Lista nº 6 – Combinação Linear de Variáveis Aleatórias

1. No processo de produção de certo componente industrial, sua característica de qualidade crítica (diâmetro de um eixo, por exemplo) pode ser considerada uma variável normalmente distribuída com média $\mu = 610\ mm$ e desvio padrão $\sigma = 10\ mm$. A especificação (faixa de tolerância) do fabricante para a característica de qualidade crítica desse componente industrial é $600 \pm 20\ mm$, ou seja, o componente produzido fora deste intervalo é considerado não conforme.
   a. Calcule a probabilidade de que a característica de qualidade crítica de um componente industrial escolhido aleatoriamente esteja dentro da especificação.
   b. Após ajustes no processo de produção, a característica de qualidade crítica do componente industrial pode ser considerada uma variável normal, com média $\mu = 600\ mm$ e o mesmo desvio padrão $\sigma = 10\ mm$. Neste caso qual é a probabilidade de que um componente industrial escolhido ao acaso esteja fora da especificação?
   c. Apesar dos ajustes, o fabricante não ficou satisfeito com o percentual de componentes com a característica de qualidade crítica fora da especificação, calculado em (b). O que deve o fabricante fazer para obter um percentual de não conformidade não maior que 2%?

2. Um lote com uma quantidade muito grande de componentes tem sua venda totalmente rejeitada ou aceita, dependendo do resultado do seguinte Plano de Amostragem: quinze componentes desse lote são escolhidos ao acaso e inspecionados. Se um ou mais desses componentes forem defeituosos, o lote será rejeitado; caso contrário, será aceito. A especificação de qualidade de venda desses componentes exige que no mínimo 95% dos componentes do lote estejam em boas condições. Importante: o lote é considerado grande o suficiente para garantir independência e mesma probabilidade de seleção de um componente defeituoso (ou bom). Pede-se:
   a. Qual é a probabilidade de se cometer o erro de impedir a venda de um lote em boas condições (mínimo de 95% dos componentes em boas condições).
   b. Qual é a probabilidade de se cometer o erro de autorizar a venda de um lote no qual apenas 90% dos componentes estão em bom estado?
   c. Elabore um novo plano amostral de maneira a manter as probabilidades de ambos os erros em 5%. *Resp.: (uma das possíveis): n= 298; Ac=21 (será a melhor delas?).*

3. (Wild *et al.* – exemplo das pág. 155 e 156.) Considere um conjunto de engrenagens do tipo daqueles utilizados na indústria automobilística. A preocupação em questão é com a chamada altura da pilha, que é simplesmente o comprimento combinado das partes montadas ou, equivalentemente, a soma da espessura de cada um dos componentes envolvidos. Examinando apenas o primeiro componente, percebe-se que as engrenagens internas de transmissão final não são todas iguais, mas infelizmente têm espessuras diferentes. Essas espessuras têm uma distribuição e a espessura de cada novo componente saído da linha produção é como uma observação aleatória dessa distribuição. O mesmo é verdadeiro para cada um dos outros componentes que formam o

conjunto de engrenagem. Todas as suas espessuras variam. Consequentemente, quando os componentes são encaixados, a altura da pilha (a soma das espessuras de todos seus componentes) também varia de conjunto para conjunto. Agora esses conjuntos têm de se ajustar num cárter. Se fizermos o cárter grande o suficiente para acomodar os conjuntos maiores, os menores ficarão folgados demais no cárter, levando a conjuntos de eixos que não funcionariam tão bem como deveriam e que talvez tivessem tempo de vida mais curto. Isto custa cara ao fabricante devido aos custos mais elevados de garantia, resultando em conjuntos com reputação de baixa qualidade, o que por sua vez leva à diminuição de vendas. Se, por outro lado, fizermos o cárter menor, alguns dos conjuntos não caberão no cárter e terão que ser refugados. Isso também custa caro. E, além disso, até mesmo as dimensões dos cárteres são variáveis.

Para exemplificar, empilharemos apenas duas engrenagens. Suponha que as espessuras das engrenagens do tipo A, X_1, são normalmente distribuídas com média $\mu_1 = 25\, mm$ e desvio padrão $\sigma_1 = 2\, mm$, enquanto que as espessuras das engrenagens do tipo B, X_2, são normalmente distribuídas com média $\mu_2 = 50\, mm$ e desvio padrão $\sigma_2 = 2\, mm$, independentemente do valor de X_1 (considere, por exemplo, que são fornecidas por fabricantes diferentes). A variabilidade das espessuras das engrenagens (ou seja, foram tomados desvios padrão maiores do que seriam na realidade), de modo que os efeitos desejados fossem suficientemente grandes para aparecer nas figuras

a. Observe a simulação da fabricação de 10.000 conjuntos de engrenagens. Com que se parece a distribuição da espessura total da pilha?
b. Determine a média da espessura total da pilha.
c. Determine o desvio padrão da espessura total da pilha. Compare com o desvio padrão da espessura de cada engrenagem e comente.
d. Considere que a faixa de tolerância para a altura total da pilha seja $75 \pm 8\, mm$. Qual é a fração de conjuntos não conformes produzidos?

4. (Wild *et al.* – exemplo das páginas 156 e 158.) Consideremos agora o efeito de ajustar um objeto dentro de outro. O tema continua sendo da indústria automobilística, mas desta vez são usados pistões de motos dentro de cilindros. São medidos os diâmetros do cilindro, X_1, e o diâmetro do pistão, X_2. A diferença $D = X_1 - X_2$ é a folga entre o cilindro e o pistão. Se D for negativo, o pistão será grande demais e não se encaixará. Considere um diâmetro médio de 100 mm para os cilindros, com um desvio padrão de 4 mm, e uma média de 70 mm para os pistões com um desvio padrão de 4 mm. Considere também que os diâmetros do cilindro e do pistão são variáveis independentes entre si. A variabilidade foi mais uma vez grosseiramente exagerada (e o valor médio de X_2 foi reduzido) para mostrar claramente os efeitos.

a. Foi simulada uma rodada de produção de cada um dos 10.000 componentes. Com que se parece a distribuição da folga entre cilindro e pistão?
b. Determine o valor da folga média entre cilindro e pistão.
c. Determine o desvio padrão da folga entre cilindro e pistão. Compare com o desvio padrão dos diâmetros do cilindro e do pistão e comente.
d. Suponha que estão sendo fabricados peças de forma que os diâmetros de pistões do motor sejam aproximadamente normalmente distribuídos em

torno de uma média de 30,00 mm com um desvio padrão 0,05 mm e os diâmetros de cilindros sejam aproximadamente normalmente distribuídos em torno de uma média de 30,10 mm, com um desvio padrão de 0,02 mm. Qual é a probabilidade de um pistão escolhido ao acaso se ajustar dentro de um cilindro selecionado aleatoriamente?

5. (Wild *et al.* – exemplo 6.4.3, pág. 160.) Os comerciantes muitas vezes decompõem estimativas de custos de um serviço em custos de mão-de-obra e de peças. Suponha que você estimou o tempo T de execução de um determinado serviço como sendo de aproximadamente 40 horas, mas representou sua incerteza sobre sua estimativa imaginando que o tempo de execução é aproximadamente normalmente distribuído em torno de uma média de 40 horas com um desvio padrão de 8 horas. Analogamente, sua estimativa do custo de peças M é aproximadamente normalmente distribuído, com uma média de $1.000 e um desvio padrão de $100. Há várias outras pessoas competindo por esse serviço, de modo que sua cotação de preço não pode ser alta demais. Mas você quer $30 por hora. Para ter uma segurança de 80% de cobrir os custos, qual deve ser a cotação de preço de seu serviço?

6. (Moore et al. – exemplo páginas 225 a 233.) A taxa de retorno de um investimento após um certo período é a mudança percentual de seu preço durante esse mesmo período mais os possíveis dividendos que ele proporcione. Por exemplo, as ações da companhia XPTO estavam valendo $14,875 cada, no início de janeiro de 2018 e $21,625 no final daquele mês. A XPTO não paga dividendos, de modo que a taxa de retorno de suas ações foi de:

$$\frac{\text{variação no preço}}{\text{preço inicial}} = \frac{21,625 - 14,875}{14,875} = 0,45, \text{ ou } 45\%$$

Os investidores gostam de retornos altos, mas também desejam segurança. Frequentemente, os preços dessas ações têm duplicado ou caído pela metade em poucos meses. A variabilidade dos retornos, chamada de *volatilidade*, é uma medida de risco de um investimento. Uma ação bastante volátil, que pode subir ou descer muito, é mais arriscada que uma obrigação do Tesouro que tem um rendimento bem previsível.

Um portfolio é uma coleção de investimentos feitos por um indivíduo ou por uma instituição. A análise de portfólio começa estudando de que modo o risco e o retorno do portfolio são determinados pelos riscos e retornos dos investimentos individuais que ele contém. O retorno de um investimento, ao longo de um certo tempo, é uma variável aleatória. Estamos interessados no retorno médio e medimos a volatilidade por meio dos desvios padrão desses retornos.

Seja, por exemplo, um portfolio composto de dois tipos de investimentos. Foram destinados 20% de suas aplicações a obrigações do Tesouro e 80% a um “fundo de índice”, representando todas as ações ordinárias negociadas em bolsa. Sejam as variáveis aleatórias: X, associada à taxa de retorno anual das obrigações do Tesouro e Y, associada ao retorno anual das ações. Valores históricos indicam que o retorno médio anual das obrigações do Tesouro é $\mu_X = 5{,}2\%$ e das ações é $\mu_Y = 13{,}3\%$. As ações possuem retornos superiores à obrigações do Tesouro, mas, por outro lado, são muito mais voláteis. Salienta-se que um investimento mais volátil deve oferecer retornos maiores para compensar os investidores pelos riscos maiores. Verificou-se que, considerados os últimos 50 anos, a volatilidade das obrigações do Tesouro é $\sigma_X = 2{,}9\%$ e das ações ordinárias, $\mu_Y = 17{,}0\%$, com uma correlação $\rho = -0{,}1$.

a. Determine o retorno médio desse portfólio.
b. Determine o risco (volatilidade) desse portfolio.

Fontes:

MOORE, D. S.; MCCABE, G. P; DUCKWORTH, W. M.; SCLOVE, S. L. *A Prática da estatística empresarial: como usar dados para tomar decisões*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

WILD, C. J.; SEBER, G. A. *Encontros com o acaso: um primeiro curso de análise de dados e inferência*. Rio de Janeiro: LTC, 2000.