da diferença admitida por hipótese
- Determinação do p-valor:
  - √ Diferenças amostrais grandes são evidência contra  $H_0$ .
  - √ Distribuição amostral:  $N(0, 1)$  ( $gl = \infty$ )
    - Amostras são grande o suficiente (Apêndice A3)
$$p - \text{valor} = 2 \times \Pr\{T \geq 2,0652\} = 0,039.$$




53

Estatística Econômica II - 2018




- Conclusão:
  - √ Como o p-valor é pequeno, temos evidência contra  $H_0$ . Assim, temos evidência de que existe uma diferença real.
  - √ Estimativa mostra que é a versão acelerada deste comercial em particular que as pessoas mais provavelmente recordam
- Mas, quanto mais provável?



54


Estatística Econômica II - 2018



- √ IC de 95% para a verdadeira proporção ( $p_A - p_N$ )
 
$$(\hat{p}_A - \hat{p}_N) \pm t_{\infty} \times \text{ep}(\hat{p}_A - \hat{p}_N) =$$


$$(0,4324 - 0,2632) \pm 1,98761 \times 0,0819667 =$$

$$[0,01; 0,33] .$$
  - Intervalo não é muito preciso
- √ A verdadeira diferença pode ser muito pequena
  - 1% a mais de telespectadores conseguindo recordar seu comercial provavelmente não causaria um impacto real na efetividade da campanha publicitária
- √ A verdadeira diferença pode ser muito grande
  - Ter 33% a mais de público conseguindo recordar seu comercial (com redução dos custos de exibição) é um bônus interessante.




55

Estatística Econômica II - 2018



### Exemplo C




Quem responde 'sim' está mais seguro?

- √ Pessoas com opinião forte a respeito de uma questão tendem a responder rapidamente
  - Se não têm opinião a priori forte, tendem a levar um tempo maior pensando
- √ Pesquisa de opinião por telefone:
  - "Supondo que seja conveniente para você, você espera obter uma injeção contra gripe suína?"
  - Medidas do tempo de resposta (*valores de certeza*)
- √ Questão de interesse:
  - Pessoas que responderam sim tinham mais ou menos confiança acerca de sua resposta?

56

Estatística Econômica II - 2018

  $\checkmark$  Dados amostrais:


- Dados dos valores de certeza ( $s^{-1}$ )

	Responderam sim	Responderam não
Tamanho da amostra	100	43
Média amostral	0,76	1,41
Desvio padrão	0,50	0,72

Fonte: LaBarbera e MacLachlan (1979)

- Hipótese de pesquisa ( $H_1$ ):
  - $\checkmark$  Quem responde 'sim' tem mais segurança
  - Tempo médio de resposta é menor ( $\mu_S$ )
- Reação cética a  $H_1$  ( $H_0$ )
  - $\checkmark$  Não há diferença entre os tempos médios de resposta


57

 • Parâmetro de interesse:

- $\checkmark \mu_N - \mu_S$ : diferença desconhecida entre os valores de certeza

- Hipóteses
  - $\checkmark H_0: \mu_N - \mu_S = 0$  vs.  $H_1: \mu_N - \mu_S \neq 0$
  - Não temos nenhuma razão *a priori* que, como grupo, os 'nãos' deveriam tender a ser respondidos com mais ou menos convicção do que os 'sims'.

58

  $\checkmark$  Erro padrão:

- Grupos independentes (grupos inteiramente distintos de pessoas)

$$ep(\bar{x}_N - \bar{x}_S) = \sqrt{\frac{s_N^2}{n_N} + \frac{s_S^2}{n_S}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,72^2}{43} + \frac{0,50^2}{100}}$$


$$= 0,1206475 .$$

- Estatística de teste:
 
$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{(1,41 - 0,76) - 0}{0,1206475} = 5,387597 .$$

$\checkmark$  Estimativa está 5,38 erros padrão acima da diferença admitida por hipótese (parece grande!)

59



 • Determinação do p-valor:

- $\checkmark$  Distância amostral grande é evidência contra  $H_0$ .
- $\checkmark$  Distribuição amostral:  $t_{42}$  [gl=Min(100-1, 43-1)]

$$p - \text{valor} = 2 \times \Pr\{T \geq 5,387597\} = 0,000003.$$

- Conclusão:
  - $\checkmark$  Temos evidência muito forte contra  $H_0$ , ou seja, evidência muito forte de uma diferença real.
- Quanto maior é  $\mu_N$  do que  $\mu_S$ ?
  - $\checkmark$  Média amostral de certeza do grupo 'não' é maior

60


 ✓ IC de 95% para a verdadeira diferença ( $\mu_N - \mu_S$ )
 

$$(\bar{x}_N - \bar{x}_S) \pm t_{42} \times \text{ep}(\bar{x}_N - \bar{x}_S) =$$

$$(1,41 - 0,76) \pm 2,018082 \times 0,1206475 =$$

$$[0,41; 0,89] .$$

- Com 95% de confiança, o valor de certeza média no grupo 'não' está entre 0,41 e 0,89 s<sup>-1</sup> maior do que o valor médio do grupo 'sim'

✓ IC de 95% para os tempos

- certeza = 1/tempo

$$\left[ \frac{1}{0,89}; \frac{1}{0,41} \right]$$



$$[1,1; 2,4] .$$

- 'sins' são respondidos mais vagorosamente entre 1,1 e 2,4 segundos

61

Estatística Econômica II - 2018

### Exemplo D






#### Nascimentos subsequentes tendem a ser do mesmo sexo?

- ✓ Pesquisa secundária para confirmar evidências
  - Dados de 20 anos de registro de hospital
- ✓ Hipótese de pesquisa:
  - Se primeiro filho foi uma menina, é mais provável de segundo filho ser menina
  - Idem, para meninos

62

Estatística Econômica II - 2018


 ✓ Dados amostrais:
 

- Primeiro e segundo nascimentos por sexo

		Segundo filho		Total
		Menino	Menina	
Primeiro filho	Menino	3.202	2.776	5.978
	Menina	2.620	2.792	5.412
Total		5.822	5.568	11.390



✓ Tabela reformatada

- Análise do sexo dos segundos filhos

grupo	Nascimentos (n)	Número de meninas (X)	$\hat{p}$
1 (filho anterior foi uma menina)	5.412	2.792	0,516
2 (filho anterior foi um menino)	5.978	2.776	0,464

63

Estatística Econômica II - 2018






- Hipótese de pesquisa ( $H_1$ ):
  - ✓ Nascimentos do primeiro grupo (1º filho = menina) são mais prováveis de ser menina do que do segundo grupo (1º filho = menino)
- Reação cética a  $H_1$  ( $H_0$ )
  - ✓ Não há diferença nas verdadeiras proporções entre os dois grupos

64

Estatística Econômica II - 2018



 • **Parâmetro de interesse:** 

√  $p_1 - p_2$ : diferença entre as verdadeiras proporções

- $p_1$ : verdadeira proporção de meninas de mães cujo 1º filho foi uma menina
- $p_2$ : verdadeira proporção de meninas de mães cujo 1º filho foi um menino



• **Hipóteses**

√  $H_0: p_1 - p_2 = 0$  vs.  $H_1: p_1 - p_2 > 0$

- Há evidência *a priori* de que nascimentos subsequentes tendem a ser do mesmo sexo.

65

Estadística Econômica II - 2018

 √ **Erro padrão:** 

- Grupos independentes (grupos inteiramente distintos de pessoas)

$$ep(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,5159 \times 0,4841}{5412} + \frac{0,4644 \times 0,5356}{5978}} = 0,0093677$$

$$\hat{p}_1 = \frac{2792}{5412} = 0,5159$$

$$\hat{p}_2 = \frac{2776}{5978} = 0,4644$$

• **Estatística de teste:**



$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{(0,5159 - 0,4644) - 0}{0,0093677} = 5,49986$$

√ Estimativa está 5,50 erros padrão acima da diferença admitida por hipótese (parece grande!)

66

Estadística Econômica II - 2018

 **Determinação do p-valor:** 

√ Distribuição amostral:  $N(0, 1)$  [ $g1 = \infty$ ]

- Amostras são claramente grandes o suficiente

$$p\text{-valor} = \Pr\{T \geq 5,49986\} = 1,9 \times 10^{-8}$$



• **Conclusão:**

- √ Temos evidência muito forte contra  $H_0$ , que confirma a alternativa.
- √ Temos evidência extremamente forte de que mães cujo 1º filho foi uma menina *têm* maior chance de ter uma menina na segunda vez, do que mães cujo 1º filho foi um menino.

• **Quão mais provável?**

67

Estadística Econômica II - 2018

 √ **IC de 95% para a verdadeira proporção ( $p_1 - p_2$ )** 

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm t_{\infty} \times ep(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) =$$

$$(0,5159 - 0,4644) \pm 1,960 \times 0,0093677 =$$

$$[0,033; 0,070]$$

- Com 95% de confiança, a % populacional de meninas nascidas no 1º grupo é maior do que no último grupo por algo entre 3 a 7 pontos percentuais.

68

Estadística Econômica II - 2018

### Exemplo D – Outra Pergunta

- Ter um menino, seguido por uma menina é mais ou menos comum do que ter uma menina, seguida por um menino?

		Segundo filho		Total
		Menino	Menina	
Primeiro filho	Menino	3.202	2.776	5.978
	Menina	2.620	2.792	5.412
	Total	5.822	5.568	11.390

✓ Contagens maiores para menino seguido por menina do que o contrário

Estadística Econômica II - 2018 69

- Ordens de nascimento:
  - ✓ {MM, MF, FM, FF}
- Situação de amostragem:
  - ✓ Única amostra, resposta em qualquer uma das quatro ordens de nascimento (categorias)

	Nascimentos	Proporção amostral
MM	3.202	0,28
MF	2.776	0,24
FM	2.792	0,25
MM	2.620	0,23
<b>Total</b>	11.390	1,00


Estadística Econômica II - 2018 70

- Hipótese de pesquisa ( $H_1$ ):
  - ✓ Ter um menino, seguido por uma menina é mais ou menos comum do que ter uma menina seguida por um menino
- Reação cética a  $H_1$  ( $H_0$ )
  - ✓ Não há diferença nas verdadeiras proporções das duas situaçãoe

Estadística Econômica II - 2018 71

- Parâmetro de interesse:
  - ✓  $p_{MF} - p_{FM}$ : diferença entre as verdadeiras proporções
    - $p_{MF}$ : verdadeira proporção de meninas de mães cujo 1º filho foi um menino
    - $p_{FM}$ : verdadeira proporção de meninos de mães cujo 1º filho foi uma menina
- Hipóteses
  - ✓  $H_0: p_{MF} - p_{FM} = 0$  vs.  $H_1: p_{MF} - p_{FM} \neq 0$ 
    - Não temos nenhuma ideia a respeito da direção na qual a diferença deveria cair, antes de observarmos os dados.

Estadística Econômica II - 2018 72

  $\sqrt$  Erro padrão:

- Uma amostra, várias categorias de resposta (situação 2)

$$ep(\hat{p}_{MF} - \hat{p}_{FM}) = \sqrt{\frac{\hat{p}_{MF} + \hat{p}_{FM} - (\hat{p}_{MF} - \hat{p}_{FM})^2}{n}} \quad \hat{p}_{MF} = \frac{2.776}{11.390} = 0,24372$$

$$= \sqrt{\frac{0,24372 + 0,23003 - (0,24372 - 0,23003)^2}{11.390}} \quad \hat{p}_{FM} = \frac{2.620}{11.390} = 0,23003$$


$$= 0,006448 .$$

- Estatística de teste:
 
$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}}$$

$$= \frac{(0,24372 - 0,23003) - 0}{0,006448} = 2,124098 .$$

$\sqrt$  Estimativa está 2,12 erros padrão acima da diferença admitida por hipótese (parece grande?)

73

 Determinação do p-valor:


$\sqrt$  Distribuição amostral:  $N(0, 1)$  [ $g1 = \infty$ ]

- Amostras são claramente grandes o suficiente

$$p - \text{valor} = 2 \times \Pr\{T \geq 2,124098\} = 0,034 .$$

- Conclusão:
  - $\sqrt$  Temos evidência contra  $H_0$  e, portanto, evidência de que um menino seguido por uma menina é mais comum do que uma menina seguida por um menino.
  - A diferença é positiva ( $t_0 > 0$ )!
- Quão mais comum?

74

  $\sqrt$  IC de 95% para a verdadeira proporção ( $p_{MF} - p_{FM}$ )

$$(\hat{p}_{MF} - \hat{p}_{FM}) \pm t_{\infty} \times ep(\hat{p}_{MF} - \hat{p}_{FM}) =$$


$$(0,24372 - 0,23003) \pm 1,960 \times 0,006448 =$$

$$[0,001; 0,026] .$$

- Com 95% de confiança, o excesso da % populacional de meninos seguidos de meninas (MF) em relação a meninas seguidas de meninos (FM) está entre 0,1 (essencialmente 0) e 2,6 pontos percentuais.


75

**Exemplo E**




- Adiamiento da morte
  - $\sqrt$  Pessoas parecem adiar sua morte, até a ocorrência de algum evento de importância
  - $\sqrt$  Pesquisa secundária para verificar teoria
    - Datas de nascimento e morte de 348 pessoas encontradas no livro *400 Americanos Notáveis*.
    - 16 morreram no mês que antecedia seus aniversários
  - $\sqrt$  Há evidência de que as pessoas têm menos chance de morrer no mês anterior ao aniversário?

76


 • **Parâmetro de interesse:**  
 ✓  $p$ : probabilidade de uma pessoa morrer no mês anterior ao de seu aniversário

• **Hipóteses**  
 ✓  $H_0: p = \frac{1}{12}$  vs.  $H_1: p < \frac{1}{12}$   
 - A teoria é de que é menos provável que a pessoa morra no mês que antecede seu aniversário.



77

Estadística Econômica II - 2018


 ✓ **Erro padrão:**  
 - Uma amostra com resposta binária

$$ep(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0,04598 \times 0,95402}{348}} = 0,01123$$

$\hat{p} = \frac{16}{348} = 0,04598$


• **Estatística de teste:**  
 $t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}} = \frac{0,04598 - \frac{1}{12}}{0,01123} = -3,327$

✓ Estimativa está 3,33 erros padrão abaixo da proporção admitida por hipótese (parece grande?)




78

Estadística Econômica II - 2018


 **Determinação do p-valor:**  
 ✓ Distribuição amostral:  $N(0, 1)$  [ $gl = \infty$ ]  
 - A regra de 10% (Apêndice A3) dá  $n$  como sendo pelo menos 960, o que não é o caso  
 $p\text{-valor} = \Pr\{T \leq -3,327\} = 0,0004$

• **Conclusão:**  
 ✓ Há evidência muito forte contra  $H_0$  em favor de  $H_1$ , portanto, evidência de que é menos provável que a pessoa morra no mês que antecede seu aniversário.



79

Estadística Econômica II - 2018


 • **Teste exato – saída R:**

```
> prop.test(16, 348, p = 1/12, alternative = "less")
      1-sample proportions test with continuity correction

data:  16 out of 348, null probability 1/12
X-squared = 5.8777, df = 1, p-value = 0.007667
alternative hypothesis: true p is less than 0.08333333
95 percent confidence interval:
 0.00000000 0.06989543
sample estimates:
      p
0.04597701
```

- p-valor é bastante diferente daquele obtido com o teste aproximado (aproximação normal)

✓ Há forte evidência contra  $H_0$  em favor da hipótese de que é menos provável que a pessoa morra no mês que antecede seu aniversário.



80

Estadística Econômica II - 2018

• Caso optássemos pela hipótese alternativa bilateral

$$\frac{1}{12} = 0,0833$$

$$\sqrt{H_1: p \neq \frac{1}{12}}$$

```

> prop.test(16, 348, p = 1/12, alternative = "two.sided")

1-sample proportions test with continuity correction

data: 16 out of 348, null probability 1/12
X-squared = 5.8777, df = 1, p-value = 0.01533
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.08333333
95 percent confidence interval:
 0.02739140 0.07510479
sample estimates:
 p
0.04597701
    
```

✓ Há forte evidência contra  $H_0$  em favor de  $H_1$   
 - No caso, levaria à mesma conclusão

81

• Cuidados com a extrapolação dos resultados:

- ✓ Supomos que as pessoas 'comuns' têm o mesmo comportamento que as pessoas 'notáveis'?
- ✓ Há uniformidade ao longo do ano nas taxas de nascimento e de morte?
  - Ex.: Se a maioria dos nascimentos fosse no verão e a maioria das mortes no inverno, por outras razões que não o adiamento da morte, a estimativa de  $p$  seria pequena

82

✓ Teste da  $H_0: \theta = \theta_0$

$$t_0 = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{ep(\hat{\theta})}$$

Hipótese Alternativa	Evidência contra $H_0$ fornecida por	Escala $\hat{\theta}$	Escala t (# erros padrão)
$H_1: \theta > \theta_0$	$\hat{\theta}$ muito maior do que $\theta_0$		
$H_1: \theta < \theta_0$	$\hat{\theta}$ muito menor do que $\theta_0$		

83

✓ Teste da  $H_0: \theta = \theta_0$

$$t_0 = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{ep(\hat{\theta})}$$

Hipótese Alternativa	Evidência contra $H_0$ fornecida por	Escala $\hat{\theta}$	Escala t (# erros padrão)
$H_1: \theta \neq \theta_0$ (bilateral)	$\hat{\theta}$ muito longe de $\theta_0$ (ambas as direções)		

84

## Teste de Hipótese e Intervalos de Confiança

## Intervalos de Confiança e Testes de Significância

- Intervalo de confiança:
  - √ Amplitude de valores que são possibilidades plausíveis para o verdadeiro valor do parâmetro ( $\theta$ ), num dado nível de confiança.
- Teste de significância:
  - √ Fornece uma medida da força da evidência contra um único valor admitido por hipótese ( $\theta_0$ )

Estadística Econômica II - 2018

92

## Relação entre Resultado de um Teste e dos Valores num IC

- Teste bilateral de  $H_0: \theta = \theta_0$  é significativo ao nível de 5% se, e somente se,  $\theta_0$  cair fora de um intervalo com 95% de confiança para  $\theta$ .
  - √ No nível de 95%, dados fornecem evidência contrária a qualquer valor  $\theta_0$  que caia fora do IC
    - (Rejeitaríamos  $H_0: \theta = \theta_0$  para qualquer valor que caia fora do IC)
  - √ Não fornece evidência, no nível de 5%, contrária a qualquer valor  $\theta_0$  que caia dentro do IC

Estadística Econômica II - 2018

93

## Exemplo

- Medidas da densidade da Terra – Cavendish
  - √ Hipóteses:
    - $H_0: \mu = 5,517$  vs.  $H_1: \mu \neq 5,517$



- Estatísticas amostrais:

n	$\bar{x}$	$s_x$	ep( $\bar{x}$ )
23	5,4835	0,1904	0,0397

- IC com 95% de confiança para média  $\mu$ :
  - $\bar{x} \pm t_{gl} \times ep(\bar{x}) = 5,4835 \pm 2,073873 \times 0,0397 = [5,40; 5,57]$
  - √ Os testes de hipótese, ao nível de 5%, rejeitariam qualquer valor  $m_0$  maior que 5,57 ou menor que 5,40

Estadística Econômica II - 2018



94



### Significância

- Significância estatística:
  - √ Se relaciona à existência de um efeito
  - √ p-valor pequeno:
    - Fornece evidência da existência do efeito, mas não informa sobre sua intensidade
- Significância prática:
  - √ Depende da intensidade do efeito
- Para estimar intensidade de um efeito construa um intervalo de confiança

Estadística Econômica II - 2018 95





### Exemplo

Determinação de se um efeito tem significância prática

- √ Estudo de doenças coronariana, descobriu-se que se o paciente fumava (ou não) era significativamente relacionado ao risco de morte
  - p-valor = 0,048
  - IC de 95% = [1,004; 2,5]
- √ Teste indica haver um aumento no risco (p-valor)
- √ Aumento real poderia ter sido minúsculo (de pouca importância prática ou poderia ter sido muito grande (mais que dobrado))



Estadística Econômica II - 2018 96



### Resultados Não Significantes – Interpretação

- Um teste não significativo não é evidência de que  $H_0$  é verdadeira
  - √ Podemos afirmar apenas que:
    - Dados não descartam a possibilidade de que  $H_0$  seja verdadeira
- Usamos um IC, para verificar outros valores do parâmetro (diferente do especificado por  $H_0$ ) são consistentes com os dados



Estadística Econômica II - 2018 97



### Exemplo

- Teste de significância de correlação entre duas variáveis
  - √  $\alpha = 0,01$ , com 1.000 observações,  $r = 0,08$
  - √ Forte evidência de correlação não nula
  - √ Verdadeira correlação populacional situa-se provavelmente bastante perto do valor observado
  - √ Para efeitos práticos, é possível ignorar a associação entre essas variáveis, apesar de estarmos bastante confiantes de que a correlação é positiva



Estadística Econômica II - 2018 98



## Importante

- Para evitar enganos:
  - √ Nunca cite um p-valor sobre a existência de um efeito, sem fornecer também um IC que estime seu tamanho



Estadística Econômica II - 2018 99



## Como Mostrar que uma Hipótese é Verdadeira?

- Como mostrar que o verdadeiro valor de um parâmetro  $\theta$  é  $\theta_0$ ?
  - √ O mais próximo que podemos chegar é quando todos os valores contidos em um intervalo de confiança apropriado de  $\theta$  são essencialmente os mesmo que  $\theta_0$  para todos os propósitos práticos
- Para todos os propósitos práticos
  - √ Decisão da área de estudo, não estatística



Estadística Econômica II - 2018 100



## Deteccão de Diferenças Quando São Importantes

- Planejamento de uma investigação:
  - √ Determinação do tamanho da amostra
- Teste com nível de significância fixo
  - √ Evidência contra  $H_0: \theta = \theta_0$  se o p-valor for menor que algum patamar (p-valor  $\leq 0,05$ )

Estadística Econômica II - 2018 101




$\theta_{\text{verd}}$ : verdadeiro valor do parâmetro


- Quando  $\theta_{\text{verd}} \neq \theta_0$ :
  - √ Espera-se obter um resultado significativo sempre que fosse coletada amostra de dados (impossível)
  - √ Desejável:
    - Probabilidade de obter resultado significativo fosse a mais alta possível sempre que  $\theta_{\text{verd}} \neq \theta_0$ .
    - P{erro tipo II} fosse a mais baixa possível

Estadística Econômica II - 2018 102






### Ideias




- Tamanho da amostra relativamente pequeno
  - √ Variabilidade amostral de uma estimativa é tipicamente grande
  - √ Pode não ser possível detectar diferença entre  $\theta_{\text{verd}}$  e  $\theta_0$  mesmo quando essa é grande
    - Amostras pequenas estão sujeitas a erros amostrais grandes
  - √ Pode ser bem pequena a probabilidade de se obter resultado significante

Estadística Económica II - 2018 103




### Tamanho da amostra é muito grande




- √ Variabilidade amostral de uma estimativa é tipicamente pequena
- √ É possível detectar com confiabilidade diferenças moderadas e grandes entre  $\theta_{\text{verd}}$  e  $\theta_0$ .
- √ Pode ser possível detectar com bastante confiabilidade diferenças razoavelmente pequenas entre  $\theta_{\text{verd}}$  e  $\theta_0$ .
- √ Probabilidade de obtenção de resultado significante pode ser muito alta

Estadística Económica II - 2018 104




### Processo para Determinação do Tamanho da Amostra




1. Determinação do menor valor de diferença ( $\delta$ ) a qual tenha importância prática ser detectada
  - √  $\delta = \theta_{\text{verd}} - \theta_0$
2. Suponha que a verdadeira diferença seja  $\delta$ , calcula-se o menor tamanho de amostra necessário de modo que a probabilidade de se obter um resultado significante seja alta.


Estadística Económica II - 2018 105




### Se um estudo não pode nem mesmo ser confiável para demonstrar uma diferença importante entre $\theta_{\text{verd}}$ e $\theta_0$ , o estudo provavelmente não vale a pena ser realizado.



Estadística Económica II - 2018 106




### Cálculo de Tamanho de Amostras para Testes de Significância




- São semelhantes, mas mais complicados que aqueles para intervalos de confiança
- Dependem de usar informação disponível sobre a variabilidade dos dados
  - √ Informação que tende a não ser confiável
- É difícil com frequência produzir um  $\delta$  razoável e de aceitação geral

Estadística Econômica II - 2018 107




### Estatística de Teste e o p-valor – Ideias Gerais




- p-valor:
  - √ Usado como medida da evidência contra  $H_0$
- Classe de problemas (até agora)
  - √  $H_0: \theta = \theta_0$
  - √ Distribuição amostral:

$$t_0 = \frac{\text{estimativa} - \text{valor admitido por hipótese}}{\text{erro padrão}} \sim t_{gl} \cdot \text{ou } N(0, 1)$$

Estadística Econômica II - 2018 108




### Classe de Problemas Mais Complexos




- Teste F
  - √  $H_0$ : médias de 3 ou mais grupos são iguais
- Teste  $\chi^2$ :
  - √  $H_0$ : Probabilidades que governam como indivíduos se distribuem em tabela de contagem

Estadística Econômica II - 2018 109





### Conceitos Ampliados



- Estatística de teste:
  - √ Medida da discrepância entre o que observamos nos dados e aquilo que esperaríamos observar se  $H_0$  fosse verdadeira
  - √ Nos exemplos anteriores
    - Medida de discrepância = distância entre a estimativa e o valor hipotético

Estadística Econômica II - 2018 110





**p-valor:**

- √ Probabilidade de que a variação amostral sozinha produza dados que sejam mais discrepantes que o conjunto dos dados observados, calculada supondo-se que a hipótese nula seja verdadeira
- √ Se a variação amostral, sob  $H_0$ , por si só produz dados que frequentemente estão ainda mais afastados do que os dados reais
  - Dados não fornecem evidência contra  $H_0$ .
- √ Se a variação amostral dificilmente produz dados ainda mais afastados do que os dados reais
  - Dados evidenciam contra  $H_0$

Estadística Econômica II - 2018 111



## Dados de Variável Contínua – Questões de uma Amostra



### Testes e Intervalos de Confiança para uma Média

- Teste t de uma hipótese sobre a média
  - √ Mostrará qualquer afastamento estatisticamente significativo de  $H_0$
- Intervalo de confiança da média
  - √ Informará o tamanho do afastamento
- Suposição para uso
  - √ Amostra proveniente de população normal
  - √ Em geral, para amostras grande essa suposição não é necessária

Estadística Econômica II - 2018 113



### Exemplo

Concentração de íon nitrato ( $\mu\text{g/ml}$ ) em amostra d'água

- √ 10 medidas de concentração do composto
  - Pequeno conjunto de dados
- √ Preocupação de que a concentração tivesse sido alterada com relação ao valor original
  - Valor desejado: 0,492

Estadística Econômica II - 2018 114

**Procedimento**

- Parâmetro de interesse:  
 $\sqrt{\mu}$ : concentração média verdadeira
- Hipóteses:  
 $\sqrt{H_0: \mu = 0,492}$   
 $\sqrt{H_1: \mu \neq 0,492}$

Estadística Econômica II - 2018 115

• Carregamento dos dados:

```
# Importação do conjunto de dados
concentracao <- scan(file = "composto.txt", sep=":", dec=",")
concentracao
[1] 0.513 0.524 0.529 0.481 0.492 0.499 0.518 0.490 0.494 0.501
```

• Estatísticas descritivas:

```
# Estatísticas descritivas
library(pastecs)
stat.desc(concentracao, basic = FALSE)
```

• Saída:

```
> stat.desc(concentracao, basic = FALSE)
  median      mean  SE.mean CI.mean.0.95      var  std.dev
0.500000000  0.504100000  0.005060632  0.011447946  0.000256100  0.016003125
  coef.var
0.031745933
```

Margem de erro

Estadística Econômica II - 2018 116

• Gráfico de pontos:

Gráfico de Pontos de Concentração

√ Não há nada no gráfico de pontos sugerindo que os dados não pudessem se originar de uma distribuição normal

Estadística Econômica II - 2018 117

• Gráfico de densidade

Gráfico de Densidade Concentração

√ Pequenas amostras podem produzir flutuações na estimativa da densidade

√ Não há indícios de não normalidade dos dados

Estadística Econômica II - 2018 118

**• Execução do teste – comando:**

```
# Criação do objeto com os resultados do teste t
h0 <- 0.492
concentracao.t <- t.test(concentracao, y = NULL, alternative = "two.sided",
                        mu = h0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
```

**• Resultado - saída:**

```
> concentracao.t
One Sample t-test

data: concentracao
t = 2.391, df = 9, p-value = 0.04049
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0.492
95 percent confidence interval:
 0.4926521 0.5155479
sample estimates:
mean of x
 0.5041
```

p-valor

119

Estatística Econômica II - 2018

```
> concentracao.t
One Sample t-test

data: concentracao
t = 2.391, df = 9, p-value = 0.04049
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0.492
95 percent confidence interval:
 0.4926521 0.5155479
sample estimates:
mean of x
 0.5041
```

**• Conclusão**

- √ Evidência, a um nível de 5%, de que a concentração sofreu alteração com relação a 0,492
  - p-valor pequeno

120

Estatística Econômica II - 2018

**• Intervalo de confiança para a média verdadeira ( $\mu$ ):**

√ Com 95% de confiança, a verdadeira concentração cai entre 0,493 e 0,516.

- Valor verdadeiro está muito próximo do limite inferior do intervalo

√ Alteração pode ter sido pequena

121

Estatística Econômica II - 2018

**Amostra Pequena – Consequências**

- Nunca saberemos se os dados são normais
- Testes e intervalos t são robustos a desvios da hipótese de normalidade
- Robusto:
  - √ Procedimento ainda “funciona” quando amostramos de distribuição diferente da normal

122

Estatística Econômica II - 2018

- Funcionar significa:
  - √ Os intervalos de confiança contêm o verdadeiro valor ( $\mu$ ) em aproximadamente 95% das amostras extraídas
  - √ Obtemos um resultado “significante ao nível de 5%” em aproximadamente 5% das vezes
- Testes e intervalos t não são robustos a não normalidade severa
  - √ Ex.: presença de outliers
  - √  $\bar{x}$  e  $s_X$  são muito sensíveis a valores atípicos

123

### Exemplo – Valor Atípico

- Maior observação deslocada para a direita
  - √ Trocado 0,529 por 0,581

124

- Gráfico de densidade

- √ Há indício de não normalidade dos dados
- √ Outlier produz aumento da densidade na cauda superior (atipicidade)

125

- Execução do teste – comando:

```
# Perturbação - introdução do valor atípico
atipico <- sort(composto)[-10] # insere outlier
atipico[10] <- 0.581
# Criação do objeto com os resultados do teste t
atipico.t <- t.test(atipico, y = NULL, alternative = "two.sided",
mu = h0, paired = FALSE, conf.level = 0.95)
```

- Resultado - saída:

```
> atipico.t
One Sample t-test
data: atipico
t = 1.9172, df = 9, p-value = 0.08745
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0.492
95 percent confidence interval:
 0.4888875 0.5297125
sample estimates:
mean of x
 0.5093
```

126

### Comparação entre os Resultados

Estadísticas amostrais	Original	Atípico
$\bar{x}$	0,5041	0,5093
$s_x$	0,0160	0,02853
$ep(\bar{x})$	0,00506	0,00902
$t_0$	2,39	1,92
p-valor	0,040	0,087
IC com 95%	[0,49265; 0,51555]	[0,48889; 0,52971]

- Valores amostrais
  - ✓ Média se deslocou para a direita
    - Se afastou de  $\mu_0$
  - ✓ Desvio padrão e erro padrão aumentaram
  - ✓ Distância  $t_0$  diminuiu
  - ✓ P-valor aumentou
  - ✓ IC mais impreciso
- A conclusão é diferente!

Estadística Econômica II - 2018 127

### Resultado de Testes e Intervalos t – Desvio de Normalidade

- Assimetria
  - ✓ Testes t bilaterais e intervalos t
    - Pode-se tolerar muita assimetria na distribuição, mesmo em amostras pequenas
  - ✓ Testes t unilaterais
    - Podem ser muito afetados por assimetria pronunciada (amostras menores que 40)
    - Quanto menor a amostra, menor o grau de assimetria que pode ser tolerado

Estadística Econômica II - 2018 128


- Curtose (caudas pesadas)
  - ✓ Processos aleatórios com a característica de produzirem valores extremos
  - ✓ Afeta bastante os procedimentos
  - ✓ Caudas pesadas são difíceis de serem detectadas em pequenas amostras
- Outliers
  - ✓ Em amostras pequenas, levam a não confiar nos resultado do teste t e nos resultados dos intervalos t

Estadística Econômica II - 2018 129


### Procedimentos t – Recomendações de Uso

- Procedimentos t são amplamente utilizados devido a sua robustez
- Não são aplicáveis quando:
  - ✓ Dados mostrarem estarem separados em clusters
  - ✓ Situações com mais de uma moda

Estadística Econômica II - 2018 137




### Procedimentos t – Cuidados




- Pequenas amostras ( $n < 15$ )
  - √ Não use procedimentos t na presença de valores atípicos
  - √ Não use procedimentos t unilaterais se dados forem mais que ligeiramente assimétricos

Estadística Econômica II - 2018 138




- Amostras moderadas ( $15 \leq n \leq 40$ ):
  - √ Não use procedimentos t se houver outliers
  - √ Não use os procedimentos t se os dados forem fortemente assimétricos
- Amostras grandes ( $n > 40$ )
  - √ Procedimentos t funcionam bem mesmo para dados nitidamente assimétricos
  - √ Podem ser afetados adversamente por valores atípicos grosseiros

Estadística Econômica II - 2018 139




### Lidando com Valores Atípicos



- Se parece haver valores atípicos nos dados
  - √ Verificar valores a partir das fontes originais
    - Observações podem ser erros
  - √ Se forem erros:
    - Se possível, devem ser corrigidos
    - Caso contrário, devem ser removidos do conjunto de dados


Estadística Econômica II - 2018 140




- Se houver dúvidas sobre a legitimidade das observações:
  - √ Verifique se a presença dos mesmos altera substancialmente as conclusões alcançadas a partir dos dados

Estadística Econômica II - 2018 141






## Enfrentando a Não Normalidade




- Usar métodos não paramétricos
  - √ Não fazem nenhuma hipótese a respeito da distribuição subjacente dos dados
- Usar métodos robustos
  - √ Procedimentos insensíveis à presença de valores atípicos
- Transformar os dados:
  - √ Pode dificultar a interpretação dos resultados

Estadística Econômica II - 2018 142

## Referências



## Bibliografia Recomendada



- AGRESTI, A.; FINLAY, B. *Métodos estatísticos para as ciências sociais*. Penso, 2012.
- MOORE, D. S.; MCCABE, G. P.; DUCKWORTH, W. M.; SLOVE, S. L. *A prática da estatística empresarial: como usar dados para tomar decisões*. LTC, 2006.
- WILD, J. W.; SEBER, G. A. F. *Encontros com o acaso: um primeiro curso de análise de dados e inferência*. LTC, 2004.

Estadística Econômica II - 2018 144