Lista nº 4 – Regras Gerais da Probabilidade e Variáveis Aleatórias

1. (Moore e McCabe – ex.: 4.37, pág. 183). Jogando-se uma vez um dado perfeitamente equilibrado, é razoável atribuir a probabilidade 1/6 a cada uma das seis faces. Qual é a probabilidade de obtermos um número do que 3? *Resp.: 1/3.*

2. (Moore e McCabe – ex.: 4.40, pág. 183). Escolhamos, aleatoriamente, uma residência americana e chamemos X o número de pessoas que moram ali. Não considerando as poucas casas com mais de sete moradores, a distribuição de probabilidade de X é:

Moradores	1	2	3	4	5	6	7
Probabilidade	0,25	0,32	0,17	0,15	0,07	0,03	0,01

   a. Verifique que se trata de uma legítima distribuição discreta de probabilidade e trace um histograma de probabilidade para exibi-la.
   b. Quanto é $\mathrm{P}\{X \geq 5\}$? *Resp.: 0,11.*
   c. Quanto é $\mathrm{P}\{X > 5\}$? *Resp.: 0,04.*
   d. Quanto é $\mathrm{P}\{2 < X \leq 4\}$? *Resp.: 0,32.*
   e. Quanto é $\mathrm{P}\{X \neq 1\}$? *Resp.: 0,75.*
   f. Escreva, em termos da variável aleatória X, o evento "uma casa escolhida aleatoriamente abriga mais de duas pessoas". Qual é a probabilidade desse evento? *Resp.: P(haver mais de duas pessoas num domicílio escolhido aleatoriamente)=P(X>2)=0,43*
   g. Encontre a quantidade média de moradores por residência (μ_X). *Resp.: 2,6.*

3. (Moore e McCabe – ex.: 4.42, pág. 183). Alguns jogos de azar se baseiam na jogada de dois dados. Cada dado tem seis faces, marcadas com os números de pontos 1, 2, ..., 6. Os dados usados nos cassinos são cuidadosamente equilibrados, de modo que cada face tem a mesma chance de aparecer. Quando são jogados dois dados, cada um dos 36 pares de faces tem a mesma chance de aparecer. O resultado que interessa ao jogador é a soma do número de pontos das duas faces que aparecem. Seja X essa variável aleatória.

   a. Escreva todos os 36 pares possíveis de faces.
   b. Se todos os pares têm a mesma probabilidade, qual deve ser a probabilidade de cada par? *Resp.: 1/36*
   c. Escreva o valor de X ao lado de cada par de faces e use esta informação, juntamente com o resultado de (b), para dar a distribuição de probabilidade de X. Trace um histograma de probabilidade para mostrar a distribuição.
   d. Um apostador em certo jogo ganha se aparece 7 ou 11 na próxima jogada de dois dados. Qual é a probabilidade dessa jogada? *Resp.: 2/9*
   e. Em vários jogos, os apostadores perdem se aparece um 7. Se ocorre qualquer outro resultado diferente de 7, ganham ou continuam jogando. Qual é a probabilidade de aparecer qualquer resultado diferente de 7? *Resp.: 5/6*

4. (Moore *et al.* – ex.: 5.92 e 5.94, pág. 296). Uma companhia de seguros dispõe das seguintes informações sobre os motoristas com idades entre os 16 e os 18

anos: 20% envolvem-se em acidentes a cada ano; 10% deles têm ótimo desempenho escolar; e, entre os envolvidos em acidentes, 5% têm ótimo desempenho escolar.

a. Considere que *A* seja o evento em que um jovem motorista tenha um ótimo desempenho escolar e que *C* seja o de que um jovem motorista se envolva em algum acidente este ano. Reformule as informações dadas em termos de probabilidades e de probabilidades condicionais para os eventos *A* e *C*. *Resp.: P(A)=0,10; P(C)=0,20;P(A|C)=0,05.*
b. Qual é a probabilidade de que um jovem motorista escolhido aleatoriamente tenha um ótimo desempenho escolar e se envolva em um acidente? *Resp.: 0,01.*
c. Encontre a percentagem de jovens com ótimo desempenho escolar que se envolveram em acidentes. (Comece expressando esse caso como uma probabilidade condicional.) *Resp.: 0,10.*

5. (Moore e McCabe – ex.: 4.106, pág. 205). Eis a distribuição da renda bruta ajustada *X* (em milhares de dólares) reportada em declarações de imposto de renda de determinado ano:

a. Qual é a probabilidade de uma declaração escolhida aleatoriamente acusar uma renda bruta ajustada de $50.000 ou mais? *Resp.: 0,19.*
b. Dado que uma declaração acusa uma renda de $50.000 no mínimo, qual é a probabilidade condicional de a renda ser, no mínimo, de $100.000? *Resp.: 0,26.*

6. (Moore e McCabe – ex.: 4.80, pág. 201). Escolha aleatoriamente uma mulher da população descrita pela Tabela 1. Com a informação constante nesta tabela, responda as seguintes perguntas:

a. Qual a probabilidade de a mulher escolhida ter, no mínimo, 65 anos de idade? *Resp.: 0,1834*
b. Qual é a probabilidade de a mulher escolhida ser casada, dado que ela tem, no mínimo 65 anos? *Resp.: 0,4253*
c. Quantas mulheres são casadas e têm, no mínimo, 65 anos de idade? Qual é a probabilidade de a mulher escolhida ser uma mulher casada com, no mínimo 65 anos de idade? *Resp.: 0,0780*
d. Comprove que as três probabilidades encontradas em (a), (b) e (c) verificam a regra da multiplicação.
e. A probabilidade de a mulher escolhida ser viúva. *Resp.: 0,113.*
f. A probabilidade condicional de a mulher escolhida ser viúva, dado que ela tem ao menos 65 anos de idade. *Resp.: 0,4279*
g. A probabilidade condicional de a mulher escolhida ser viúva, dado que ela tem entre 25 e 64 anos de idade. *Resp.: 0,0353.*
h. Os eventos "viúva" e "ao menos 65 anos de idade" são independentes? Como você pode saber? *Resp.: Não*
i. Qual é a probabilidade condicional de a mulher escolhida ter entre 18 e 24 anos, dado que ela é casada? *Resp.: 0,0571*
j. Havíamos encontrado, anteriormente, a probabilidade de P(casada | tem 18 a 24 anos de idade) = 0,241. Complete a sentença: 0,241 é a

proporção de mulheres que são ___________ entre mulheres que são ___________. *Resp.: ... casado ... idade 18 a 24.*

k. Em (i) determinamos P(idade de 18 a 24 | casada). Formule uma sentença na forma dada em (j) que descreva o significado desse resultado. As duas probabilidades condicionais dão-nos informações muito diferentes. *Resp.: 0,0517 é a proporção de mulheres que têm idade de 18 a 24 anos entre as mulheres que são casadas.*

Tabela 1 - Idade e estado civil de mulheres (em milhares de mulheres)

	Idade			
	18 a 24	25 a 64	65 ou mais	Total
Casada	3.406	48.116	7.767	58.929
Nunca foi casada	9.289	9.252	768	19.309
Viúva	19	2.425	8.636	11.080
Divorciada	260	8.916	1.091	10.267
Total	12.614	68.709	18.262	99.585

7. (Moore *et al.* – ex.: 5.89 e 5.90, pág. 295). Os testes com a enzima imunoensaio (EIA) são empregados no exame de amostras de sangue para detectar a presença ou não de anticorpos para o HIV, vírus causador da AIDS. O teste é bastante acurado, embora nem sempre esteja correto. Apresentamos a seguir as probabilidades aproximadas de resultados positivos e negativos desse teste quando o sangue testado tem ou não anticorpos para HIV.

	Resultado do teste	
	+	–
Anticorpos presentes	0,9985	0,0015
Anticorpos ausentes	0,0060	0,9940

Suponha que 1% de uma grande população esteja com anticorpos para o HIV no sangue.

a. Trace um diagrama de árvore para selecionar uma pessoa dessa população (os resultados possíveis são: anticorpos ausentes ou presentes) e para os resultados do exame do sangue (resultados: EIA positivo ou negativo).
b. Qual é a probabilidade de haver um indivíduo EIA positivo, quando essa pessoa é escolhida aleatoriamente a partir dessa população? *Resp.: 0,01592*
c. Qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha o anticorpo, dado que o resultado do teste foi positivo? *Resp.: 0,627*
d. Repita o item (c) para o caso em que são feitos exames com doadores de sangue, com o propósito de descobrir fatores de risco de contaminação por HIV, pelos quais se constata que somente 0,1% (0,001) dessa população está contaminada com o vírus HIV. *Resp.:*
e. Repita o item (c) para o caso em que são feitos exames com pacientes de uma clínica de recuperação para dependentes químicos constituem um grupo de alto risco, de modo que talvez 10% dessa população esteja com o HIV. *Resp.:*

Obs.: Esse exercício ilustra um importante fato de que ocorrem muitos falsos-positivos , se aquilo que se procura detectar é incomum na população.

8. (Moore e McCabe – ex.: 4.84, pág. 202). Eis uma tabela de dupla entrada de todos os suicídios cometidos em um ano recente, discriminados por sexo da vítima e pelo método usado.

	Homem	Mulher
Armas de fogo	15.802	2.367
Veneno	3.262	2.233
Enforcamento	3.822	856
Outros	1.571	571
Total	24.457	6.027

a. Qual é a probabilidade de uma vítima de suicídio, escolhida aleatoriamente, ser um homem? *Resp.: 0,8023.*
b. Qual é a probabilidade de a vítima de suicídio ter usado arma de fogo? *Resp,: 0,5960*
c. Qualk é a probabilidade condicional de um suicida ter usado arma de fogo, dado que era homem? Dado que era mulher? *Resp.: 0,6461 (homens) e 0,3927 (mulheres).*
d. Descreva em linguagem simples (sem empregar a palavra "probabilidade") o que os resultados em (b) dizem sobre a diferença entre homens e mulheres em relação ao suicídio. *Resp.: homens parecem escolher arma de fogo mais do que as mulheres.*

9. (Moore e McCabe – ex.: 4.25, pág. 176 e 4.110, pág. 205). Escolha, aleatoriamente, um operário de determinada população e enquadre sua ocupação em uma das seguintes categorias. Essas categorias são utilizadas nos dados governamentais sobre emprego.

A	Gerência e profissão liberal.
B	Suporte técnico e administrativo, vendas.
C	Prestações de serviço
D	Fabricação de aparelhos de precisão, artesanato e reparos.
E	Operação de máquinas, trabalho industrial.
F	Agricultura, silvicultura e pesca.

A tabela abaixo dá as probabilidades de um trabalhador escolhido aleatoriamente, se enquadrar em cada uma das 12 classes de sexo por ocupação.

Categoria	A	B	C	D	E	F
Homens	0,14	0,11	0,06	0,11	0,12	0,03
Mulheres	0,09	0,20	0,08	0,01	0,04	0,01

a. Verifique que se trata de uma atribuição legítima de probabilidades.
b. Qual é a probabilidade de o trabalhador ser do sexo feminino? *Resp.: 0,43*
c. Qual é a probabilidade de o trabalhador não esteja atuando nas áreas de agricultura, silvicultura ou de pesca? *Resp.: 0,96*

d. As categorias D e E incluem a maioria das ocupações próprias das oficinas e das fábricas. Qual é a probabilidade de que o trabalhador tenha uma dessas ocupações? *Resp.: 0,28*
e. Qual é a probabilidade de que o trabalhador não se ocupe de um emprego da categoria D nem da E? *Resp.: 0,72.*
f. Dado que o trabalhador escolhido detém um emprego gerencial (Categoria A), qual é a probabilidade condicional de ele ser mulher? *Resp.: 0,36.*
g. As categorias D e E incluem, na maior parte, empregos mecânicos e de fábrica. Qual é a probabilidade condicional de um trabalhador ser mulher, dado que tem um emprego em uma dessas categorias? *Resp.: 0,13*

10. (Moore *et al.* – ex.: 4.25, pág. 213). Escolha aleatoriamente um hectare de terra em uma determinada região. É de 0,92 a probabilidade de que ele se localize na zona agrícola e de 0,01 a probabilidade de que se localize em uma área florestal.
    a. Qual é a probabilidade de que o hectare escolhido não esteja na zona agrícola? *Resp.: 0,08.*
    b. Qual é a probabilidade de ele esteja na zona agrícola ou numa floresta? *Resp.: 0,93.*
    c. Qual é a probabilidade de que o hectare escolhido aleatoriamente nesta região esteja em algum lugar que não seja zona agrícola nem numa floresta? *Resp.: 0,07.*

11. (Moore e McCabe – ex.: 4.62, pág. 193). Em um experimento sobre o comportamento de crianças pequenas, cada uma é colocada em uma área com cinco brinquedos. A resposta que interessa é o número de brinquedos com que a criança se diverte. Experimentos passados com muitas crianças mostraram a distribuição de probabilidades do número X de brinquedos utilizados é a seguinte:

Número de brinquedos (x_i)	0	1	2	3	4	5
Probabilidade (p_i)	0,03	0,16	0,30	0,23	0,17	0,11

    a. Calcule a média μ_X. *Resp.: 2,68.*
    b. Calcule o desvio-padrão σ_X. *Resp.: 1,3106.*

12. (Moore e McCabe – ex.: 4.69, pág. 193). Em um processo de fabricação de artigos de vidro, os pés são selados por aquecimento em uma chama. A temperatura da chama varia um pouco. Eis a distribuição da temperatura X medida em graus Celsius:

Temperatura	540º	545º	550º	555º	560º
Probabilidade	0,10	0,25	0,30	0,25	0,10

    a. Ache a temperatura média μ_X e o desvio-padrão σ_X. *Resp.:* $\mu_X = 550º\ C$ e $\sigma_X = 5{,}701ºC$.
    b. A temperatura-alvo é 550ºC. Quais são a média e o desvio-padrão do número de graus fora do alvo (X – 50)? *Resp.: média = 0ºC e desvio-padrão = 5,701ºC*
    c. Um gerente deseja resultados em graus Fahrenheit. A conversão de X em Fahrenheit é dada por:

$$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

Quais são a média μ_X e o desvio-padrão σ_X da temperatura da chama na escala Fahrenheit? *Resp.:* $\mu_Y = 1.022º\ F$ e $\sigma_Y = 10{,}26ºF$.

13. (Moore e McCabe – ex.: 4.100, pág. 204). Uma dá aos seus clientes cupons com os quais podem ganhar um prêmio, quando confrontados com outros cupons. No verso do cupom constam as seguintes probabilidades de ganhar diversas importâncias, se um cliente visita a mercearia 10 vezes:

Quantia	\$1000	\$200	\$50	\$10
Probabilidade	1/10.000	1/1.000	1/100	1/20

   a. Qual é a probabilidade de não ganhar qualquer coisa? *Resp.: 0,939.*
   b. Qual é a quantia média ganha? *Resp.: 1,3*
   c. Qual é o desvio padrão da quantia ganha? *Resp.: 12,91*

14. (Moore e McCabe – ex.: 4.104, pág. 204). O retorno real de um investimento é sua taxa de aumento corrigida dos efeitos da inflação. Você acha que o retorno anual real X de uma carteira de ações variará no futuro com média $\mu_X = 0{,}11$ e desvio-padrão $\sigma_X = 0{,}28$. (Isto é, espera-se que as ações deem um retorno médio de 11% no futuro, mas com grande variação de ano para ano.) Você acha ainda, que o retorno anual Y dos títulos do tesouro variará com média $\mu_Y = 0{,}02$ e desvio-padrão $\sigma_Y = 0{,}05$. Mesmo que não seja realista, suponha que os retornos das ações e dos títulos do Tesouro variem independentemente.

   a. Se você aplica metade de suas economias em ações e metade em títulos do Tesouro, seu retorno global será $Z = 0{,}5X + 0{,}5Y$. Calcule μ_Z e σ_Z. *Resp.:* $\mu_Z = 0{,}065$ e $\sigma_Z = 0{,}142$
   b. Você decide assumir um risco maior (maior variação no retorno) em troca de um retorno médio mais alto. Escolha uma alocação de seus recursos entre ações e títulos do Tesouro que atenda àquele objetivo. Calcule a média e o desvio padrão do retorno total. (Se você aplica uma proporção α de seus recursos em ações, o retorno total será dado por $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$.). *Resp.: usar* $\alpha > 0{,}5$ *(menor risco:* $\alpha = 0$*; maior risco:* $\alpha = 1$*).*

15. (Sharpe *et al.* – ex.: 28, pág. 712). Um corretor de imóveis comprou três casas de dois quartos num mercado em crise por um preço combinado de \$71.000. Ele espera que os custos de limpeza e reparos em cada casa tenham uma média de \$3.700, com um desvio padrão de \$1.450. Quando eles vende-las, após subtrair as taxas e outros custos de fechamento, ele espera conseguir uma média de \$39.000 por casa, com desvio padrão de \$1.100.

   a. Defina suas variáveis aleatórias e use-as para criar uma variável aleatória para a renda líquida do corretor de imóveis.
   b. Encontre a média (valor esperado) da renda líquida.
   c. Encontre o desvio padrão da renda líquida.
   d. Você deve assumir independência para os reparos e preços de vendas das casas. Explique.

Fontes:

MOORE, D. S.; MCCABE, G. P. *Introdução à prática da estatística*. 3ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002

MOORE, D. S.; MCCABE, G. P; DUCKWORTH, W. M.; SCLOVE, S. L. *A Prática da estatística empresarial: como usar dados para tomar decisões*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

SHARPE, N. R.; DE VEAUX, R. D.; VELLEMAN, P. F. Estatística aplicada: administração, economia e negócios. Porto Alegre: Bookman, 2011.