A MATEMÁTICA DA ESCOLHA SOCIAL:

Eleições Majoritárias

e

Divisões Proporcionais

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon

Prof. Antônio César Jabuinski

APRESENTAÇÃO

O voto é uma grande conquista da humanidade. O sistema democrático é, sem dúvida, o que mais respeita esta conquista, já que tem como base a relação “a cada eleitor corresponde um voto”.

As eleições não são uma experiência recente no Brasil. O livre exercício do voto surgiu em terras brasileiras com os primeiros núcleos de povoadores, logo depois da chegada dos colonizadores portugueses, os quais mal pisavam a nova terra descoberta, passavam logo a realizar votações para eleger os que iriam governar as vilas e cidades que fundavam.

Em 1881, a Lei Saraiva introduziu as eleições diretas. Porém, isso não significou democracia, já que nem todos podiam votar, o voto era concedido somente a uma parcela da sociedade brasileira. A democratização do voto só acontece no século XX, mais precisamente na década de 50, e acaba sendo suprimida durante o período militar, voltando somente a existir a partir da década de 90, quando é dado ao povo novamente o poder de decidir.

Atualmente o Brasil é um país democrático, assim como a grande maioria dos países, onde podemos decidir através do voto direto quem serão nossos representantes. Mas será que democracia e justiça caminham juntas? Será que a maneira como escolhemos estes representantes é justa?

O nosso intuito é justamente tentar responder tais questões, através da exploração de alguns processos democráticos utilizados nas escolhas sociais, tanto a nível majoritário (escolha de prefeitos, governadores, presidente), quanto a nível proporcional (escolha de vereadores, deputados estaduais e federais).

Para isso, se torna necessário dividirmos nosso trabalho em duas partes. A primeira tratando dos processos de escolha majoritária, através da apresentação de seis métodos de escolha, que são:

- O Método Plural ou Turno Único, aquele utilizado no Brasil para eleições de prefeitos em cidade que possuam até 200.000 eleitores;
- O Método dos Dois Turnos, também muito utilizado no Brasil, para escolha de prefeitos de cidades com mais de 200.000 eleitores, além de governadores e presidente;
- O Método da Pluralidade com Eliminação, também conhecido como Método Olímpico, utilizado principalmente à determinação da cidade sede dos jogos olímpicos;
- O Método Olímpico Modificado, uma variante do método olímpico;
- O Método de Borda, desenvolvido por Jean Charles Borda (1733 – 1799);
- O Método das Comparações Dois a Dois.

Além disso, serão apresentados e aplicados aos métodos citados acima, quatro critérios, que foram utilizados pelo economista americano, ganhador do Prêmio Nobel de Economia em 1972, Kenneth Joseph Arrow, para fundamentar a existência do Teorema da Impossibilidade, quanto aos processos de escolha majoritários. Esses critérios são: Maioria Absoluta, Monotonia, Independência das Alternativas Irrelevantes e o Condorcet, que leva este nome por ter sido estabelecido por Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, conhecido como Marquês de Condorcet (1743 – 1794).

A segunda parte é destinada aos processos de divisão proporcional. Parecido com o que fizemos para os processos majoritários, também serão apresentados seis métodos de divisão proporcional, que são:

- O Método de Hamilton, que leva este nome por ter sido desenvolvido por Alexander Hamilton (1757 – 1804);
- O Método de Jefferson, desenvolvido pelo ex-presidente dos Estados Unidos Thomas Jefferson (1743 – 1826);
- O Método de Adams, criado por John Quincy Adams (1767 – 1848), que também foi presidente dos Estados Unidos;
- O Método de Webster, que tem o nome de seu criador Daniel Webster (1782 – 1852);
- O Método de Huntington-Hill, desenvolvido por volta de 1911 por Joseph A. Hill e Edward V. Huntington (1874 – 1952), método que atualmente é utilizado pelos Estados Unidos na composição do Congresso Americano;
- O Método utilizado nas eleições proporcionais brasileiras para escolha de vereadores, deputados estaduais e federais.

Serão mostrados também quatro problemas ligados a divisão proporcional (Regra da Quota, Paradoxo do Alabama, Paradoxo da População e Paradoxo dos Novos Estados), os quais devem ser superados por um método de divisão para que o mesmo possa ser considerado justo, além disso, verificaremos os métodos de divisão proporcional acima citados, quanto a incidência desses problemas nos mesmos. Por fim, enunciaremos o Teorema de Balinski e Young, descoberto por Michel Balinski e H. Peyton Young em 1980, sobre os processos de divisão proporcional.

Depois de apresentados todos os métodos, critérios, problemas e teoremas sobre o tema proposto, iremos chegar a uma conclusão surpreendente e interessante, que responderá o nosso questionamento feito anteriormente.

Mas afinal, o que tem a ver Matemática e escolha social? Bem, o assunto realmente parece não ter conexão com a Matemática, mas isso é somente aparência, já que este é um dos poucos momentos em que a Matemática e a Política se relacionam. A Matemática nos ajuda a compreender como funcionam os processos de escolha social, bem como tenta mostrar que estes métodos nem sempre são perfeitos.

1 ELEIÇÕES MAJORITÁRIAS

Mas afinal o que são eleições majoritárias? Eleições majoritárias são destinadas à escolha de um único vencedor entre os candidatos envolvidos em uma disputa. Podemos tomar como exemplo, as eleições que determinam a escolha do prefeito de uma determinada cidade, do governador em um estado ou então do presidente da república de um país.

Para essas escolhas existem maneiras de se determinar o vencedor numa eleição, aqui veremos alguns métodos que são utilizados para isso. Além disso, nos pleitos eleitorais, são empregadas cédulas, destinadas a registrar as preferências dos eleitores entre os candidatos.

1.1 Cédulas

Quando falamos em cédula numa eleição, logo nos vem em mente aquele tipo de cédula onde escolhemos um candidato entre todos, e assinalamos junto ao seu nome um xis, fazendo assim uma escolha simples entre as possibilidades existentes, desconsiderando as demais opções.

Mas aqui, nos concentraremos no tipo de cédula que exige que os eleitores classifiquem todos os candidatos e não permite que os mesmos sejam indiferentes entre os concorrentes, ou seja, cada eleitor deverá ordenar os competidores, de melhor a pior, segundo sua opinião, tendo que incluir todos os candidatos nesta classificação.

Para nós pode até parecer estranho utilizar este tipo de cédula, mas existem países que as utilizam na escolha de seus representantes para o poder executivo, ou seja, prefeitos, governadores, presidentes, etc; como exemplo podemos citar a Irlanda[1], país que faz uso desse tipo de cédula.

Vejamos um exemplo de como seria essa cédula.

CÉDULA DE PREFERÊNCIAS
Deve preencher cada espaço indicando, por ordem da sua preferência.
1ª opção: ________________________________ 2ª opção: ________________________________ 3ª opção: ________________________________ 4ª opção: ________________________________

Figura 1: Modelo de Cédula de Preferências

A utilização dessa cédula pode muitas vezes se tornar complicada, especialmente quando existem muitos candidatos.

Este tipo de cédula, como tudo, possui vantagens e desvantagens. A principal vantagem a ser citada é o fato de que, para a determinação do vencedor de uma disputa, indiferente do método que se use, há somente um ato eleitoral, ou seja, os eleitores irão às urnas uma única vez, o que pode colaborar com a redução dos custos do pleito eleitoral. Mas também existem desvantagens, entre elas podemos citar a dificuldade que poderá vir a ser encontrada pelos eleitores em ordenar todos os candidatos quando há um grande número de concorrentes. Podemos tomar como exemplo o caso da última eleição para presidente da França[1], onde existiam 16 candidatos. Imaginem classificar por ordem de preferência todos os 16 concorrentes em uma cédula. Isso seria muito complicado. Certo é que cada eleitor saberia quem

[1] ASSUNÇÃO, João Borges. O plebiscito Francês. **Expresso Online**. 11 mai. 2002. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/MACS/Textos_Macs/voto_preferencia.pdf> Acesso em: 29 jun. 2003.

colocar como primeira opção e quem colocar na última posição. Os outros 14 candidatos acabariam sendo distribuídos na cédula de forma aleatória, o que poderia gerar um problema, já que os eleitores poderiam eleger um candidato de forma inconsciente, dependendo do método empregado.

Exemplo M1: Numa escola foi feita uma consulta aos alunos, para saber qual a cor preferida por eles para a pintura da nova biblioteca. As cores sugeridas pela direção foram: azul, amarelo ou verde. Os alunos receberam uma cédula para ordenarem a preferência entre essas cores, e a cor mais votada como primeira opção seria a utilizada na biblioteca. As possíveis maneiras de ordenar essas cores, conforme a preferência de cada um, é apresentada no quadro 1.

1ª opção	Azul	Azul	Amarelo	Amarelo	Verde	Verde
2ª opção	Amarelo	Verde	Azul	Verde	Azul	Amarelo
3ª opção	Verde	Amarelo	Verde	Azul	Amarelo	Azul

Quadro 1: Possibilidades de distribuir os concorrentes do exemplo M1

Depois de realizada a eleição, os votos dos 2.000 alunos desta escola foram contados e o resultado é apresentado na tabela 1 abaixo.

Tabela 1
Distribuição das preferências dos alunos, na eleição do exemplo M1

Opção	Número de votos					
	278	321	475	0	525	401
1ª opção	Azul	Azul	Amarelo	Amarelo	Verde	Verde
2ª opção	Amarelo	Verde	Azul	Verde	Azul	Amarelo
3ª opção	Verde	Amarelo	Verde	Azul	Amarelo	Azul

Observando o resultado da votação, percebemos que a opção que tem a cor amarela como primeira escolha, verde como segunda e azul como terceira, não recebeu voto algum dos alunos, já o restante das opções possíveis foram indicadas pelos mesmos. Tomando o critério enunciado pela direção, temos como vencedora a cor VERDE, com 926 votos como primeira opção, sendo essa então a cor com que será pintada a nova biblioteca da escola.

Vimos no exemplo acima que existem seis maneiras possíveis de ordenarmos as três cores. Se analisarmos melhor o que acontece com as possibilidades existentes para distribuir os candidatos numa cédula, perceberemos que o número total de maneiras é igual à $n!$, onde n representa o número de candidatos envolvidos na disputa.

1.2 Suposições Iniciais

Para que possamos dar início ao nosso trabalho, é essencial que determinemos algumas condições que serão úteis no transcorrer deste.

- Vamos supor que há mais de dois candidatos e que cada eleitor tem um único voto.
- Cada eleitor tem uma escala definida de preferências pelos candidatos. Supondo, que um eleitor tenha que escolher entre dois candidatos X e Y, qual é o melhor e qual é o pior, entre eles. Para esta escolha existem duas maneiras de se fazer isso, ou o eleitor prefere X à Y ou prefere Y à X, uma vez tomada essa decisão, ele a mantém até o final do pleito. Dessa forma, o eleitor não pode se dizer indiferente à escolha de preferência entre os candidatos, sempre terá que manifestar sua opinião entre os concorrentes.
- A preferência é transitiva. Supondo agora que, um eleitor tenha decidido entre três candidatos X, Y e Z que: X é melhor que Y e que Y é melhor que Z; então pela transitividade, podemos dizer que o eleitor prefere X à Z.

- A desistência de um candidato não altera a ordem de preferência dos eleitores. Dessa forma, se um eleitor acha que o candidato X é melhor do que o candidato Y e esse por sua vez melhor do que o candidato Z, então, por exemplo, se Y acabar desistindo de concorrer, retirando sua candidatura, o eleitor ainda preferirá X à Z.

1.3 Métodos de Escolha

O método de escolha é a maneira como será decidido quem vence uma disputa, ou seja, dada uma certa eleição, para se saber quem será o vencedor, devemos fazer uso de determinadas regras pré-estabelecidas (método de escolha).

Para que possamos trabalhar com os métodos que serão vistos a seguir, teremos que utilizar o modelo de cédula visto anteriormente, onde os candidatos são classificados na cédula na ordem de preferência dos eleitores.

Apresentaremos um exemplo, de uma situação de disputa majoritária, o qual será trabalhado nos diferentes métodos que veremos a seguir. Com isso, utilizando os diferentes métodos de escolha, veremos qual será o resultado dessa disputa.

Exemplo M2: A associação de moradores do bairro Alegre, na cidade de Felicidade, promoveu a eleição de sua nova diretoria. Concorrem nessa disputa três chapas, das quais os moradores devem ordenar conforme suas preferências, utilizando o modelo de cédula visto anteriormente. Votaram 191 moradores e suas preferência estão expostas na tabela 2 abaixo.

Tabela 2
Resultado da votação da eleição da associação do bairro Alegre

Colocação	Número de votos				
	61	46	22	19	43
Primeiro	Chapa 1	Chapa 2	Chapa 2	Chapa 3	Chapa 3
Segundo	Chapa 3	Chapa 3	Chapa 1	Chapa 1	Chapa 2
Terceiro	Chapa 2	Chapa 1	Chapa 3	Chapa 2	Chapa 1

1.3.1 Método Plural (Turno Único)

Neste método, o vencedor é aquele candidato com maior preferência para o primeiro lugar, ou seja, o vencedor poderá ser um candidato que tenha conseguido somente um voto de vantagem em relação ao candidato que conquistou o segundo lugar na disputa.

No Brasil, este método é empregado na escolha de prefeitos em cidades onde existam até 200.000 eleitores, ou seja, só há a possibilidade de segundo turno num município com 200.001 eleitores ou mais.

> Apesar de seu uso difundido, o método de pluralidade tem muitas falhas e normalmente é um método pobre para escolher o vencedor de uma eleição quando houver mais de dois candidatos. A fraqueza principal é que não leva em conta as preferências do eleitor diferente da primeira escolha, e fazendo assim pode conduzir a alguns resultados de eleição muito ruins (TANNENBAUM, 2004, p.7).

Utilizando este método, vamos determinar o vencedor do exemplo M2. Para isso, será necessária somente a votação de cada candidato para a primeira posição, desta forma apresentamos abaixo, na tabela 3, somente as votações para a primeira posição, desprezando as demais colocações.

Tabela 3
Resultado da votação para a primeira colocação, da eleição do exemplo M2

Colocação	Número de votos				
	61	46	22	19	43
Primeiro	Chapa 1	Chapa 2	Chapa 2	Chapa 3	Chapa 3

Observando a tabela acima, vemos que a Chapa 1 obteve 61 votos para a primeira posição e a chapa 2 obteve 68 votos para a mesma posição, enquanto que a chapa 3 obteve 62 votos para a primeira colocação. Desta forma, através do método plural, a chapa que assumirá a direção da associação de moradores do bairro Alegre será a chapa 2.

Exercício: No município de Cacarecos será eleito o novo prefeito. Neste município há 1300 eleitores habilitados a votar. Os candidatos são: Adriano (atual prefeito), Eduardo (dono da padaria), João (agricultor) e Maria (professora).

Depois de encerrada a votação, os votos foram contados e as preferências dos eleitores foram expressas na tabela 4, a qual se encontra a seguir.

Considerando estas informações, indique o candidato vencedor desta disputa, através do Método Plural.

Tabela 4
Resultado da votação da eleição para prefeitura de Cacarecos

Colocação	Número de votos				
	317	218	207	224	334
Primeiro	Adriano	Maria	Maria	Eduardo	João
Segundo	Eduardo	João	Eduardo	João	Eduardo
Terceiro	João	Eduardo	Adriano	Maria	Adriano
Quarto	Maria	Adriano	João	Adriano	Maria

1.3.2 Método dos Dois Turnos

Neste método, se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta (pelo menos 50% dos votos + 1 voto), é feita uma segunda eleição, na qual concorrem somente os dois candidatos mais votados no primeiro turno.

O diferencial deste método para o anterior está na obrigatoriedade de se atingir a maioria absoluta para que um candidato torne-se vencedor no primeiro turno. Caso isso não ocorra, teremos uma nova disputa, somente entre os dois candidatos mais votados para a primeira posição, onde o preferido dos eleitores será o vencedor.

Como está sendo utilizada a cédula onde os eleitores ordenam os candidatos por ordem de preferência, utilizaremos os mesmos dados da eleição que indicou os dois candidatos para o segundo turno, só que agora iremos somente nos concentrar nos votos dos dois candidatos em questão, para isso faremos uso das suposições que vimos no início dos estudos sobre as eleições majoritárias, principalmente da transitividade.

Vamos retirar os candidatos eliminados da disputa e redistribuir as preferências entre os dois que disputarão o segundo turno, a fim de determinarmos o vencedor da eleição.

Este método, assim como o anterior, também é bastante empregado no Brasil, só que em cidade onde o número de leitores é superior a 200.000, no caso de eleições para prefeito, e nas disputas para governo de um estado e para presidência da república.

Utilizando este método, vamos determinar o vencedor do exemplo M2. Na tabela 2, observamos que nenhuma das chapas que concorrem nessa eleição conseguiu atingir a maioria absoluta para a primeira colocação, sendo assim as duas chapas mais votadas para a primeira colocação irão para o segundo turno dessa disputa, ou seja, as chapas 2 e 3 . Com isso, iremos eliminar a chapa 1 da disputa do segundo turno, além de redistribuir os candidatos que disputam o segundo turno, segundo a preferência dos eleitores, a fim de determinarmos o vencedor.

Tabela 5
Votação para o segundo turno da eleição do exemplo M2

Colocação	Número de votos				
	61	46	22	19	43
Primeiro	Chapa 3	Chapa 2	Chapa 2	Chapa 3	Chapa 3
Segundo	Chapa 2	Chapa 3	Chapa 3	Chapa 2	Chapa 2

Segundo a tabela acima, considerando a preferência inicial dos eleitores, a chapa 3 é preferida por 123 eleitores, enquanto a chapa 2 tem a preferência de 68 eleitores. Dessa forma, a chapa 3 é eleita para dirigir a associação de moradores do bairro Alegre.

Exercício: No estado de Norvenezia deu-se a eleição para escolha do novo governador. Neste estado, dos 815.169 eleitores, contabilizou-se 798.127 votos válidos, os quais foram distribuídos entre os candidatos Cláudio, Zeneide, Márcio, Douglas e Gina.

Os dados referentes a esta votação, são apresentados através da tabela 6. Para facilitar a disposição dos dados na tabela, os candidatos serão reconhecidos pela letra inicial de seus nomes, ou seja, C=Cláudio, Z=Zeneide, M=Márcio, D=Douglas e G=Gina.

Considerando estas informações, indique o candidato vencedor desta disputa, através do Método dos Dois Turnos.

Tabela 6
Resultado da votação da eleição do governador de Norvenezia

Colocação	Número de votos							
	82.562	71.111	93.987	114.155	88.051	51.131	152.365	144.765
Primeiro	C	G	D	Z	M	C	G	M
Segundo	Z	Z	M	M	G	G	D	D
Terceiro	M	C	C	D	C	M	C	Z
Quarto	D	M	G	G	Z	Z	Z	G
Quinto	G	D	Z	C	D	D	M	C

Segundo turno

Colocação	Número de votos							
Primeiro								
Segundo								

1.3.3 Método da Pluralidade com Eliminação (Método Olímpico)

Neste método, se nenhum candidato obtiver a maioria absoluta (pelo menos 50% dos votos + 1 voto), é feita uma segunda eleição na qual não concorre o candidato menos votado para o primeiro lugar. Se ainda assim, nenhum candidato obtiver a maioria absoluta, é realizado um terceiro turno no qual não concorre o menos votado no segundo turno e assim por diante, até que se consiga determinar o vencedor da disputa.

Este método é conhecido como método olímpico, já que a escolha da cidade sede das olimpíadas se dá conforme o que é determinado por ele. A diferença está no modelo eleitoral utilizado, ou seja, a cédula utilizada para escolha da cidade sede de uma olimpíada não é igual a que estamos usando nesse nosso estudo, já que naquele processo os representantes dos Comitês Olímpicos são chamados a votar, e com isso configura-se um primeiro turno onde, se nenhuma cidade candidata conseguir a maioria absoluta dos votos, acaba-se por eliminar a cidade com menos votos, então se procede a uma nova votação, onde os representantes são novamente chamados a votar, só que agora nas cidades que restaram para a disputa, faz-se isso até conseguirmos determinar a cidade que será a sede da olimpíada em questão.

A seguir apresentamos os resultados das votações que escolheram as cidades sede para as olimpíadas em 2000, 2004 e 2008.

Cidade	1º turno	2º turno	3º turno	4º turno
Pequim	32	37	40	43*
Sidney	30	30	37	45
Manchester	11	13	11*	
Berlim	9	9*		
Istambul	7*			

Fonte: **Discrete Math Problem of the Week: Archive of Problems, Submissions & Commentary: The 2000 Olympic.**
Disponível em: < http://mathforum.org/dmpow/solutions/solution.ehtml?puzzle=46>
Acesso em: 22 set. 2003
Quadro 2: Resultado da escolha da cidade sede dos jogos olímpicos de 2000
Nota: * indica a cidade eliminada em cada turno

Como já sabemos, a cidade sede das olimpíadas do ano de 2000 foi Sidney na Austrália, e a escolha se deu conforme mostra a tabela acima. No primeiro turno Istambul foi a cidade eliminada, por ser a que obteve menor votação em comparação com as outras candidatas, no segundo turno eliminou-se Berlim, no terceiro turno foi eliminada a cidade de Manchester, restando Pequim e Sidney como candidatas, sendo Sidney a preferida.

Cidade	1º turno	Desempate	2º turno	3º turno	4º turno
Atenas	32		38	52	66
Roma	23		28	35	41*
Estocolmo	20		22	20*	
Buenos Aires	16	62	19*		
Cape Town	16	44*			

Fonte: **Athens to host 2004 Olympics:** Athens Wins the 2004 Summer Games.
Disponível em: < http://agamemnon.dabsol.co.uk/olympics.htm > Acesso em: 22 set. 2003
Quadro 3: Resultado da escolha da cidade sede dos jogos olímpicos de 2004
Nota: * indica a cidade eliminada em cada turno

Já sabemos que a cidade sede das olimpíadas de 2004 foi Atenas na Grécia. Acima é mostrado como ocorreu a escolha desta cidade para sediar essa edição das olimpíadas.

Nesta disputa ocorreu um fato interessante. Conforme o quadro 3, acima apresentado, vemos que no primeiro turno acontece um empate entre Buenos Aires e Cape Town, dessa forma não havia como eliminarmos uma cidade, já que as duas empataram justamente com a menor votação, se comparado com as outras três cidades concorrentes. Com isso, precisou-se fazer uma votação envolvendo somente as duas cidades para decidir qual iria ser eliminada, sendo assim retirada da disputa a cidade de Cape Town, já que esta foi a menos votada.

Nos turnos seguintes, foram sendo eliminadas, uma a uma, as cidades menos votadas entre as concorrentes restantes, sendo escolhida para sediar as olimpíadas de 2004, a cidade de Atenas.

Cidade	**1º turno**	**2º turno**
Pequim	44	56
Toronto	20	22*
Istambul	17	9*
Paris	15	18*
Osaka	6*	

Fonte: MEHAFFEY, John. **Olympics-Beijing wins sweeping victory in 2008 race**. Disponível em: <http://in.news.yahoo.com\010713\64\117.jo.html> Acesso em: 22 set. 2003
Quadro 4: Resultado da escolha da cidade sede dos jogos olímpicos de 2008
Nota: * indica a cidade eliminada em cada turno

A cidade escolhida para sediar as olimpíadas no ano de 2008 foi Pequim, capital da China. A escolha de Pequim se deu conforme o quadro 4, onde no primeiro turno Osaka foi a cidade eliminada. No segundo turno, Pequim conseguiu 56 votos de um total de 105, ou seja, ela foi escolhida já no segundo turno por obter maioria absoluta dos votos.

O método da pluralidade com eliminação na prática não é só utilizado para escolha da cidade sede dos jogos olímpicos, ele também serve para definir os representantes do poder executivo de alguns lugares, como é o caso da Irlanda[2] , onde este método é utilizado nas eleições presidenciais desde 1938.

Novamente aqui, vamos fazer uso deste método que acabamos de ver, para verificarmos como terminaria a disputa para a direção da associação de moradores do bairro Alegre, do exemplo M2.

Observando a tabela 2, da distribuição das preferências dos moradores do bairro Alegre, percebemos que entre as três chapas concorrentes nenhuma conseguiu atingir a maioria absoluta dos votos para a primeira colocação, sendo assim, devemos eliminar a chapa menos votada para essa posição, ou seja, eliminamos a chapa 1.

Após, devemos redistribuir os candidatos que disputam o segundo turno, segundo a preferência dos eleitores, a fim de determinarmos o vencedor da disputa. Mas isso já foi feito anteriormente e esses dados estão expressos na tabela 5.

Segundo a tabela 5, considerando a preferência inicial dos eleitores, a chapa 3 é preferida por 123 eleitores enquanto a chapa 2 tem a preferência de 68 eleitores. Dessa forma, a chapa 3 é eleita para dirigir a associação de moradores do bairro Alegre.

Note que, a forma como acontece a vitória da chapa 3 não nos é estranha, pois se voltarmos ao método dos dois turnos perceberemos que a forma como acontece lá, também a vitória da chapa 3, é idêntica ao que fizemos aqui. Isso não é uma coincidência, isso deve-se ao fato de que os dois métodos, quando utilizados numa disputa envolvendo somente três candidatos produzem o mesmo resultado e da mesma forma. Mas esse fato se dá somente quando a disputa envolve três candidatos, quando tivermos acima de três candidatos, a forma como chegamos ao vencedor é totalmente distinta entre os dois métodos, além de poder gerar vencedores distintos.

---

[2] ASSUNÇÃO, João Borges. O plebiscito Francês. **Expresso Online**. 11 mai. 2002. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/MACS/Textos_Macs/voto_preferencia.pdf> Acesso em: 29 jun. 2003.

Exercício: Na cidade de Cascalho foi feita uma eleição para escolha do novo prefeito, onde concorreram Adão, Bianca, Daniel e Emanuel. O método utilizado para essa escolha foi o método da pluralidade com eliminação e a distribuição das preferências dos eleitores aparece na tabela 7 abaixo.

Para facilitar a disposição dos dados na tabela, os candidatos serão reconhecidos pela letra inicial de seus nomes, ou seja, A=Adão, B=Bianca, D=Daniel e E=Emanuel.

Considerando estas informações, indique o candidato vencedor desta disputa, através do Método da Pluralidade com Eliminação.

Tabela 7
Resultado da votação da eleição para prefeito de Cascalho

Colocação	Número de votos							
	1.399	2.652	1.185	2.653	1.085	2.652	2.864	2.521
Primeiro	B	E	A	D	D	B	A	E
Segundo	A	D	D	A	B	D	B	A
Terceiro	D	A	E	E	A	E	E	B
Quarto	E	B	B	B	E	A	D	D

Candidato	**1º turno**	**2º turno**	**3º turno**
Adão			
Bianca			
Daniel			
Emanuel			

1.3.4 Método Olímpico Modificado

Este método nada mais é do que uma variante do método anterior, onde, para se obter o vencedor de uma disputa, deve-se eliminar em cada turno o candidato com o maior número de votos para a última colocação, ou seja, aqui os candidatos são eliminados de acordo com a rejeição do eleitorado.

Outra diferença muito importante dos dois métodos é que aqui, mesmo que um candidato atinja a maioria absoluta, ele não tem a garantia de sair vencedor da disputa. Com isso, pode acontecer de um candidato ter a maioria absoluta dos votos e acabar sendo eliminado no transcorrer da aplicação do método olímpico modificado.

Vamos ver como funciona este método, através da utilização do exemplo M2, definindo o vencedor daquela disputa.

Segundo a tabela 2, a chapa 1 é eliminada por ter a maior rejeição entre os concorrentes, ou seja, esta chapa tem 89 votos para a última colocação, superando as demais chapas. Dessa forma, restam na disputa a chapa 2 e a chapa 3, e após retirarmos a chapa 1 e reagruparmos as outras chapas, mantendo a preferência dos eleitores, a nova configuração ficou idêntica a apresentada nos métodos de dois turnos e pluralidade com eliminação, ou seja, podemos visualizá-la na tabela 5.

Agora, entre os dois concorrentes, vemos que a chapa 2 é colocada como segunda opção pela maioria dos eleitores, sendo dessa forma a chapa eliminada da disputa, como só restará a chapa 3, podemos afirmar que esta é a chapa vencedora, ou seja, a chapa 3 foi a escolhida para a direção da associação de moradores do bairro Alegre.

Exercício: No pequeno estado de Rio Azul, será escolhido o novo governador. Nessa disputa concorrem o Mário, a Carla, o Plínio e o Vítor. A votação foi encerrada e os votos contados, do total de eleitores, tivemos 234.124 votos válidos, sendo os mesmos distribuídos conforme a tabela abaixo. Novamente utilizaremos a convenção: M=Mário, C=Carla, P=Plínio e V=Vítor.

Considerando estas informações, indique o candidato vencedor desta disputa, através do Método Olímpico Modificado.

Tabela 8
Resultado da votação para o governo de Rio Azul

Colocação	Número de votos								
	20.121	15.265	42.389	27.561	20.198	18.789	11.584	34.652	43.565
Primeiro	M	C	V	V	P	C	P	M	M
Segundo	C	P	C	M	M	V	C	P	V
Terceiro	P	V	M	C	C	P	M	V	C
Quarto	V	M	P	P	V	M	V	C	P

Candidato	**1º turno**	**2º turno**	**3º turno**
Mário			
Carla			
Plínio			
Vítor			

1.3.5 Método de Borda

Jean Charles de Borda nasceu em 04 de Maio de 1733 na cidade de Dax na França e morreu em 19 de Fevereiro de 1799 em Paris. Quando jovem foi entusiasmado pelo seu primo Jacques François a aprender ciência.

Borda tem contribuições em várias áreas, tais como: geometria, teoria dos projéteis, mecânica dos fluidos, hidrografia, cartografia, teoria das eleições, etc...

Foi presidente da Comissão de Pesos e Medidas que teve como seus sócios Condorcet, Lavoisier, Laplace e Legendre e, em 1790 formaram um sistema uniforme de medida. Como presidente da Comissão de Pesos e Medidas, Borda fez outras propostas importantes. Ele foi eleito para a Academia de Bordeaux em 1767 e, dois anos depois, para a Academia da Marinha.

Como vimos, Borda teve participação importante em várias áreas do conhecimento, na teoria das eleições ele propôs um sistema de votação em que, com N candidatos, cada voto para o último lugar valesse um ponto, cada voto para o penúltimo lugar valesse dois pontos,..., cada voto para o primeiro lugar valesse N pontos. Feito isso, o vencedor será o candidato que ao final do processo alcança o maior número de pontos entre os competidores.

Supondo uma eleição com quatro candidatos. Pela proposta de Borda, os votos dados aos candidatos que se encontram em quarto lugar seriam multiplicados por 1, os votos dados aos candidatos na terceira posição seriam multiplicados por 2, os votos para o segundo lugar multiplicados por 3 e, por último, os votos dados aos candidatos da primeira posição seriam multiplicados por 4. Dessa forma, cada candidato faria um determinado número de pontos e o candidato que obtivesse a maior pontuação, entre os quatro, seria o vencedor da disputa eleitoral.

Como fizemos com os métodos anteriores, vamos utilizar este método, para determinar o vencedor da disputa do exemplo M2, cujos dados da votação encontram-se na tabela 2.

Segundo este método, cada posição tem uma pontuação diferente, ou seja, a primeira colocação vale 3 pontos, a segunda vale 2 pontos e a última vale 1 ponto. Para determinarmos a pontuação alcançada por cada concorrente, devemos multiplicar o número de votos do candidato pelos pontos que valem a posição em que ele se encontra, isso é feito em cada coluna de preferência dos eleitores e por final somam-se todos os pontos alcançados por cada candidato nesta eleição. Vamos verificar quantos pontos cada candidato fez nessa disputa e com isso determinar o vencedor, para isso observe o quadro 5.

Candidato	Aplicação do método	pontuação
Chapa 1	(61 x 3) + (46 x 1) + (22 x 2) + (19 x 2) + (43 x 1)	354
Chapa 2	(61 x 1) + (46 x 3) + (22 x 3) + (19 x 1) + (43 x 2)	370
Chapa 3	(61 x 2) + (46 x 2) + (22 x 1) + (19 x 3) + (43 x 3)	422

Quadro 5: Cálculo da pontuação, conforme o método de Borda.

Como vimos, pelo método de Borda, a chapa 3 foi escolhida para comandar a associação de moradores do bairro Alegre, já que essa chapa foi a que conseguiu o maior número de pontos entre os concorrentes.

Exercício: Na cidade de Porto Reis ocorreu o festival regional de rock, direcionado a bandas amadoras. Neste festival várias bandas concorreram ao prêmio máximo, que é um contrato para gravação de seu primeiro CD. Durante a semana passada foram realizadas as etapas de classificação para a grande final, que ocorreu no domingo. Neste ano, as bandas Metal, Sem Saber, Cabeça, Doidos e Reunião do Rock, foram as selecionadas para a grande final, onde foram analisadas e votadas por ordem de preferência, pelos 25 jurados. A escolha da banda vencedora foi feita através do método de Borda.

Então, através da tabela 9, que apresenta a votação dos jurados, podemos verificar qual banda foi a vencedora. Aqui nós utilizaremos somente uma letra para identificar cada banda, onde: M=Metal, S=Sema Saber, C=Cabeça, D=Doidos e R=Reunião do Rock.

Considerando estas informações, indique a banda vencedora do festival, através do Método de Borda.

Tabela 9
Resultado da votação do festival regional de rock de Porto Reis

Colocação	Número de votos							
	3	5	1	1	6	2	3	4
Primeiro	M	D	C	S	C	R	M	S
Segundo	C	R	M	M	R	S	R	D
Terceiro	R	S	R	D	M	D	S	C
Quarto	D	M	S	C	D	C	C	R
Quinto	S	C	D	R	S	M	D	M

Banda	Aplicação do método	pontuação
Metal		
Sem Saber		
Cabeça		
Doidos		
Reunião do Rock		

1.3.6 Método das Comparações Dois a Dois

Neste método vence o candidato que conseguir ganhar mais comparações dois a dois, ou seja, comparamos cada candidato com seus concorrentes, e verificamos qual deles consegue o maior número de vitórias nessas comparações, dando a esse candidato a vitória.

Por exemplo, se tivermos três candidatos numa disputa, os candidatos A, B e C. Então, verificamos entre o candidato A e B, qual deles é o preferido pelos eleitores, após confrontamos os candidatos A e C, de novo verificamos qual deles é o preferido pelos eleitores e por último faremos a mesma coisa com os candidatos B e C. O candidato que conseguir o maior número de vitórias nessas confrontações de preferências, ganha a eleição.

Novamente, como já fizemos anteriormente com os outros métodos, vamos utilizar o exemplo M2, cujos dados da votação fazem parte da tabela 2, e aplicar o método das comparações dois a dois, determinando o vencedor daquela disputa.

A partir dos dados da tabela 2, devemos comparar os candidatos dois a dois, para isso, quando comparamos dois candidatos, devemos excluir os demais da tabela, ou seja, devemos considerar naquele momento que existam somente os dois candidatos da nossa comparação distribuídos na tabela. Dessa forma, para exemplificar, vamos supor a comparação entre as chapas 1 e 2, o que nos leva a desconsiderar a chapa 3, o quadro 6, nos mostra como isso pode ser feito.

Colocação	**61**	**46**	**22**	**19**	**43**
Primeiro	Chapa 1	Chapa 2	Chapa 2		
Segundo			Chapa 1	Chapa 1	Chapa 2
Terceiro	Chapa 2	Chapa 1		Chapa 2	Chapa 1

Quadro 6: Votação do exemplo M2, excluindo-se a chapa 3.

Assim, podemos perceber que a chapa 1 tem 61 + 19 eleitores colocando ela como melhor opção se comparada com a chapa 2, enquanto que a chapa 2 tem 46 + 22 + 43 eleitores dando-lhe a preferência, dessa forma a chapa 2 vence essa comparação.

Devemos fazer todas as comparações possíveis entre todos os candidatos envolvidos na disputa, nesse exemplo as comparações totalizam três, ou seja, a chapa 1 contra a chapa 2, a chapa 1 contra a chapa 3 e finalmente a chapa 2 contra a chapa 3. Dessa forma devemos proceder conforme o que foi visto anteriormente, comparando dois candidatos por vez, até conseguirmos realizar todas as comparações descritas. Para tornar a visualização dos confrontos mais fácil, resolvemos apresenta-los no quadro 7, onde aparece em destaque o candidato vencedor de cada comparação, ou seja, aquele candidato que vence o confronto tem o seu nome em negrito sobre um fundo cinza.

Candidato	**Votação**		**Votação**	**Candidato**
Chapa 1	80	**X**	111	***Chapa 2***
Chapa 1	83	**X**	108	***Chapa 3***
Chapa 2	68	**X**	123	***Chapa 3***

Quadro 7: Resultados das comparações entre os candidatos do exemplo M2.

Após, compararmos todos os candidatos entre si, podemos perceber que: a chapa 1 perde todas as comparações, a chapa 2 vence uma comparação e a chapa 3 vence duas comparações. Dessa forma, a chapa 3 por ter mais vitórias nas comparações dois a dois entre os candidatos é a vencedora da disputa.

Observe que, o número de comparações é relativo ao número de candidatos envolvidos na disputa, sendo esse número igual à $\frac{n\ .\ (n-1)}{2}$, onde n representa o número de candidatos da disputa.

<u>**Exercício**</u>: Na cidade de Nova Cruz, será eleito o novo prefeito. Nesta cidade há 5.532 eleitores habilitados a votar. Os candidatos são: Juvenal, Luiz, Márcia, Nairo e Otávio. Depois de encerrada a votação, os votos foram contados, sendo que do total de votantes, somente 5.128 votos são válidos, os quais estão expressos na tabela 10.

Utilizaremos somente uma letra para identificar cada candidato, onde: J=Juvenal, L=Luiz, M=Márcia, N=Nairo e O=Otávio.

Considerando estas informações, indique o candidato vencedor desta disputa, através do Método das Comparações Dois a Dois.

Tabela 10
Resultado da votação da eleição para prefeito de Nova Cruz

Colocação	Número de votos							
	412	725	561	984	388	1.002	389	667
Primeiro	L	M	N	J	J	O	L	M
Segundo	O	O	M	L	N	N	J	N
Terceiro	J	N	L	M	O	J	N	J
Quarto	N	J	O	O	L	M	M	L
Quinto	M	L	J	N	M	L	O	O

Candidato	**Votação**		**Votação**	**Candidato**
Juvenal		X		Luiz
Juvenal		X		Márcia
Juvenal		X		Nairo
Juvenal		X		Otávio
Luiz		X		Márcia
Luiz		X		Nairo
Luiz		X		Otávio
Márcia		X		Nairo
Márcia		X		Otávio
Nairo		X		Otávio

1.3.7 Aplicação dos métodos em uma mesma situação

Agora que já vimos como funcionam os seis métodos de escolha majoritária, iremos utilizar uma situação para aplicá-los, determinando assim o vencedor de uma disputa através de cada um dos métodos.

No exercício abaixo, determine: qual o vencedor da eleição, utilizando para isso os métodos vistos até aqui.

Exercício: Na cidade de Vanilândia ocorre a escolha do novo prefeito, concorrem nessa disputa os seguintes candidatos: Abel, Bernardo, Cândida, Daniel, Everaldo e Fernanda. Depois de realizada a votação, ocorreu a contagem dos votos, dos quais existiam 10.000 votos válidos, sendo os mesmos distribuídos conforme a tabela 11.

Novamente, utilizaremos somente uma letra para identificar cada candidato, onde: A=Abel, B=Bernardo, C=Cândida, D=Daniel, E=Everaldo e F=Fernanda.

Tabela 11
Resultado da votação da eleição para prefeitura de Vanilândia

Colocação	Número de votos						
	1.235	1.536	2.134	1.428	1.665	986	1.016
Primeiro	A	B	E	C	A	D	F
Segundo	B	C	F	D	B	B	C
Terceiro	F	D	D	F	D	E	A
Quarto	E	E	C	E	F	C	E
Quinto	D	A	B	B	E	F	B
Sexto	C	F	A	A	C	A	D

- **O vencedor segundo o Método Plural é** ....

- **O vencedor segundo o Método dos Dois Turnos é** ....

Segundo Turno

Colocação	Número de votos						
	1.235	1.536	2.134	1.428	1.665	986	1.016
Primeiro							
Segundo							

- **O vencedor segundo o Método da Pluralidade com Eliminação é** ....

Candidatos	1º turno	2º turno	3º turno	4º turno	5º turno
A					
B					
C					
D					
E					
F					

- **O vencedor segundo o Método Olímpico Modificado é** ....

Candidato	1º turno	2º turno	3º turno	4º turno	5º turno
A					
B					
C					
D					
E					
F					

- **O vencedor segundo o Método de Borda é** ....

Candidato	Aplicação do método	pontuação
A		
B		
C		
D		
E		
F		

- **O vencedor segundo o Método das Comparações Dois a Dois é** ....

Candidato	Votação		Votação	Candidato
A		X		B
A		X		C
A		X		D
A		X		E
A		X		F
B		X		C
B		X		D
B		X		E
B		X		F
C		X		D
C		X		E
C		X		F
D		X		E
D		X		F
E		X		F

1.4 Critérios de Justiça

Agora que já vimos como funcionam alguns métodos de escolha majoritária para eleições democráticas, iremos ver alguns critérios que deveriam ser satisfeitos para que um método de escolha possa ser considerado justo.

Existem vários critérios, mas aqui nós estudaremos os quatro critérios que foram tomados por Kenneth Arrow em seu estudo, e que o levaram a fundamentação de sua tese no estudo da teoria das eleições em 1952, a qual veremos mais adiante.

Os quatro critérios de justiça que iremos ver são: Critério da Maioria Absoluta, Critério de Condorcet, Critério da Monotonia e o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes.

1.4.1 Critério da Maioria Absoluta

Se existir um candidato com a maioria absoluta de votos (pelo menos 50% dos votos, mais um voto) para a primeira posição, ele deve ser o vencedor da disputa. Em outras palavras, pareceria injusto à maioria das pessoas se um candidato, por exemplo, que adquiriu 51 votos para a primeira posição, num total de 100 votos, acabasse perdendo a disputa para outro candidato que tenha adquirido somente 30 votos para a primeira posição.

Agora, iremos analisar os seis métodos que nós vimos anteriormente, a fim de verificar se os mesmos satisfazem o critério da maioria absoluta.

⇒ **Será que o Método Plural (Turno Único) satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

Com relação ao método plural, nos parece razoável admitir que o critério da maioria absoluta é plenamente satisfeito, já que a própria definição do método nos diz que: o vencedor é aquele candidato com maior preferência para o primeiro lugar. Com isso, se existir um candidato que tenha maioria absoluta dos votos para a primeira posição ele será eleito por esse método.

⇒ **Será que o Método dos Dois Turnos satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

⇒ **Será que o Método da Pluralidade com Eliminação (Método Olímpico) satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

⇒ **Será que o Método Olímpico Modificado satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

Para responder tal pergunta, encontre o vencedor da disputa expressa na tabela abaixo, através do método olímpico modificado, e confronte o resultado com o que seria esperado através do critério da maioria absoluta.

Tabela 12
Resultado da votação

Colocação	Número de votos				
	498	366	296	512	328
Primeiro	A	B	C	A	D
Segundo	B	C	B	D	B
Terceiro	C	D	A	C	C
Quarto	D	A	D	B	A

Candidato	**1º turno**	**2º turno**	**3º turno**
A			
B			
C			
D			

⇒ **Será que o Método de Borda satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

Utilize o exemplo da tabela 12, compare o vencedor da disputa através do método de Borda com o critério da maioria absoluta.

Candidato	**Aplicação do método**	**pontuação**
A		
B		
C		
D		

⇒ **Será que o Método das Comparações Dois a Dois satisfaz o Critério da Maioria Absoluta?**

1.4.2 Critério de Condorcet

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, conhecido como Marquês de Condorcet, pelo título ganho da cidade de Condorcet em Dauphiné, nasceu em Ribemont, França em 17 de Setembro de 1743 e veio a falecer em 29 de março de 1794 no Reino de Bourg próximo de Paris.

Ele era um aristocrata, cientista social, filósofo, matemático e economista. Foi um dos enciclopedistas e um dos primeiros a se preocupar com o problema das eleições justas.

O trabalho mais importante dele estava em probabilidade e na filosofia da matemática. O tratado mais importante dele era Composição na Aplicação de Análise para a Probabilidade de Decisões de Maioria (1785). Este é um trabalho extremamente importante no desenvolvimento da teoria da probabilidade. Também trabalhou com idéias de cálculo integral e diferencial, dando um tratamento novo de infinitesimal.

Ele é conhecido pelo Princípio de Condorcet, que diz: se um candidato vencer todas as comparações dois a dois com os demais candidatos, ele deve ser o vencedor da eleição. Esse critério, segundo Condorcet, deveria ser satisfeito para que uma eleição fosse considerada justa. Não devemos confundir, o critério de Condorcet com o método das comparações dois a dois, já que no método vence a eleição aquele candidato que ganha o maior número de comparações dois a dois entre os candidatos, diferente do critério aqui visto, que considera justa a vitória de um candidato que ganhe todas as comparações dois a dois.

Quando existir um candidato que ganhe todas as suas comparações dois a dois frente aos demais, o mesmo é chamado CONDORCETIANO, justamente pelo critério que estamos apresentando.

$\Rightarrow$ **Será que o Método Plural (Turno Único) satisfaz o Critério de Condorcet?**

Esse método apresenta problemas para satisfazer o critério de Condorcet, já que poderá haver um candidato que vença todas as comparações dois a dois, mas mesmo assim, por esse método, ele não seria o vencedor. Para exemplificar o que estamos dizendo, observe a tabela 13 abaixo.

Tabela 13
Resultado da votação

Colocação	Número de votos			
	820	775	987	418
Primeiro	A	B	C	A
Segundo	B	C	B	C
Terceiro	C	A	A	B

Pela tabela acima, podemos perceber que, pelo método plural, o vencedor seria o candidato A. Porém, quando comparamos os candidatos dois a dois, percebemos que o candidato B é condorcetiano, ou seja, B vence todas as comparações com os demais candidatos, observe o quadro 8.

Candidato	Votação		Votação	Candidato
A	1.238	**X**	1.762	***B***
A	1.238	**X**	1.762	***C***
B	1.595	**X**	1.405	*C*

Quadro 8: Comparações dois a dois entre os candidatos A,B e C.

Nesse exemplo, o candidato A perde todas as comparações e B ganha duas comparações, ou seja, todas suas comparações, enquanto que o candidato C vence uma de suas comparações. Então, pelo critério de Condorcet, o vencedor deveria ser o candidato B, diferente do que diz o método plural, que determinou a vitória do candidato A. Por isso, podemos dizer que o método plural não satisfaz o critério de Condorcet.

⇒ **Será que o Método dos Dois Turnos satisfaz o Critério de Condorcet?**

Utilize o exemplo da tabela 13 e mostre que este método também não satisfaz o critério de Condorcet.

⇒ **Será que o Método da Pluralidade com Eliminação (Método Olímpico) satisfaz o Critério de Condorcet?**

Resolva o exemplo abaixo para mostrar o que acontece com esse método.

Tabela 14
Resultado da votação

Colocação	Número de votos			
	46	50	47	57
Primeiro	A	B	C	D
Segundo	B	C	B	A
Terceiro	C	A	A	B
Quarto	D	D	D	C

Candidatos	1^o turno	2^o turno	3^o turno
A			
B			
C			
D			

Candidato	Votação		Votação	Candidato
A		**X**		***B***
A		**X**		***C***
A		**X**		***D***
B		**X**		***C***
B		**X**		***D***
C		**X**		***D***

⇒ **Será que o Método Olímpico Modificado satisfaz o Critério de Condorcet?**

Esse método não satisfaz o critério de Condorcet, para mostrar isso, encontre um exemplo que falhe este critério, tal que envolva 4 candidatos em uma disputa.

⇒ **Será que o Método de Borda satisfaz o Critério de Condorcet?**

Para responder tal pergunta, encontre o vencedor da disputa expressa na tabela 14 acima, através do método de Borda, e confronte o resultado com o que seria esperado através do critério de Condorcet.

Candidato	Aplicação do método de Borda	pontuação
A		
B		
C		
D		

⇒ **Será que o Método das Comparações Dois a Dois satisfaz o Critério de Condorcet?**

1.4.3 Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes

Este critério estabelece que: se um candidato vence uma disputa eleitoral, ele deve continuar sendo o vencedor caso um ou mais candidatos forem retirados da disputa. É claro que entre os candidatos afastados da disputa não pode estar o vencedor.

Estamos acostumados a ver em disputas eleitorais no Brasil, candidatos saírem da competição quando as pesquisas não lhes favorecem, mas esse fato pode acarretar alterações em relação aos outros candidatos. Será que alguns dos métodos que vimos atende esse critério? Vamos fazer as mesmas comparações que fizemos com os demais critérios, a fim de conseguirmos uma resposta para essa questão.

Aqui, utilizaremos a suposição que fizemos no início desse estudo, que diz: *a desistência de um candidato não altera a ordem de preferência dos eleitores.*

⇒ **Será que o Método Plural (Turno Único) satisfaz o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes?**

Neste método, fica bastante fácil imaginarmos que retirar algum candidato da disputa, pode acabar favorecendo outro candidato. Dessa forma, podem acabar acontecendo alterações no resultado da eleição. Vamos observar o exemplo a seguir, através da tabela 15.

Tabela 15
Resultado da votação

Colocação	Número de votos			
	41	51	63	47
Primeiro	A	C	B	D
Segundo	B	A	A	C
Terceiro	D	D	C	B
Quarto	C	B	D	A

Segundo as preferências dos eleitores, expressas na tabela acima, utilizando o método plural temos como vencedor dessa disputa o candidato B, já que esse possui 63 votos para a primeira colocação.

Agora, vamos supor que o candidato D tivesse retirado sua candidatura. Veremos o que aconteceria com o resultado dessa eleição. A tabela 16, abaixo, mostra a nova distribuição dos votos.

Tabela 16
Resultado da votação excluindo o candidato D

Colocação	Número de votos			
	41	51	63	47
Primeiro	A	C	B	C
Segundo	B	A	A	B
Terceiro	C	B	C	A

Note que, com a saída do candidato D, utilizando ainda o método plural, o vencedor seria o candidato C, já que agora esse possui 98 votos para a primeira colocação. Então, pode-se afirmar que a saída do candidato D foi decisiva para a alteração do resultado da disputa, e por isso o método plural é um dos métodos que não satisfaz o critério da independência das alternativas irrelevantes.

⇒ Será que o Método dos Dois Turnos satisfaz o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes?

Você deve encontrar o vencedor do exemplo abaixo e comparar com o vencedor deste mesmo exemplo, só que contando com a retirada da candidatura do candidato C.

Tabela 17
Resultado da votação

Colocação	Número de votos			
	69	50	61	76
Primeiro	A	B	C	D
Segundo	B	C	B	B
Terceiro	C	D	A	C
Quarto	D	A	D	A

⇒ Será que o Método da Pluralidade com Eliminação (Método Olímpico) satisfaz o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes?

Se, no método dos dois turnos o critério da independência das alternativas irrelevantes falha, no método olímpico também falhará, já que podemos imaginar uma disputa com três candidatos, onde segundo este método eliminamos o candidato menos votado para primeira posição entre os três existentes, restando somente dois candidatos para a disputa final, o que resulta num processo idêntico ao dos dois turnos, por conseqüência o vencedor da disputa seria o mesmo nesses dois métodos.

Vamos mostrar que, o método da pluralidade com eliminação também não satisfaz o critério da independência das alternativas irrelevantes, para isso vamos utilizar o exemplo anteriormente apresentado, cujos dados estão expostos na tabela 17.

Pelo método olímpico, no exemplo da tabela 17, o vencedor seria o candidato C, porém quando retiramos o candidato A da disputa (tabela 18) e aplicamos o mesmo método de escolha, o vencedor acabaria sendo o candidato B.

Tabela 18
Resultado da votação excluindo o candidato A

Colocação	Número de votos			
	69	50	61	76
Primeiro	B	B	C	D
Segundo	C	C	B	B
Terceiro	D	D	D	C

Desta forma, comprovamos que o método da pluralidade com eliminação também não consegue superar o problema com o critério da independência das alternativas irrelevantes, já que a saída de um concorrente da disputa, faz com que o resultado da mesma seja alterado em favor de um candidato anteriormente derrotado.

⇒ **Será que o Método Olímpico Modificado satisfaz o Critério da Independência das alternativas irrelevantes?**

Agora, já não fica tão claro o que pode acontecer com esse método em relação ao critério da independência das alternativas irrelevantes. Analise este caso, usando para isso o exemplo apresentado na tabela 19.

Tabela 19
Resultado da votação

Colocação	Número de votos				
	122	66	54	81	57
Primeiro	A	B	C	D	D
Segundo	B	A	D	C	C
Terceiro	C	D	A	B	A
Quarto	D	C	B	A	B

⇒ **Será que o Método de Borda satisfaz o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes?**

Determine o vencedor da disputa exemplificada abaixo, através do método de Borda. A seguir, suponha que o candidato B tenha saído da disputa, determinando novamente o vencedor. Compare o que acontece.

Tabela 20
Resultado da votação

Colocação	Número de votos				
	66	45	53	42	38
Primeiro	A	B	C	D	A
Segundo	B	C	B	A	C
Terceiro	C	A	D	C	D
Quarto	D	D	A	B	B

⇒ **Será que o Método das Comparações Dois a Dois satisfaz o Critério da Independência das Alternativas Irrelevantes?**

Neste método, podemos imaginar que a saída de competidores cause uma mudança no vencedor da disputa, já que pode alterar o número de vitórias que os candidatos têm nas comparações dois a dois. Para verificarmos o que realmente pode ocorrer com este método, em relação ao critério da independência das alternativas irrelevantes, iremos utilizar o exemplo abaixo.

Tabela 21
Resultado da votação

Colocação	Número de votos						
	20	60	40	10	50	40	10
Primeiro	A	B	B	E	D	C	E
Segundo	D	A	A	B	A	E	D
Terceiro	E	E	D	A	C	D	A
Quarto	B	D	C	D	E	B	B
Quinto	C	C	E	C	B	A	C

No exemplo da tabela 21, se compararmos os candidatos dois a dois, o vencedor da disputa será o candidato A com três vitórias nas comparações, contra duas vitórias do candidato B, uma do candidato C, duas vitórias de D e duas também do candidato E. Agora, vamos imaginar que os candidatos D e E não queiram mais disputar a eleição, e resolvam se retirar da mesma, deixando a disputa reduzida a somente três candidatos (A, B e C), vamos verificar o que vai acontecer com o resultado desta disputa, agora que dois candidatos a deixaram.

Tabela 22
Resultado da votação excluindo os candidatos D e E.

Colocação	Número de votos			
	30	110	50	40
Primeiro	A	B	A	C
Segundo	B	A	C	B
Terceiro	C	C	B	A

Com a saída dos candidatos D e E (tabela 22), devemos realizar somente três comparações dois a dois, conforme o quadro 9 abaixo.

Candidato	**Votação**		**Votação**	**Candidato**
A	80	**X**	150	***B***
A	190	**X**	40	*C*
B	140	**X**	90	*C*

Quadro 9: Comparações dois a dois entre os candidatos A, B e C.

Como vemos, o candidato B será o vencedor, já que ele consegue ganhar duas das três comparações dois a dois existentes, além disso, ele é condorcetiano, pois consegue ganhar todas as suas comparações. Então, chegamos a conclusão que o método das comparações dois a dois também não consegue satisfazer o critério da independência das alternativas irrelevantes.

1.4.4 Critério da Monotonia

Se, um candidato X vence uma eleição e é feita uma nova eleição, com os mesmos candidatos e os mesmos eleitores, na qual todos os eleitores ou mantém seus votos ou passam a dá-los para X, então X deve continuar vencedor.

Imagine uma situação onde um determinado candidato ganha uma eleição e o resultado é contestado por um de seus adversários, para resolver o problema deveria ser feita uma recontagem dos votos, mas infelizmente alguns dos votos foram extraviados. Desta forma, a eleição teve de ser repetida, como os eleitores já tinham um indicativo do vencedor, alguns deles que haviam votado em candidatos derrotados para a primeira posição, acabam agora votando naquele candidato que venceu a disputa anulada.

Com essa nova composição das preferências dos eleitores, nos parece óbvio acreditar que o vencedor será novamente o mesmo candidato. Dessa forma podemos acreditar que é impossível algum método não cumprir esse critério, mas é justamente isso que queremos analisar a partir de agora, ou seja, será que algum método deixa de cumprir esse critério?

⇒ **Será que o Método Plural (Turno Único) satisfaz o Critério da Monotonia?**

É obvio, que o método plural satisfaz esse critério. Imagine uma disputa envolvendo, por exemplo, três candidatos A, B e C, onde num primeiro momento A ganha. É feita uma nova eleição com os mesmos candidatos e eleitores, onde os mesmo, ou manterão seus votos, ou então alguns dos eleitores que antes votaram em um dos outros candidatos para a primeira posição passam agora a votar no candidato A. Este candidato sem dúvida continuará sendo o vencedor da disputa.

Se os eleitores mantiverem suas preferências, votando nos mesmos candidatos, é certo que o candidato A irá ganhar novamente. Agora, se alguns dos eleitores que votaram anteriormente em B ou C, passarem a votar em A para a primeira posição, esse vencerá com uma margem de votos maior ainda.

⇒ **Será que o Método dos Dois Turnos satisfaz o Critério da Monotonia?**

Sabe-se que este método não satisfaz o critério da monotonia. Encontre um exemplo que mostre isso.

⇒ **Será que o Método da Pluralidade com Eliminação (Método Olímpico) satisfaz o Critério da Monotonia?**

Para responder tal questionamento, suponha uma disputa com 3 candidatos e compare com o método dos dois turnos.

⇒ **Será que o Método Olímpico Modificado satisfaz o Critério da Monotonia?**

Este é mais um método que não supera o problema encontrado pelos dois métodos anteriores, com relação ao critério da monotonia. Vamos diretamente para um exemplo, através da tabela 23, para mostrar a falha desse método junto ao critério da monotonia.

Tabela 23
Resultado da votação

Colocação	Número de votos						
	10	20	19	24	24	15	9
Primeiro	A	A	B	C	D	B	D
Segundo	C	B	C	A	A	C	C
Terceiro	D	C	D	B	B	D	B
Quarto	B	D	A	D	C	A	A

Utilizando o método olímpico modificado, no exemplo acima apresentado, veremos que o vencedor da disputa será o candidato A, já que este é o candidato menos rejeitado pelos eleitores. Agora, vamos supor que ocorra uma nova eleição, e que os 24 eleitores que tinha escolhido a opção CABD passam a votar em ACDB, com isso nossa distribuição ficará idêntica a da tabela 24 abaixo, e o resultado desta disputa sofrerá uma alteração.

Tabela 24
Nova votação

Colocação	Número de votos					
	34	20	19	24	15	9
Primeiro	A	A	B	D	B	D
Segundo	C	B	C	A	C	C
Terceiro	D	C	D	B	D	B
Quarto	B	D	A	C	A	A

Desta forma, segundo os dados da tabela 24, o candidato A que havia ganhado anteriormente, é eliminado na primeira rodada, já que possui 43 votos para a última posição. Agora, o vencedor será o candidato B. Portanto, mostramos que o método olímpico modificado não satisfaz o critério da monotonia.

⇒ **Será que o Método de Borda satisfaz o Critério da Monotonia?**

Tabela 25
Resultado da votação

Colocação	Número de votos				
	43	44	57	58	48
Primeiro	A	B	C	D	D
Segundo	B	D	A	C	B
Terceiro	C	C	B	B	A
Quarto	D	A	D	A	C

Neste exemplo, através do método de Borda o vencedor da disputa é o candidato B. Vamos supor que, os 43 eleitores que haviam escolhido a opção ABCD acabem mudando de opinião e transfiram seus votos para outra seqüência. Numa nova disputa entre os mesmos candidatos, passam a votar agora na opção BDCA, com isso teremos uma nova configuração nas preferências dos eleitores. Utilizando o mesmo método, determine o vencedor agora e compare com o vencedor encontrado anteriormente.

⇒ **Será que o Método das Comparações Dois a Dois satisfaz o Critério da Monotonia?**

Este é mais um método que não consegue superar o problema com relação ao critério da monotonia, vamos apresentar um exemplo, através da tabela 26, para mostrar que essa nossa afirmação é realmente verdadeira.

Tabela 26
Resultado da votação

Colocação	Número de votos					
	48	57	55	63	44	33
Primeiro	A	B	C	D	E	A
Segundo	E	D	B	C	A	B
Terceiro	B	A	A	E	D	E
Quarto	C	E	D	B	C	D
Quinto	D	C	E	A	B	C

No exemplo da tabela 26, através do método de comparações dois a dois feita entre todos os concorrentes, o vencedor da disputa é o candidato A, já que ele consegue vencer três das suas comparações, enquanto que o candidato B vence duas, C vence somente uma, D vence duas comparações e o candidato E vence duas de suas comparações dois a dois.

Supondo agora que, a eleição é refeita, e que os 44 eleitores que preferiam a seqüência EADCB de candidatos, resolvem mudar suas opções, preferindo agora a seqüência ABEDC, com isso essa seqüência obtém um total de 77 votos, alterando a distribuição das preferências, conforme a tabela 27 abaixo.

Portanto, o resultado da eleição é alterado, em relação à disputa anterior, como podemos observar no quadro 10 das comparações entre os candidatos.

Tabela 27
Nova votação

Colocação	Número de votos				
	48	57	55	63	77
Primeiro	A	B	C	D	A
Segundo	E	D	B	C	B
Terceiro	B	A	A	E	E
Quarto	C	E	D	B	D
Quinto	D	C	E	A	C

Candidato	**Votação**		**Votação**	**Candidato**
A	125	**X**	175	***B***
A	182	**X**	118	*C*
A	180	**X**	120	*D*
A	237	**X**	63	*E*
B	182	**X**	118	*C*
B	237	**X**	63	*D*
B	189	**X**	111	*E*
C	103	**X**	197	***D***
C	118	**X**	182	***E***
D	120	**X**	180	***E***

Quadro 10: Comparações dois a dois entre os candidatos A, B, C, D e E.

Observe que, o candidato A continua vencendo três comparações, mas o candidato B vence quatro comparações, ou seja, ele vence todas as suas comparações dois a dois com os demais candidatos, sendo ele chamado de condorcetiano. Com isso, o candidato B consegue superar o candidato A e torna-se o novo vencedor da disputa. Mostramos assim que, o método das comparações dois a dois não cumpre o critério da monotonia.

Bem, vimos como cada método se comporta em relação a cada critério de justiça. Agora preencha o quadro abaixo, com as observações feitas.

	Maioria Absoluta	Condorcet	Independência das Alternativas Irrelevantes	Monotonia
Método Plural	Satisfaz	Não satisfaz	Não satisfaz	Satisfaz
Método dos Dois Turnos				
Método da Pluralidade com Eliminação			Não satisfaz	
Método Olímpico Modificado				Não satisfaz
Método de Borda				
Método das Comparações Dois a Dois			Não satisfaz	Não satisfaz

1.5 O Teorema Impossibilidade de Arrow

Depois de termos visto os seis métodos de escolha majoritária e os quatro critérios de justiça, enunciaremos um resultado muito importante na teoria matemática das eleições, envolvendo disputas majoritárias em sistemas democráticos.

O resultado em questão foi provado por Kenneth Joseph Arrow, economista americano, nascido na cidade de Nova Iorque no dia 23 de agosto de 1921. Graduado em 1940 na Faculdade da Cidade de Nova Iorque, como bacharel em Ciências Sociais, além de uma especialização em Matemática, uma combinação paradoxal que era prognóstico de seus interesses futuros. Entrou na Universidade da Columbia onde recebeu um M.A. em Matemática em junho de 1941, mas sob a influência do estatístico-economista, Harold Hotelling, mudou-se para o Departamento de Economia.

Professor da Universidade de Chicago 1948-49, época em que dedicou parte de seu tempo ao estudo em escolha social e na eficiência de Pareto, também trabalhou na Universidade de Stanford (1953-68) e na Universidade de Harvard (1968-74).

Recebeu vários prêmios, entre eles, o John Bates Clark Medal da Associação Econômica Americana em 1957, os títulos Honoris causa da Universidade de Chicago em 1967 e da Universidade de Cidade de Nova Iorque em 1972, ano em que recebeu o Prêmio Nobel de Economia por sua teoria geral do equilíbrio econômico.

Sócio da Academia Nacional de Ciências, da Associação Estatística Americana e da Sociedade Filosófica Americana; companheiro da Academia Americana de Artes e Ciências; presidente da Sociedade de Economia em 1956 e do Instituto de Ciências de Administração em 1963, além de ser eleito Presidente da Associação Econômica Americana em 1972.

Em 1952, Arrow apresentou e provou um teorema que leva seu nome, ou seja, o ***Teorema da Impossibilidade de Arrow***, que diz: *Não existe sistema democrático de votação, envolvendo mais de dois candidatos, que satisfaça os quatro critérios de justiça: Maioria absoluta, Condorcet, Monotonia e Independência das alternativas irrelevantes.*

Pudemos perceber, através das análises que fizemos anteriormente, que os métodos que nós estudamos, nesse trabalho, acabam confirmando o que Arrow mostrou em seu teorema, já que, os seis métodos que foram apresentados se enquadram no que diz o mesmo, ou seja, nenhum dos métodos que vimos pode ser considerado justo.

Mas, este teorema vale tanto para os seis métodos que nós vimos quanto para qualquer outro que possa existir para disputas democráticas majoritárias.

Dessa forma, “O teorema de Arrow, que lhe valeu o Nobel em Economia em 1972, afirma que o único sistema eleitoral livre de paradoxos é uma ditadura!”[3]

---

[3] **Viva o Festival da Canção!**. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/MACS/Textos_Macs/borda_buescu.pdf> Acesso em: 29 jun. 2003

<u>Exercício:</u> Um problema aparentemente simples é o da apuração de uma eleição de governantes em democracias. Entretanto, uma análise mais detalhada mostra o quão complicado é o problema, que mereceu a atenção de ilustres cientistas, como Arrow (que ganhou um Prêmio Nobel de Economia), Condorcet e Borda. Entre outros, destacamos os seguintes princípios:

<u>Princípio da Maioria:</u> Em uma eleição, se houver um candidato que mereça a preferência de mais da metade dos eleitores, tal candidato deve ser o ganhador da eleição.

<u>Princípio de Condorcet:</u> Se, em um processo eleitoral, os eleitores comparam os candidatos dois a dois, um candidato que vença todas as comparações dois a dois com os outros candidatos deve ser eleito.

As eleições são feitas geralmente pelo chamado método plural: *o candidato preferido pelo maior número de eleitores vence.*

No Brasil, usamos o método do segundo turno: *se nenhum candidato obtiver mais da metade das preferências, faz-se nova eleição à qual concorrem apenas os dois candidatos mais votados.*

a) Um candidato que satisfaça o Princípio da Maioria vencerá necessariamente a eleição pelo método plural?

b) Um candidato que vence uma eleição pelo método plural satisfaz necessariamente o Princípio da Maioria?

Em uma pesquisa, com 100 eleitores e 5 candidatos, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**, pediu-se aos eleitores que colocassem os candidatos em ordem de preferência. Apurados os votos, apenas três ordens foram encontradas. Essas ordens, bem como a quantidade de votos de cada uma, encontram-se descritas a seguir.

. 49 eleitores colocaram os candidatos na ordem **ABCDE** (**A**, o preferido);
. 48 eleitores colocaram os candidatos na ordem **BEDCA** (**B**, o preferido);
. 3 eleitores colocaram os candidatos na ordem **CBDEA** (**C**, o preferido).

De acordo com os dados acima, responda, justificando suas respostas, às perguntas a seguir:

c) Quem venceria a eleição pelo método plural?

d) Quem venceria a eleição pelo método do segundo turno?

e) Que candidato satisfaz o Princípio de Condorcet?

<u>Fonte:</u> Exercício extraído do Provão do MEC 2002 – Questão discursiva para o curso de Licenciatura em Matemática.

2 A MATEMÁTICA DA DIVISÃO PROPORCIONAL

A matemática da divisão proporcional trata dos problemas de partilha proporcional, que na verdade é um tipo especial de partilha equilibrada, onde devemos distribuir um determinado número de objetos iguais e indivisíveis entre os concorrentes, estando os mesmos sujeitos a cotas distintas. O exemplo mais importante de partilha proporcional é o da distribuição de vagas entre os competidores a um parlamento. No Brasil os problemas de partilha proporcional, ligados as eleições, estão presentes na escolha dos nossos representantes do poder legislativo, ou seja, na escolha de vereadores, deputados estaduais e federais.

Mas, o problema da divisão proporcional não se limita à escolha de representantes para o poder legislativo, já que existem muitas outras aplicações no nosso dia-a-dia, tais como: distribuir os plantões das enfermeiras num hospital, distribuir as chamadas telefônicas pelos vários atendentes de uma central, distribuir vagas num conselho de uma empresa, etc.

Aqui nós veremos, alguns dos principais métodos utilizados para resolver problemas de divisão proporcional, coisa que nos parece muito simples, mas que na verdade nos trarão muitas incertezas quanto à validade e imparcialidade dos mesmos, o que nos fará questionar os métodos de divisão proporcional quanto à justiça da distribuição.

Para que possamos iniciar nossos estudos, primeiramente será necessário que tenhamos conhecimento de alguns conceitos básicos que serão utilizados no transcorrer desse trabalho, para isso vamos defini-los e mostrar como eles funcionam através de um exemplo fictício.

2.1 Conceitos básicos da divisão proporcional

Estes conceitos são empregados em todos os métodos de divisão proporcional que nós iremos ver adiante. Isso não significa que todos os métodos irão utilizar todos os conceitos que nós veremos, mas que, quando utilizarem alguns desses conceitos, eles serão da forma como mostraremos agora. Nós trataremos cada conceito, sob a ótica de uma eleição legislativa, mas como já dissemos, a divisão proporcional também pode ser utilizada para outros fins, sendo assim esses conceitos que veremos serão válidos para todas e quaisquer divisões proporcionais, tanto envolvendo eleições, quanto para outras situações do dia-a-dia.

2.1.1 Quociente eleitoral

O quociente eleitoral, tomando como base uma eleição ao poder legislativo, nada mais é do que, a determinação da quantidade de votos que um candidato necessita para ter assegurado uma das vagas que estão sendo disputadas, ou seja, determina a quantidade de pessoas que é representada por cada parlamentar. A determinação do quociente eleitoral é dada pela razão entre o número total de votos e o número total de lugares a ser distribuído.

$$\textit{Quociente eleitoral} = \frac{\textit{número total de votos}}{\textit{número de vagas}}$$

2.1.2 Quota, quota máxima e quota mínima

A quota é o número de vagas a que cada concorrente tem direito, segundo a sua votação, caso esses objetos da nossa divisão não forem fracionáveis. A quota é obtida da seguinte forma:

$$\textit{Quota} = \frac{\textit{número de votos do concorrente}}{\textit{quociente eleitoral}}$$

Como já sabemos, não podemos distribuir uma parte fracionária de vagas para cada concorrente. Então se faz necessário determinarmos as suas quotas mínimas e máximas, que serão utilizadas por alguns métodos. Essas duas quotas são compostas somente por números inteiros, sendo a quota mínima um arredondamento da quota, por falta, ou seja, é formada somente pela parte inteira da quota; e a quota máxima é obtida através do arredondamento da quota, por excesso, ou seja, é composta pela parte inteira da quota mais uma unidade. Esta regra de obtenção das quotas mínima e máxima continua valendo mesmo que aconteça de um concorrente ter como quota um número inteiro, ou seja, supondo que a quota de um candidato seja igual a 3, utilizando a regra que vimos, sua quota mínima será 3 e sua quota máxima será 4.

Quota mínima = parte inteira da quota
Quota máxima = parte inteira da quota + 1

Para que possamos entender como funcionam, tanto o quociente eleitoral, assim como as quotas, iremos utilizar o exemplo abaixo, o qual é utilizado por Tannenbaum (2004, p.140-141).

Exemplo P1: Parador é uma nova república da América Central. É constituída por seis estados: Açúcar, Bahia, Café, Diamante, Esmeralda e Felicidade (A, B, C, D, E e F, abreviadamente). De acordo com a nova constituição de Parador, o congresso terá 250 lugares, divididos entre os seis estados de acordo com a respectiva população. A população de cada estado é apresentada através da tabela 28 abaixo:

Tabela 28
República de Parador
Dados populacionais por estado

Estado	População
A	1.646.000
B	6.936.000
C	154.000
D	2.091.000
E	685.000
F	988.000
Total	12.500.000

A partir dos dados apresentados na tabela anterior, vamos encontrar o quociente eleitoral desse exemplo, que é dado pela razão entre a população total e o número de lugares no congresso, ou seja, o quociente eleitoral seria $\frac{12.500.000}{250} = 50.000$.

Depois de encontrado o quociente eleitoral, fazendo uso desse valor, vamos determinar a quota de cada estado, bem como as quotas mínima e máxima, observe o quadro 11 abaixo, que nos mostra como foram obtidas as quotas dos estados.

Estado	**Quota de cada estado**
A	1.646.000 / 50.000 = **32,92**
B	6.936.000 / 50.000 = **138,72**
C	154.000 / 50.000 = **3,08**
D	2.091.000 / 50.000 = **41,82**
E	685.000 / 50.000 = **13,70**
F	988.000 / 50.000 = **19,76**

Quadro 11: Cálculo da quota de cada estado do Exemplo P1.

Podemos a partir do cálculo das quotas, determinar as quotas máxima e mínima de cada estado, as quais são apresentadas na tabela 29 abaixo. Esta tabela traz um resumo de todas as informações até aqui encontradas, para a distribuição proposta no Exemplo P1.

Tabela 29
República de Parador - Quotas de cada estado

Estado	População	Quota	Quota mínima	Quota máxima
A	1.646.000	32,92	32	33
B	6.936.000	138,72	138	139
C	154.000	3,08	3	4
D	2.091.000	41,82	41	42
E	685.000	13,70	13	14
F	988.000	19,76	19	20
Total	12.500.000	250,00	246	252

Através do Exemplo P1 acima, podemos entender o que é, e como se encontra o quociente eleitoral, bem como as quotas de cada candidato. Note que, para representar a quota de cada concorrente, utilizou-se somente duas casas decimais, isso foi feito por conveniência, pois para situações reais, deve-se utilizar tantas quantas forem as casas decimais que aparecerem, isso vale também para o quociente eleitoral.

2.1.3 Quociente modificado e quota modificada

Em alguns métodos de divisão proporcional que veremos, o quociente eleitoral é substituído por um outro fator, o qual chamamos de quociente modificado. Assim como o quociente eleitoral, ele determinará a representatividade de cada vaga distribuída ou o número de votos necessários para que um candidato obtenha uma vaga, entre as que estão sendo disputadas.

Diferente do quociente eleitoral que é determinado pela razão entre o total de votos válidos e o número de vagas a ser distribuído, o quociente modificado é determinado através do processo de tentativa e erro, ou seja, vai se determinando um valor para o quociente modificado até encontrarmos um número que faça com que consigamos distribuir as vagas na sua totalidade, consoante ao que determina o método em questão. Outra diferença entre o quociente eleitoral e o modificado é que o último não se limita a somente um valor, esse quociente modificado na verdade pode ser um determinado número que se encontra entre um intervalo de números reais, onde, qualquer valor que se tome desse intervalo vai fazer com que se consiga distribuir todas as vagas disponíveis, cujo resultado da distribuição é sempre o mesmo independente do valor escolhido neste intervalo.

Acompanhando a substituição do quociente eleitoral pelo modificado, alguns métodos utilizarão, para determinar o número de vagas correspondente a cada candidato, quotas modificadas, tanto mínimas quanto máximas, dependendo do critério adotado pelo método em questão.

Diferente do que fizemos no quociente eleitoral e nas quotas do mesmo, aqui, não iremos apresentar exemplo para os quocientes e quotas modificados, eles serão vistos no transcorrer da apresentação dos métodos, conforme for surgindo a necessidade de utilizá-los.

2.2 Métodos de divisão proporcional

Como vimos podemos determinar a quota correspondente a cada candidato, porém isso somente não resolve nosso problema, já que não podemos fracionar os objetos a serem distribuídos, ou seja, eles devem ser divididos de tal forma que cada um dos supostos participantes da partilha tenha direito a uma quantidade inteira de objetos.

A fim de resolver esse problema, poderíamos aplicar o conceito de arredondamento convencional, ou seja, os candidatos que possuírem quotas com parte decimal menor do que 0,5 recebem um número de objetos igual a parte inteira de suas quotas, já aqueles que possuírem quotas com parte decimal superior ou igual a 0,5 teriam direito a um número de objetos igual a parte inteira de suas quotas somando a esses mais um objeto.

Mas, isso não garante que a distribuição dos objetos seja justa, além do que, utilizando o arredondamento convencional para dividi-los, poderíamos gerar alguns problemas como, por exemplo, chegar ao final de nossa partilha e constatar que o total de objetos que distribuímos é superior ou inferior aquele que inicialmente queríamos distribuir.

"Apesar de tudo, se este óbvio e elementar arredondamento funcionasse sempre, todo o processo de divisão proporcional seria matematicamente trivial (e não havia razão para este estudo)".[4]

Por tudo isso, iremos apresentar alguns métodos de divisão proporcional, que tentam superar tais problemas.

2.2.1 Método de Hamilton [5]

Alexander Hamilton, intelectual revolucionário norte-americano nascido em 1757 na ilha de Nevis, nas Antilhas. Foi um dos fundadores dos Estados Unidos, cujas idéias firmaram as bases da constituição desse país, elaborada na Convenção da Filadélfia, no final do século XVIII. De origem humilde, autodidata, estudou matemática, história e ciências naturais. Escreveu ensaios que difundiam suas idéias sobre o movimento de independência. Passou a estudar no King's College, depois na Universidade de Colúmbia, e engajou-se na guerra da independência, como capitão de uma companhia de artilharia, atraindo a atenção de George Washington, que o tomou como ajudante de campo e secretário particular, no posto de tenente coronel, e terminou o curso de direito (1782), ainda durante a guerra pela independência. Como primeiro secretário do Tesouro (1789-1795), consolidou a dívida pública da União e dos estados, fundou o banco nacional e lançou os fundamentos da industrialização do país. Morreu em 1804, na cidade de Nova York, em conseqüência de ferimentos mortais decorrentes de um duelo com um rival, o político Aaron Burr.

Durante a convenção da Filadélfia (1787), Hamilton propõe um método para determinar a representatividade de cada estado, junto a Câmara dos Representantes dos Estados Unidos, ou seja, para compor a Câmara dos Representantes, cada estado deveria ter direito a um determinado número de vagas, dependendo do número de habitantes do estado. Com isso tentava-se manter uma representatividade, com relação a população, igual para todos os estados. O método de Hamilton ainda hoje é utilizado por países como Suécia e Costa Rica.

Vamos agora ver como funciona esse método, observe o quadro 12 abaixo que traz os passos para o emprego do mesmo.

Método de Hamilton

1º passo – Calcular o quociente eleitoral;

2º passo – Para cada concorrente, calcular a quota;

3º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota mínima;

4º passo – Dividir os objetos que sobrarem (um a um) pelos concorrentes, por ordem decrescente das partes decimais das suas quotas.

Quadro 12: Descrição do Método de Hamilton

[4] **A matemática da divisão proporcional**. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/MAcs/Textos_Macs/Partilha_nas_eleicoes.pdf > Acesso em: 24 jun. 2003.

[5] O método de Hamilton também é conhecido como o método do maior resto e algumas vezes como método de Viton.

Para que possamos entender melhor como funciona este método, iremos fazer uso do Exemplo P1 apresentado anteriormente, o qual tem seus dados apresentados através da tabela 28.

Através do método de Hamilton, que vimos há pouco, podemos determinar a distribuição das 250 vagas ao congresso, entre os seis estados da República de Parador, considerando o número de habitantes de cada estado.

Seguindo o que determina o método de Hamilton, vamos inicialmente calcular o quociente eleitoral dessa divisão proporcional. Notemos que esse exemplo já foi utilizado anteriormente, quando exemplificamos o funcionamento tanto do quociente eleitoral, quanto das quotas, portanto já sabemos quanto é o quociente eleitoral dessa divisão de vagas, ou seja, o quociente eleitoral para esse exemplo é 50.000.

Para atender os passos que são determinados pelo método de Hamilton, agora seria necessário que nós encontrássemos a quota de cada estado, mas como dissemos anteriormente, essas quotas nós já sabemos, podemos observar o quadro 11, que nos mostra como foram obtidas essas quotas.

Segundo o método que estamos vendo, o próximo passo seria dar a cada estado um número de vagas igual a suas quotas mínimas, as quais podem ser vistas através da tabela 29 mostrada anteriormente.

Note, que se distribuirmos a quantidade de vagas seguindo o que determina a quota mínima de cada estado, iríamos distribuir somente 246 vagas, restando ainda quatro vagas a serem distribuídas entre os seis estados de Parador. Então, seguindo ainda o método de Hamilton, temos que distribuir essas quatro vagas restantes. Para isso vamos utilizar a parte decimal das quotas dos concorrentes, ou seja, aquele estado que tiver a maior parte decimal entre os seis levará a primeira das vagas que restam, a segunda irá para o estado que tiver a maior parte decimal entre os outros cinco estados, já que aquele que ganhou uma das vagas anteriormente não participa mais da distribuição do restante das vagas, assim por diante, até que sejam distribuídas as quatro vagas que faltam. Com isso, o estado de Açúcar ganhará mais uma vaga, Diamante ganhará outra vaga, Felicidade também ganhará uma vaga e por último o estado da Bahia levará a última vaga que resta. Dessa forma concluímos a distribuição das vagas ao congresso de Parador entre os seus seis estados, utilizando para tal o método de Hamilton. Acompanhe na tabela 30 a distribuição final das vagas ao congresso de Parador.

Tabela 30

República de Parador – Divisão proporcional baseada no método de Hamilton

Estado	População	Quota	Quota mínima	Lugares sobrantes	Distribuição final de lugares
A	1.646.000	32,92	32	1 (1º)	33
B	6.936.000	138,72	138	1 (4º)	139
C	154.000	3,08	3		3
D	2.091.000	41,82	41	1 (2º)	42
E	685.000	13,70	13		13
F	988.000	19,76	19	1 (3º)	20
Total	12.500.000	250,00	246	4	250

Portanto, segundo o método de Hamilton, o congresso da República de Parador será formado por 33 representantes do estado de Açúcar, 139 representantes do estado da Bahia, 3 representantes do estado de Café, 42 representantes de Diamante, 13 representantes de Esmeralda e 20 representantes do estado de Felicidade.

À primeira vista o método de Hamilton nos parece muito justo, mas se observarmos, ele beneficia os estados maiores contra os menores, o exemplo acima nos mostra isso.

<u>Exercício:</u> Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes a votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método de Hamilton.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)				**Número de vagas: 21** **Quociente Eleitoral: ______________**		
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota**	**Quota mínima**	**Parte decimal**	**Vagas extras**	**Divisão final**
Partido A	43.227					
Partido B	9.492					
Coligação C	31.461					
Coligação D	10.927					
Partido E	3.596					
Coligação F	9.162					
Partido G	8.333					
Partido H	4.802					
TOTAL	**121.000**					

2.2.2 Método de Jefferson [6]

Thomas Jefferson nasceu em 13 de abril de 1743 e veio a falecer em 04 de julho de 1826. Estadista, diplomata e pensador político norte-americano, Thomas Jefferson foi um dos maiores presidentes dos Estados Unidos, e o redator da Declaração de Independência do país. Eleito presidente em 1800 acabou reeleito em 1809. O talento e os interesses de Jefferson eram surpreendentemente variados, tornou-se o mais notável arquiteto norte-americano de seu tempo, tendo projetado o Capitólio, a Universidade de Virgínia e sua própria residência (Monticello), além de ter inventado a cadeira giratória. Sua Biblioteca tornou-se o núcleo da Biblioteca do Congresso (com 6.500 volumes). Elaborou o Código Civil da Virgínia, fundou a Universidade deste estado, projetou o sistema decimal da moeda norte-americana com a adoção do dólar e dos centavos de dólar, escreveu o Manual de Prática Parlamentar, organizou vocabulários de línguas indígenas e tocava violino em concertos de música de câmara.

Thomas Jefferson retirou-se em 1809 para uma de suas propriedades rurais na Virgínia, entregando-se à tarefa da fundação da Universidade do estado. No fim de sua vida, teve dificuldades econômicas, sendo obrigado a vender sua biblioteca.

Jefferson propôs um método, assim como Hamilton, para determinar a representatividade de cada estado, junto à Câmara dos representantes dos Estados Unidos, o qual foi apresentado na convenção da Filadélfia em 1787. Na época o seu método foi o escolhido para a divisão das vagas entre os estados, sendo o mesmo utilizado por cinco décadas (até 1842). Atualmente ainda é utilizado em muitos países como: Portugal, Áustria, Finlândia, Alemanha e Países Baixos.

A seguir apresentamos o quadro 13, que traz os passos para a utilização do método de Thomas Jefferson.

---

[6] O método de Jefferson é também conhecido como o método dos maiores divisores, e na Europa é também chamado de método de D’Hondt.

Método de Jefferson

1º passo – Encontrar um quociente modificado, tal que quando cada quota modificada for arredondada por falta, a soma dessas quotas dá exatamente o número de objetos a serem distribuídos;

2º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota mínima modificada.

Quadro 13: Descrição do Método de Jefferson

A fim de compreendermos como funciona este método, vamos verificar no Exemplo P1, cujos dados estão expressos na tabela 28, como ficaria a distribuição das vagas ao congresso entre os estados da República de Parador.

Como o método determina, devemos encontrar um valor para o quociente modificado, que será utilizado nesse exemplo. Como já falamos anteriormente, este divisor será determinado através do processo de tentativa e erro, ou seja, para o método de Jefferson, vamos determinar um valor para o quociente modificado e verificar se com ele a soma das quotas mínimas modificadas será igual ao total de vagas que temos para distribuir, caso contrário, tentaremos outro valor, até conseguirmos distribuir o total de vagas que temos. Vamos utilizar um divisor modificado igual a 49.450, para o Exemplo P1, cuja distribuição está expressa na tabela 31 abaixo.

Tabela 31
República de Parador – Divisão proporcional baseada no método de Jefferson

Estado	População	Quota modificada	Quota mínima modificada
A	1.646.000	33,29	33
B	6.936.000	140,26	140
C	154.000	3,11	3
D	2.091.000	42,29	42
E	685.000	13,85	13
F	988.000	19,98	19
Total	12.500.000	-----	250

Para calcular a divisão proporcional desse exemplo, pelo método de Jefferson, utilizamos como divisor modificado 49.450, porém esse é um dos valores possíveis a serem utilizados para tal divisão, já que podemos tomar qualquer valor real que se encontre no intervalo [49.401 , 49.542], sem alterar a nossa distribuição de vagas entre os estados. Observemos que o intervalo de valores possíveis para o quociente modificado é menor do que o quociente eleitoral (50.000 nesse exemplo), isso sempre acontecerá, já que o método de Jefferson utiliza a quota mínima modificada, com isso o nosso quociente modificado terá que ser sempre um valor menor do que o quociente eleitoral, independente da situação.

Para determinar as quotas modificadas, fizemos um processo semelhante ao utilizado para encontrar a quota para o método de Hamilton, ou seja, fizemos a razão entre a população de cada estado pelo quociente modificado (49.450) e após determinamos a quota mínima modificada de cada um deles, o que nos levou a distribuição final das vagas ao congresso de Parador.

Conforme podemos observar na tabela acima, o estado de Açúcar consegui 33 vagas, Bahia 140 vagas, Café consegui um total de 3 vagas, o estado de Diamante 42 vagas, Esmeralda 13 vagas e por último o estado de Felicidade adquiriu o direito a 19 vagas para o congresso da República de Parador.

Os dois métodos vistos até aqui são parecidos quando falamos em favorecimento de algum candidato, já que tanto Hamilton quanto Jefferson, acabam por favorecer os candidatos que tem uma votação superior em relação aos demais, se pensarmos numa eleição, ambos os métodos favorecem os grandes partidos, tendo em vista que eles utilizam as quotas mínimas dos concorrentes.

Exercício: Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes a votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método de Jefferson.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)		Número de vagas: 21 Quociente Modificado: ______________	
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota modificada**	**Quota mínima modificada**
Partido A	43.227		
Partido B	9.492		
Coligação C	31.461		
Coligação D	10.927		
Partido E	3.596		
Coligação F	9.162		
Partido G	8.333		
Partido H	4.802		
TOTAL	**121.000**		

2.2.3 Método de Adams

John Quincy Adams, nasceu em 1767 em Braintree, hoje Quincy, Massachusetts. Foi o sexto Presidente dos Estados Unidos (1825-1829), ficou na história da nação como diplomata de atuação decisiva na segunda guerra da Independência e na elaboração da *Doutrina Monroe*, além de ter sido um dos maiores inimigos da escravidão em seu país. Filho de John Adams, segundo presidente dos Estados Unidos, estudou na França e nos Países Baixos, depois em Harvard, onde se formou em direito (1787), foi eleito senador (1803), mas o conflito com os federalistas o levou à renúncia (1808). Sua participação nas negociações da segunda guerra da independência (1814) foi determinante. Secretário de estado do governo de James Monroe (1817-1825), e seu substituto na presidência do país, atuou como principal responsável pelo *Tratado Transcontinental* com a Espanha, que estendeu as fronteiras americanas até o oceano Pacífico (1819), e pela *Doutrina Monroe*, que vedou as Américas à colonização européia. Ao sair da presidência desenvolveu uma intensa e importante atividade como congressista. Defendeu a abolição da escravatura e aprovou a emenda constitucional que tornava livres todos os nascidos a partir de 04 de julho (1842). Durante um inflamado discurso no Congresso contra a guerra com o México, sofreu um derrame cerebral e morreu dois dias depois em Washington, em 23 de fevereiro de 1848.

Adams por volta de 1840 propôs um método, muito parecido com o de Jefferson, para tentar resolver o problema de divisão proporcional. Seu método consiste em encontrar um quociente modificado, tal que quando arredondamos as quotas modificadas dos candidatos por excesso, ou seja, quando utilizamos suas quotas máximas modificadas, a soma das mesmas resulte o número de objetos que estamos querendo distribuir entre os concorrentes.

Abaixo apresentamos o quadro 14, que traz os passos para a utilização do método de Adams.

Método de Adams

1º passo – Encontrar um quociente modificado, tal que quando cada quota modificada for arredondada por excesso, a soma dessas quotas dá exatamente o número de objetos a serem distribuídos;

2º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota máxima modificada.

Quadro 14: Descrição do Método de Adams

Assim como já fizemos com os dois primeiros métodos, vamos verificar como ficaria a divisão das vagas ao congresso de Parador entre seus seis estados, conforme o Exemplo P1, cujos dados são apresentados através da tabela 28.

Para podermos utilizar o método de Adams, primeiramente devemos encontrar um valor para o nosso quociente modificado, o qual deve fazer com que todas as vagas sejam distribuídas entre os seis estados de Parador. Diferente do que acontece com o método de Jefferson, aqui, o nosso quociente modificado será sempre um valor superior ao quociente eleitoral, já que este método utiliza a quota máxima modificada para distribuir os objetos. Portanto, vamos usar o valor de 50.800 como nosso quociente modificado, embora pudéssemos, como no método de Jefferson, utilizar outros valores, sem alterar a distribuição das vagas, os quais devem estar contidos no intervalo real [50.628 , 50.999]. A distribuição das 250 vagas entre os seis estados, utilizando esse quociente modificado, é apresentado na tabela 32 abaixo:

Tabela 32
República de Parador – Divisão proporcional baseada no método de Adams

Estado	População	Quota modificada	Quota máxima modificada
A	1.646.000	32,40	33
B	6.936.000	136,54	137
C	154.000	3,03	4
D	2.091.000	41,16	42
E	685.000	13,48	14
F	988.000	19,45	20
Total	12.500.000	-----	250

Aplicando o método de Adams na divisão proporcional das vagas ao congresso do Exemplo P1, chegamos ao seguinte resultado: o estado de Açúcar tem direito a 33 vagas, Bahia fica com 137 vagas, Café com 4 vagas ao congresso, Diamante deve ganhar 42 vagas, o estado de Esmeralda tem direito a 14 vagas e o estado de Felicidade deve receber 20 vagas para o congresso de Parador.

Note, que diferente do que aconteceu nos métodos anteriores, o método de Adams acabou favorecendo os estados que têm uma população menor em relação aos outros estados. Esse método, em geral, favorece aqueles competidores que estão em desvantagem frente a seus adversários, ou seja, pensando novamente numa eleição ao poder legislativo, ele favorece os pequenos partidos. Isso ocorre, porque este método utiliza as quotas máximas modificadas, então mesmo que um concorrente faça pouquíssimos votos, ele ainda assim terá direito a uma das vagas que estão em disputa.

<u>Exercício:</u> Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes a votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método de Adams.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)		**Número de vagas: 21 Quociente Modificado: ______________**	
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota modificada**	**Quota máxima modificada**
Partido A	43.227		
Partido B	9.492		
Coligação C	31.461		
Coligação D	10.927		
Partido E	3.596		
Coligação F	9.162		
Partido G	8.333		
Partido H	4.802		
TOTAL	**121.000**		

2.2.4 Método de Webster [7]

Daniel Webster nasceu em 1782, em Salisbury, um ano antes da vitória da Guerra da Independência dos Estados Unidos. Dotado de prodigiosa memória, desde jovem dedicou-se ao estudo das letras clássicas, com especial atenção aos oradores da antiguidade. Lia e decorava Cícero, para depois declamá-lo. Ainda moço, começou a revelar-se um prodigioso orador.

Formou-se em Direito, iniciando uma triunfal carreira nos tribunais norte-americanos. Logo o povo norte-americano o levou ao Congresso, e daí como secretário de Estado dos presidentes Harrison e Tyler. Atuou na área política, de 1813 a 1852.

Daniel Webster sofreu muito com os constantes atritos havidos entre o Norte e o Sul, o que se agravou em 1850, com a campanha abolicionista, onde acabou se manifestando a favor da abolição da escravatura, como a maioria dos políticos norte-americanos, mas, ao constatar que essa luta poderia transformar-se em luta sangrenta, recuou, para evitar um mal nacional maior.

Em 1832, Daniel Webster propõe uma idéia básica para o problema de divisão proporcional. Seu método consiste, assim como o de Jefferson e de Adams, em encontrar um quociente modificado capaz de fazer com que consigamos dividir todos os objetos que temos entre os concorrentes, de forma que cada um tenha direito a uma parte inteira de objetos. Só que ao contrário dos métodos anteriores, para definir o número de objetos que cada concorrente terá direito, Webster utiliza o método de arredondamento convencional das quotas modificadas, ou seja, caso a parte decimal da quota de cada concorrente for inferior a 0,50, iremos arredondar essa quota para o inteiro inferior mais próximo, caso contrário teremos que arredondar a quota para o inteiro superior mais próximo. Vamos exemplificar isso, supondo que um determinado concorrente tenha uma quota modificada igual a 2,39, pelo processo de arredondamento convencional, a sua quota será alterada para 2.

Para resumir o que acabamos de dizer, apresentamos abaixo o quadro 15, que traz os passos que devem ser seguidos para a utilização do método de Webster.

[7] Método também conhecido como método de Webster-Wilkox ou método da maior fração.

Método de Webster

1º passo – Encontrar um quociente modificado de modo que, quando se arredondam pelo processo convencional as quotas modificadas dos concorrentes, a soma dessas quotas dá exatamente o número de objetos que temos que dividir;

2º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota modificada arredondada pelo processo convencional.

Quadro 15: Descrição do Método de Webster

O método de Webster é muito parecido com os métodos de Jefferson e de Adams, porém um pouco mais difícil de utilizar, já que, aqui o quociente modificado que temos que encontrar pode ser maior, menor ou igual ao quociente eleitoral.

Iremos verificar como ficaria a divisão das vagas para o congresso de Parador entre seus seis estados, conforme o Exemplo P1, cujos dados são apresentados através da tabela 28, caso utilizássemos o método de Webster para tal divisão proporcional.

Para utilizar este método, inicialmente teremos que determinar o valor que será usado como quociente modificado, ou seja, aquele valor que atende a determinação do método, fazendo com que todas as vagas sejam distribuídos entre os candidatos. Através de várias tentativas, chegamos ao intervalo de números reais [50.080 , 50.385], onde qualquer que seja o número que utilizarmos deste intervalo, irá satisfazer a condição imposta pelo método de Webster para a distribuição das vagas do Exemplo P1. Portanto, iremos utilizar o valor de 50.200 como quociente modificado para o método de Webster.

Agora que determinamos o valor do quociente modificado, que satisfaz o método acima, iremos distribuir as vagas existentes entre os seis estados. Essa distribuição é apresentada através da tabela 33.

Tabela 33
República de Parador – Divisão proporcional baseada no método de Webster

Estado	População	Quota modificada	Quota modificada arredondada pelo processo convencional
A	1.646.000	32,79	33
B	6.936.000	138,17	138
C	154.000	3,07	3
D	2.091.000	41,65	42
E	685.000	13,65	14
F	988.000	19,68	20
Total	12.500.000	-----	250

No Exemplo P1, segundo a tabela acima, através do método de Webster, a distribuição das vagas ao congresso de Parador ficou assim: o estado de Açúcar ficou com 33 vagas, Bahia com 138 vagas, Café com 3 vagas, Diamante com 42 vagas para o congresso, Esmeralda ficou com 14 vagas e o estado de Felicidade ficou com as outras 20 vagas restantes.

O método de Webster, mesmo não sendo muito visível, apresenta uma tendência a beneficiar os partidos com menor votação.

<u>Exercício:</u> Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes a votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método de Webster.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)		**Número de vagas: 21 Quociente Modificado: ______________**	
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota modificada**	**Quota final**
Partido A	43.227		
Partido B	9.492		
Coligação C	31.461		
Coligação D	10.927		
Partido E	3.596		
Coligação F	9.162		
Partido G	8.333		
Partido H	4.802		
TOTAL	**121.000**		

2.2.5 Método de Huntington-Hill

Este método foi desenvolvido por volta de 1911, pelo estatístico Joseph A. Hill e pelo professor de Mecânica e Matemática da Universidade de Harvard Edward V. Huntington. Em 1929 esse método foi recomendado por um grupo de matemáticos que investigou muitos métodos de divisão proporcional, segundo este grupo, o método de Huntington-Hill é o melhor possível para divisões proporcionais.

A partir de 1941, através da lei assinada pelo presidente americano Franklin D. Roosevelt, o método de Huntington-Hill passou a ser utilizado para a distribuição dos lugares no Congresso, sendo o mesmo usado até hoje.

O método de Huntington-Hill é muito parecido com o método de Webster, que vimos há pouco. A diferença entre esses dois métodos está somente na maneira como é feito o arredondamento das quotas. Aqui, as quotas serão arredondadas, usando a regra de arredondamento de Huntington-Hill, que consiste em determinarmos um chamado "ponto de viragem" (H) para cada quota, o qual nos indicará se a quota deve ser arredondada por falta ou por excesso, isso, acontece quando comparamos a quota com o seu ponto de viragem.

Regra de arredondamento de Huntington-Hill

Se a quota está entre L (quota mínima) e L+1 (quota máxima), o ponto de viragem é H = $\sqrt{L*(L+1)}$. Caso a quota seja inferior a H, arredonda-se para o inteiro inferior mais próximo, caso contrário arredonda-se para o inteiro superior mais próximo.

Vamos exemplificar o que diz a regra de Huntington-Hill exposta acima. Supomos que em uma divisão proporcional qualquer, um determinado concorrente tenha como quota o valor de 34,56, através da regra de arredondamento acima, o ponto de viragem dessa quota será H = $\sqrt{34*35}$ = $\sqrt{1.190}$ ≈ 34,50, então a sua quota arredondada pelo método de Huntington-Hill será 35, já que sua quota (34,56) é maior que o ponto de viragem (34,50).

Agora que já vimos como funciona a regra de arredondamento utilizada pelo método de Huntington-Hill, podemos defini-lo. Abaixo apresentamos o quadro 16, que mostra os passos para a utilização deste método.

Método de Huntington-Hill

1º passo – Encontrar um quociente modificado de modo que, quando se arredondam pela regra de Huntington-Hill as quotas modificadas dos concorrentes, a soma dessas quotas dá exatamente o número de objetos que temos que dividir;

2º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota modificada arredondada pela regra de Huntington-Hill.

Quadro 16: Descrição do Método de Huntington-Hill

Agora, vamos ver como ficaria a distribuição das vagas ao congresso de Parador entre os seus seis estados, conforme o Exemplo P1.

Para utilizar este método, inicialmente teremos que determinar o valor que será usado como quociente modificado, ou seja, aquele valor que atende a determinação do método, fazendo com que todas as vagas sejam distribuídas entre os candidatos. Através de várias tentativas, chegamos ao intervalo de números reais [50.080 , 50.385], o qual, é idêntico ao intervalo utilizado no método de Webster, onde qualquer que seja o número que utilizarmos deste intervalo, irá satisfazer a condição imposta pelo método de Huntington-Hill para a distribuição das vagas do Exemplo P1. Portanto, iremos utilizar o valor de 50.200, o qual, também foi utilizado no método de Webster.

Agora, iremos distribuir as vagas existentes entre os seis estados. Essa distribuição é apresentada através da tabela 34 abaixo.

Tabela 34
República de Parador – Divisão proporcional baseada no método de Huntington-Hill

Estado	População	Quota modificada	Quota modificada arredondada pela regra de Huntington-Hill
A	1.646.000	32,79	33
B	6.936.000	138,17	138
C	154.000	3,07	3
D	2.091.000	41,65	42
E	685.000	13,65	14
F	988.000	19,68	20
Total	12.500.000	-----	250

Antes de analisarmos o resultado dessa divisão proporcional, vamos mostrar como foram e quais são os pontos de viragem, que determinaram as quotas modificadas arredondadas pela regra de Huntington-Hill, acompanhe através da tabela 35 abaixo.

Tabela 35
Regra de arredondamento de Huntington-Hill – República de Parador

Estado	Quota modificada	Quota mínima modificada	Quota máxima modificada	Ponto de viragem (H)
A	32,79	32	33	32,50
B	138,17	138	139	138,50
C	3,07	3	4	3,46
D	41,65	41	42	41,50
E	13,65	13	14	13,49
F	19,68	19	20	19,49

Se compararmos os resultados apresentados nos métodos de Webster e de Huntington-Hill, veremos que as distribuições dos dois são iguais, isso ocorre porque as quotas modificadas, exceto a do estado de Café, apresentam números grandes, o que faz com que a parte decimal do ponto de viragem (H), seja praticamente o mesmo do método convencional, ou seja, 0,50. Os métodos poderão produzir resultados diferentes, em situações onde as quotas modificadas dos concorrentes forem baixas, mas nem isso garante resultados deferentes. Portanto os métodos de Webster e de Huntington-Hill são praticamente, salvo raras exceções, idênticos em seus resultados.

Neste método é bastante óbvio que o favorecimento é dado aos partidos de votações menos expressivas, assim como o método de Webster. Vamos imaginar que numa disputa ao poder legislativo um determinado partido tenha recebido um único voto, e o quociente modificado da distribuição é 100, por Huntington-Hill, ele acabará recebendo uma vaga, já que seu ponto de viragem (H) será $\sqrt{0*1} = 0$ e sua quota será 0,01.

<u>Exercício:</u> Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes à votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método de Huntington-Hill.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)		**Número de vagas: 21 Quociente Modificado: ______________**		
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota modificada**	**Ponto de viragem**	**Quota final**
Partido A	43.227			
Partido B	9.492			
Coligação C	31.461			
Coligação D	10.927			
Partido E	3.596			
Coligação F	9.162			
Partido G	8.333			
Partido H	4.802			
TOTAL	**121.000**			

2.2.6 Método utilizado nas eleições proporcionais brasileiras

O último método que veremos para divisão proporcional é o utilizado no Brasil para a escolha de vereadores, deputados estaduais e deputados federais.

Embora, Tannenbaum (2004, p.148) diga que o Brasil utiliza para a distribuição de cadeiras parlamentares o método de D'Hondt ou como vimos o método de Jefferson, veremos que as semelhanças praticamente são inexistentes, por isso resolvemos estudar o método brasileiro em separado.

Este método é apresentamos no quadro 17, que nos mostra as etapas do método que devem ser seguidas.

Método utilizado nas eleições proporcionais brasileiras
1º passo – Calcular o quociente eleitoral;
2º passo – Os concorrentes que não atingirem o quociente eleitoral estarão eliminados da divisão dos objetos;
3º passo – Para cada concorrente que permanecer na disputa, calcular sua quota;
4º passo – Atribuir a cada concorrente a sua quota mínima;
5º passo – Dividir os objetos que sobraram pelos concorrentes que atingirem o quociente eleitoral, através do cálculo de suas médias.

Quadro 17: Descrição do Método de divisão proporcional utilizado no Brasil.

No quadro acima, observamos que este método utiliza o quociente eleitoral, o qual, é determinado através da razão entre o número total de votos válidos e o número de vagas existentes. No Brasil, conforme Lei nº 9.504/97, art 5º, nas eleições proporcionais contam-se como votos válidos apenas aqueles dados aos candidatos ou as legendas partidárias, diferente do que era praticado anteriormente a esta lei, onde, incluíam-se também os votos brancos na computação dos votos válidos.

Aqui, o quociente eleitoral, diferente, por exemplo, do método de Hamilton, deverá ser um número inteiro, conforme determina a lei que regulamenta as eleições no Brasil.

> Determina-se o quociente eleitoral dividindo-se o número de votos válidos apurados pelo de lugares a preencher em cada circunscrição eleitoral, desprezada a fração se igual ou inferior a meio, equivalente a um, se superior (Lei nº 4.737/65, art. 106).

Portanto, o quociente eleitoral neste método é um pouco diferente daquele que vimos quando tratamos, neste capítulo, dos conceitos básicos da divisão proporcional. Para que possamos entender melhor como se calcula do quociente eleitoral para as eleições parlamentares no Brasil, vamos usar o Exemplo P2, que é apresentado abaixo.

<u>Exemplo P2</u>: Numa cidade brasileira ocorreu a eleição municipal, na qual concorreram nessa disputa os seguintes partidos ou coligações: Partido A, Coligação B, Partido C e Coligação D. Estes partidos ou coligações, além de disputarem o cargo de prefeito, disputam também as nove vagas à Câmara de Vereadores. Abaixo apresentamos, através da tabela 36, o resultado da apuração dos votos para o poder legislativo desta cidade.

Tabela 36
Apuração dos votos – disputa à Câmara de Vereadores da cidade

Partido/Coligação	Votos nominais + votos na legenda
Partido A	1.927
Coligação B	1.653
Partido C	660
Coligação D	2.208
Votos em branco	299
Votos nulos	264
Total	7.011

Vamos encontrar o quociente eleitoral dessa disputa, ou seja, a razão entre o total de votos válidos e o número de vagas a distribuir. O quociente eleitoral, segundo os dados apresentados na tabela 36 acima, será igual a $\frac{6.448}{9}$ = 716,4444... , fazendo o arredondamento, chegamos ao quociente eleitoral definitivo a ser utilizado que é 716.

O método ainda nos diz que, os partidos ou coligações que não atingirem o quociente eleitoral, estão excluídos da divisão de vagas. Utilizando nosso exemplo acima, podemos perceber que o Partido C infelizmente não terá direito a nenhuma vaga nessa disputa. Perceba, que os outros partidos ou coligações conseguem atingir o quociente eleitoral. Caso nenhum dos concorrentes tivesse atingido esse número, teríamos que distribuir as vagas conforme determina o art. 111 da Lei n^{o} 4.737/65, ou seja, “Se nenhum partido ou coligação alcançar o quociente eleitoral, considerar-se-ão eleitos, até serem preenchidos todos os lugares, os candidatos mais votados”.

Voltando ao Exemplo P2, vamos agora determinar a quota de cada partido ou coligação que permaneceu na disputa das vagas à Câmara de Vereadores. O cálculo destas quotas é semelhante ao que nós já vínhamos fazendo para os métodos anteriores, ou seja, é a razão entre os votos alcançados por cada partido ou coligação e o quociente eleitoral. Abaixo apresentamos, através da tabela 37, as quotas de cada partido ou coligação.

Tabela 37
Cálculo das quotas – disputa à Câmara de Vereadores da cidade

Partido/Coligação	Votos nominais + votos na legenda	Cálculo das quotas
Partido A	1.927	1.927 / 716 = 2,6913
Coligação B	1.653	1.653 / 716 = 2,3087
Coligação D	2.208	2.208 / 716 = 3,0838

Seguindo o que determina o método, devemos atribuir a cada concorrente as vagas que eles asseguraram através do cálculo de suas quotas, ou seja, cada partido ou coligação terá direito a um número de vagas igual à sua quota mínima, conforme Lei n^{o} 4.737/65 que diz em seu art.108 “Estarão eleitos tantos candidatos registrados por partido ou coligação quantos o respectivo quociente partidário (quota mínima) indicar, na ordem da votação nominal que cada um tenha recebido”.

Portanto, o partido A já tem assegurado duas vagas à Câmara de Vereadores, a coligação B tem direito a duas vagas e a coligação D conseguiu três vagas ao poder legislativo da cidade. Até agora foram distribuídas somente sete das nove vagas à Câmara de Vereadores, faltando ser distribuídas duas vagas, as quais serão dadas aos concorrentes conforme determina o quinto passo deste método.

Esse quinto passo está baseado na Lei 4.737/65, art. 109, que determina que a distribuição das vagas restantes deve ser feita pelas médias de votos para cada vaga obtida dos concorrentes, ou seja, deve-se calcular a média para cada concorrente, a qual é obtida pela razão do número de votos do partido ou coligação e o número de vagas que cada concorrente já garantiu até o momento acrescida de uma unidade, o processo deve ser repetido até conseguirmos distribuir todas as vagas restantes.

No Exemplo P2, temos que distribuir duas vagas ainda, portanto devemos realizar duas rodadas de cálculos das médias, os quais são apresentados na tabela 38 abaixo.

Tabela 38
Cálculo das médias – disputa à Câmara de Vereadores da cidade

Partido/Coligação	Votos totais	Cálculo da 1ª média	Cálculo da 2ª média
Partido A	1.927	1.927 / (2 +1) = 642,3333 (1)	1.927 / (3 +1) = 481,75
Coligação B	1.653	1.653 / (2 +1) = 551	1.653 / (2 +1) = 551
Coligação D	2.208	2.208 / (3 +1) = 552	2.208 / (3 +1) = 552 (2)

(1) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela primeira média.
(2) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela segunda média.

Observamos na tabela acima que o partido A consegue mais uma vaga, já que possui a maior das médias em comparação com os outros concorrentes e a coligação D obtém pela segunda média a última vaga. Portanto, chegamos a distribuição total das vagas, as quais estão expressas na tabela 39 abaixo.

Tabela 39
Distribuição final das vagas – disputa à Câmara de Vereadores da cidade

Partido/Coligação	Votos totais	Quota	Quota mínima	Pelas médias	Distribuição final
Partido A	1.927	2,6913	2	1 (1ª)	3
Coligação B	1.653	2,3087	2		2
Partido C	660	0,9218	0		0
Coligação D	2.208	3,0838	3	1 (2ª)	4
Total	-----	-----	7	2	9

Ao final do processo de divisão proporcional das vagas do Exemplo P2, chegamos a seguinte distribuição: o partido A consegue um total de três vagas, a coligação B consegue duas vagas à Câmara de Vereadores, o partido C não consegue nenhuma das vagas e a coligação D obtém quatro vagas ao legislativo da cidade.

Agora que vimos como funciona o método utilizado no Brasil para eleições proporcionais, vamos voltar ao Exemplo P1, o qual tem seus dados expostos através da tabela 28, para verificarmos através deste método como ficaria aquela distribuição.

O quociente eleitoral que iremos utilizar é o mesmo utilizado no método de Hamilton, ou seja, o quociente eleitoral é 50.000.

Como nenhum dos estados do exemplo P2 tem uma população inferior ao quociente eleitoral, todos eles participarão da distribuição de vagas do Congresso de Parador. Com isso, a distribuição das vagas pela quota mínima será igual à apresentada no método de Hamilton, o restante das vagas serão distribuídas pelas médias dos estados. Abaixo mostramos a tabela 40, que traz a distribuição final das vagas alcançada pelos estados.

Tabela 40
República de Parador - Divisão proporcional baseada no método brasileiro

Estado	População	Quota	Quota mínima	Pelas médias	Distribuição final
A	1.646.000	32,92	32	1 (2ª)	33
B	6.936.000	138,72	138	1 (1ª) + 1 (4ª)	140
C	154.000	3,08	3		3
D	2.091.000	41,82	41	1 (3ª)	42
E	685.000	13,70	13		13
F	988.000	19,76	19		19
Total	12.500.000	-----	246	4	250

Note que através das quotas mínimas foram distribuídas somente 246 vagas, restando ainda quatro vagas a serem distribuídas, as quais tiveram que ser submetidas à apreciação das médias dos estados para que pudéssemos determinar quais teriam direito às mesmas. Esses cálculos são apresentados através da tabela 41 abaixo, observe.

Tabela 41
Médias – Congresso da República de Parador

Estado	População	1ª média	2ª média	3ª média	4ª média
A	1.646.000	49.878,79	49.878,79 (2)	48.411,76	48.411,76
B	6.936.000	49.899,28 (1)	49.542,86	49.542,86	49.542,86 (4)
C	154.000	38.500,00	38.500,00	38.500,00	38.500,00
D	2.091.000	49.785,71	49.785,71	49.785,71 (3)	48.627,91
E	685.000	48.928,57	48.928,57	48.928,57	48.928,57
F	988.000	49.400,00	49.400,00	49.400,00	49.400,00

(1) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela primeira média.
(2) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela segunda média.
(3) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela terceira média.
(4) Partido ou coligação que ganha uma vaga pela quarta média.

Podemos observar que pelo método utilizado no Brasil para eleições proporcionais, o Congresso de Parador será formado por: 33 representantes do estado de Açúcar, 140 representantes da Bahia, 3 representantes do estado de Café, 42 representantes de Diamante, 13 de Esmeralda e por 19 representantes do estado de Felicidade.

O método que o Brasil utiliza nas suas eleições do poder legislativo favorece os partidos grandes, partidos que tenham uma votação grande. Podemos afirmar isso tendo em vista que, o método acaba por eliminar os partidos que não conseguem atingir o quociente eleitoral, ou seja, elimina os partidos pequenos.

Exercício: Em uma determinada cidade, foi realizada uma eleição para escolha dos seus 21 vereadores. Abaixo, apresentamos os dados referentes à votação recebida por cada partido ou coligação nessa eleição. Determine quantas vagas cada partido terá direito na câmara de vereadores desse município, segundo o método utilizado no Brasil.

RESUMO DE VOTAÇÃO DOS PARTIDOS (Vereadores)			**Número de vagas: 21 Quociente eleitoral: ______________**		
Partido/Coligação	**Votos**	**Quota**	**Quota mínima**	**Vagas extras**	**Divisão final**
Partido A	43.227				
Partido B	9.492				
Coligação C	31.461				
Coligação D	10.927				
Partido E	3.596				
Coligação F	9.162				
Partido G	8.333				
Partido H	4.802				
TOTAL	**121.000**				

2.3 Os métodos aplicados a alguns exemplos

Agora que vimos como funcionam os seis métodos de divisão proporcional, vamos aplicá-los em dois exemplos, sendo um de uma situação sem conotação eleitoral e outro extraído das eleições de 2002, para escolha dos deputados estaduais do Rio Grande do Sul. Como já sabemos usar os métodos, nestes exemplos não iremos desenvolver cada um deles, iremos somente apresentar os resultados da divisão proporcional de cada exemplo, através dos seis métodos.

Exemplo P3: Neste exemplo trabalharemos com uma situação real. Os dados que apresentaremos através da tabela 42, são referentes às eleições de 2002, para escolha dos 55 Deputados Estaduais do Estado do Rio Grande do Sul. Estes dados foram obtidos junto ao site do Tribunal Regional Eleitoral do Estado do Rio Grande do Sul.

Tabela 42
Resumo de votação dos partidos – Deputado Estadual

Partido/Coligação	Votos
13 – (PT / PCB / PMN / PC do B)	1.433.191
12 – (PDT / PAN)	689.492
15 – (PMDB / PHS)	931.461
23 – (PPS / PFL / PT do B)	467.927
11 – PPB	972.096
14 – PTB	676.162
16 – PSTU	8.333
19 – PTN	2.137
20 – PSC	3.236
22 – PL	92.666
29 – PCO	1.099
30 – PGT	4.992
40 – PSB	245.848
43 – PV	18.206
45 – PSDB	387.986
56 – PRONA	13.849
Total	5.948.681

Fonte: TRE/RS

As divisões proporcionais, através de cada método, são apresentadas no quadro 18 abaixo.

Nº do partido ou coligação	Métodos e seus quocientes					
	Hamilton *Q=108.157,84*	**Jefferson** Q_m=97.200	**Adams** Q_m=135.000	**Webster** Q_m=106.100	**Huntington Hill** Q_m=124.500	**Brasileiro** *Q=108.158*
13	13	14	11	14	12	14
12	7	7	6	6	6	7
15	9	9	7	9	7	9
23	4	4	4	4	4	4
11	9	10	8	9	8	10
14	6	6	6	6	5	6
16	0	0	1	0	1	0
19	0	0	1	0	1	0
20	0	0	1	0	1	0
22	1	0	1	1	1	0
29	0	0	1	0	1	0
30	0	0	1	0	1	0
40	2	2	2	2	2	2
43	0	0	1	0	1	0
45	4	3	3	4	3	3
56	0	0	1	0	1	0

Quadro 18: Aplicação dos métodos de divisão proporcional ao Exemplo P4.

Note, que no exemplo acima, os únicos métodos que provocam uma distribuição idêntica das vagas à Assembléia Legislativa do Rio Grande do Sul, são os de Jefferson e o utilizado no Brasil para este tipo de divisão proporcional, o restante dos métodos determinam distribuições distintas para este exemplo. Realmente os dois métodos (Jefferson e o brasileiro) são parecidos quanto as divisões proporcionais, mas isso não quer dizer que suas distribuições sejam sempre idênticas, para provar isso, vamos mostrar um exemplo onde os métodos produzem distribuições diferentes entre si.

Considere uma eleição que tenha registrado um total de 2150 votos válidos, onde é necessário distribuir 9 vagas. A tabela 43 mostra os dados desta eleição.

Tabela 43

Partido ou coligação	Nº votos	Método brasileiro (Quociente Eleitoral) = 239			Método de Jefferson (Quociente modificado) = 200
		Quota	média	Total de vagas	Quota modificada
A	726	3	181,5	3	3
B	204	0	----	0	1
C	732	3	183*	4	3
D	488	2	162,7	2	2
Total	2150	8		9	9

* Partido ou coligação que ganhou a vaga através da média.

Exercício: Uma mãe quer distribuir de modo justo 50 caramelos idênticos pelos seus 5 filhos. Como qualquer boa mãe ela quer fazer uma divisão justa. Certamente o mais simples seria dar 10 caramelos a cada um dos seus filhos, mas a mãe quer ensinar a seus filhos o valor do trabalho e a relação entre o trabalho e a recompensa. Isto lhe deu uma idéia: os caramelos vão ser distribuídos pelas crianças de acordo com o tempo que cada uma gasta, semanalmente, ajudando nos trabalhos na cozinha.

Este exemplo foi extraído de Tannenbaum (2004, p.138) e os dados referentes a este exemplo estão na tabela 44, a qual mostra o tempo despendido por cada filho ao longo de uma semana nos trabalhos na cozinha.

Tabela 44
Tempo de trabalho na cozinha

Filho	Trabalho (em minutos)
Álvaro	150
Berta	78
Carlos	173
Diogo	204
Elsa	295
Total	900

Utilize os seis métodos vistos, para divisão proporcional, e distribua os caramelos entre as 5 crianças. Preencha o quadro abaixo com as distribuições encontradas para cada método.

Filhos	**Métodos e seus quocientes**					
	Hamilton	**Jefferson**	**Adams**	**Webster**	**Huntington Hill**	**Brasileiro**
Álvaro						
Berta						
Carlos						
Diogo						
Elsa						

2.4 Problemas com os métodos de divisão proporcional

Até agora vimos como funcionam alguns métodos de divisão proporcional. A partir desse momento iremos mostrar algumas situações que fazem com que esses métodos apresentem problemas quanto as suas aplicações. Esses métodos podem gerar situações paradoxais em relação à divisão que eles determinam.

Aqui nos concentraremos em mostrar quatro situações problemáticas para os métodos de divisão proporcional, embora existam outras. Estas que estudaremos são consideradas as mais importantes.

2.4.1 Regra da quota

Neste capítulo já tratamos anteriormente da quota, a definimos e mostramos como ela é encontrada, agora iremos mostrar um problema, referente à quota, que pode ser gerado por alguns métodos de divisão proporcional.

A regra da quota é um critério, que um método de divisão proporcional deve satisfazer para que o mesmo seja considerado justo. Essa regra determina, como método de divisão proporcional justo, aquele que consegue distribuir objetos aos concorrentes nas quantidades iguais as suas quotas mínimas ou máximas, ou seja, nenhum concorrente deverá ganhar menos objetos do que determina sua quota mínima, nem mais objetos do que é estipulado pela sua quota máxima. O método que violar esse critério, não estará de acordo com a regra da quota, portanto será considerado um método de divisão proporcional injusto.

Satisfazer a regra da quota parece ser o mínimo que podemos pedir a um método de divisão proporcional para o considerar justo. Surpreendentemente alguns dos mais importantes métodos de divisão proporcional podem violar a regra da quota. Vamos verificar se os métodos que nós estudamos, para divisões proporcionais, satisfazem essa regra.

- **Método de Hamilton:** este método satisfaz a regra da quota, já que ele utiliza o quociente eleitoral e distribui objetos conforme determina a quota mínima de cada concorrente; os objetos restantes são distribuídos entre os concorrentes, onde cada um pode receber no máximo mais um dos objetos restantes, alcançando assim a sua quota máxima. Então, cada concorrente, ou recebe uma quantidade igual a sua quota mínima, ou igual a sua quota máxima.
- **Método de Jefferson:** o método de Jefferson é uma dos métodos que não satisfazem a regra da quota. Podemos observar isso através do exemplo de Parador, onde na tabela 31, temos na distribuição final das vagas o estado da Bahia (B) recebendo 140 vagas, enquanto que a sua quota (não confundir com quota modificada) apresentada na tabela 29 é igual a 138,72, portanto vemos que este estado acaba recebendo uma vaga a mais do que determina sua quota máxima (139).
- **Método de Adams:** este método é outro que não consegue cumprir o que determina a regra da quota. Podemos tomar o mesmo exemplo utilizado há pouco, através da tabela 32, e veremos que o estado da Bahia (B) recebe 137 vagas, ou seja, uma a menos do que determina a sua quota mínima.
- **Método de Webster:** embora a divisão proporcional do Exemplo P1, através do método de Webster não mostre a violação da regra da quota, este é mais um dos métodos que viola esta regra. “Felizmente, isto é mais um problema teórico do que prático, já que as violações da regra da quota pelo método de Webster são consideradas raras” Tannenbaum (2004, p.153).
- **Método de Huntington-Hill:** este método também viola a regra da quota, já que sofre grande influência do método de Webster, sendo diferenciado somente pelo ponto de viragem, quanto ao arredondamento, portanto também fica difícil de mostrar essa violação, já que a mesma é muito rara.
- **Método brasileiro:** outro método que viola a regra da quota. Podemos perceber essa violação através do exemplo de Parador, o qual tem a sua distribuição das vagas pelo método brasileiro apresentada na tabela 40, lá podemos ver que o estado da Bahia recebe 140 vagas enquanto a quota desse estado é de 138,72, portanto este estado recebe uma vaga a mais do que estabelece a sua quota máxima. Embora no exemplo citado, não tenha sido eliminado nenhum candidato, aconteceu a violação da regra da quota. Em situações que o método provocar a eliminação de concorrentes que tenham uma votação significativa, este método acabará por violar a regra da quota, pois outro candidato será beneficiado pelo acréscimo de vagas, em relação a sua quota máxima.

2.4.2 Paradoxo do Alabama

Este paradoxo é gerado quando resolvemos aumentar o número de objetos a serem divididos e isto acaba fazendo com que um dos concorrentes perca um dos objetos que já havia conquistado.

Vamos supor que realizamos uma divisão proporcional de objetos e que depois disso acabamos encontrando um que estava perdido. Vamos querer que este objeto também seja dado para alguém, portanto teremos que fazer uma nova divisão entre os mesmos concorrentes, onde agora iremos dividir a quantidade que tínhamos anteriormente mais este que acabamos de encontrar. Nos parece razoável admitir que um dos candidatos irá ganhar mais um objeto e os outros concorrentes permanecerão com os que já haviam ganhado anteriormente, mas para nossa surpresa um dos concorrentes acaba tendo que ceder um de seus objetos para outro concorrente. Portanto, dizemos que o método que gerou este problema adere ao Paradoxo do Alabama.

Este paradoxo é vulgarmente chamado de Paradoxo do Alabama porque a primeira ocorrência do mesmo se deu em 1880, quando se verificou que, através do método de Hamilton, se a Câmara dos Representantes dos Estados Unidos tivesse 299 lugares o estado do Alabama teria direito a 8 lugares, mas se a Câmara dos Representantes fosse composta por 300 pessoas, Alabama conquistaria, pelo mesmo método, somente 7 lugares. Veja a tabela 45 abaixo, que mostra justamente o que acabamos de falar.

Tabela 45
Método de Hamilton e o Paradoxo do Alabama - 1880

Estado	Quota para 299 vagas	Distribuição de 299 vagas	Quota para 300 vagas	Distribuição de 300 vagas
Alabama	7,646	8	7,671	7
Texas	9,64	9	9,672	10
Illinois	18,64	18	18,702	19

Fonte: TANNEMBAUM, 2004, p.145

O Paradoxo do Alabama é um problema tanto para o método de Hamilton, quanto para o método utilizado no Brasil para a distribuição das vagas ao poder legislativo, já os outros métodos que nós vimos para divisão proporcional, não aderem a este paradoxo. Os métodos que citamos apresentam problema com este paradoxo, em função da maneira como procedem a divisão proporcional, ou seja, estes dois métodos distribuem uma parte dos objetos entre os concorrentes e posteriormente distribuem o restante consoante a uma regra estabelecida por cada um deles, porém é justamente essa divisão do restante dos objetos que acaba fazendo com que ambos os métodos tenham problemas com o Paradoxo do Alabama.

Para exemplificar, o problema do método de Hamilton em relação a este paradoxo, vamos fazer uso do exemplo a seguir para mostrar como ocorre este paradoxo.

Exemplo P5: Um empresário do ramo de autopeças encomendou 200 camisetas para serem distribuídas entre seus clientes, ele possui três lojas (A, B e C) e resolveu distribuir estas camisetas proporcionalmente à média do volume de vendas em reais de cada loja nas últimas 20 semanas.

A divisão proporcional deste exemplo, seguindo o método de Hamilton, está exposta na tabela 46 abaixo.

Tabela 46
Divisão proporcional das 200 camisetas – segundo Hamilton (quociente eleitoral = 100)

Loja	Média de vendas das últimas 20 semanas (R$ / semana)	Quota	Quota mínima	Camisetas que sobraram	Distribuição final
A	3.940	39,4	39	1	40
B	9.030	90,3	90		90
C	7.030	70,3	70		70
Total	20.000	200,0	199	1	200

O empresário já tinha definido então quantas camisetas iriam para cada uma de suas lojas, porém ao receber a sua encomenda de camisetas, notou que tinham lhe mandado 201 camisetas, uma a mais do que havia pedido, imaginou ele que uma das lojas receberia esta camiseta que veio a mais, para decidir qual seria esta loja, resolveu refazer a divisão proporcional, utilizando novamente o método de Hamilton, a qual é apresentada na tabela 47 a seguir.

Tabela 47
Divisão proporcional das 201 camisetas – segundo Hamilton (quociente eleitoral = 99,5025)

Loja	Média de vendas das últimas 20 semanas (R$ / semana)	Quota	Quota mínima	Camisetas que sobraram	Distribuição final
A	3.940	39,60	39		39
B	9.030	90,75	90	1	91
C	7.030	70,65	70	1	71
Total	20.000	201,00	199	2	201

Após ter refeito a divisão proporcional das camisetas, ele acabou se surpreendendo, pois como podemos observar na tabela acima, ele tinha uma camiseta a mais para distribuir e justamente por isso, a loja A acabou perdendo uma das que já havia ganhado anteriormente, quando eram divididas somente 200 camisetas.

Agora vamos ver o que acontece com o método utilizado no Brasil. Encontre as distribuições para a situação abaixo.

<u>Exercício</u>: Em uma pequena cidade existem quatro escolas. A prefeitura desta cidade resolveu montar uma comissão para decidir onde seriam aplicados os recursos destinados à educação. Esta comissão será formada por 10 integrantes provenientes destas quatro escolas. Para tornar mais justa a escolha das pessoas que integrariam esta comissão, o prefeito decidiu dividir o total de vagas entre as escolas, proporcionalmente ao número de alunos que elas atendem, utilizando para isso o método que atualmente é usado no Brasil para escolher vereadores numa cidade.

Tabela 48
Divisão proporcional das 10 vagas – Método brasileiro

Escola	N^{o} de alunos	Quota	Quota mínima	Vagas sobrantes	Distribuição final
A	2.286				
B	525				
C	481				
D	1.985				
Total	5.277				

Depois te já ter feito esta divisão, a secretária de educação, propôs ao prefeito aumentar o número de integrante da comissão para onze, já que um número par de integrantes poderia gerar empates em algumas decisões, enquanto que com um número ímpar isto é bem mais difícil de acontecer. Idéia aceita pelo prefeito, agora só falta saber a que escola dar esta vaga, para isso vamos ter que recalcular a divisão das vagas para a comissão.

Tabela 49
Divisão proporcional das 11 vagas – Método brasileiro

Escola	N^{o} de alunos	Quota	Quota mínima	Vagas sobrantes	Distribuição final
A	2.286				
B	525				
C	481				
D	1.985				
Total	5.277				

Compare as duas distribuições e veja se o método brasileiro viola ou não com o paradoxo do Alabama.

2.4.3 Paradoxo da População

Por volta de 1900 foi descoberto este paradoxo. Imaginando uma distribuição de vagas ao congresso, entre estados de determinado país, este paradoxo consiste na perda de vagas por parte de um estado A para um estado B, mesmo que a população de A tenha aumentado muito mais do que a de B. Certamente fica claro que esta situação não é nem um pouco justa.

Assim como no Paradoxo do Alabama, aqui, os métodos de Hamilton e o utilizado no Brasil aderem a este paradoxo, ficando os demais livres da influência do Paradoxo da População.

Novamente vamos usar exemplos para mostrar o que acabamos de dizer. O exemplo abaixo foi extraído de Tannenbaum (2004, p.139) e mostra uma situação onde o método de Hamilton apresenta problemas quanto ao paradoxo que estamos vendo.

<u>Exemplo P7</u>: Estamos no ano de 2025 e todos os planetas da galáxia assinaram finalmente um tratado de paz. Cinco desses planetas (Alanos, Betta, Coni, Dugos e Ellisium) resolveram juntar-se e constituir uma Federação Intergaláctica. A Federação será governada por um congresso intergaláctico constituído por 50 delegados, e cada um dos cinco planetas será representado por um número de delegados, proporcional à sua população.

A divisão das vagas deste exemplo, através do método de Hamilton, é apresentada na tabela 50 abaixo.

Tabela 50
Divisão proporcional das 50 vagas da Federação Intergaláctica
através do método de Hamilton – ano de 2025 (quociente eleitoral = 18)

Planetas	População (em bilhões)	Quota	Quota mínima	Camisetas que sobraram	Distribuição final
Alanos	150	8,3333	8		8
Betta	78	4,3333	4		4
Coni	173	9,6111	9	1	10
Dugos	204	11,3333	11		11
Ellisium	295	16,3889	16	1	17
Total	900	-----	48	2	50

Passados dez anos, chegou o momento de redistribuir as vagas no congresso intergaláctico. Não houve muitas mudanças no número de habitantes dentro da Federação. A população de Coni aumentou 8 bilhões, a população de Ellisium aumentou 1 bilhão. Todos os outros planetas que integram a Federação intergaláctica têm exatamente o mesmo número de habitantes que há dez anos atrás.

Vamos redistribuir as vagas à Federação Intergaláctica, tomando como parâmetro a nova realidade populacional dos planetas. Esta nova divisão proporcional está exposta na tabela 51 a seguir.

Tabela 51
Divisão proporcional das 50 vagas da Federação Intergaláctica
através do método de Hamilton – ano de 2035 (quociente eleitoral = 18,18)

Planetas	População (em bilhões)	Quota	Quota mínima	Camisetas que sobraram	Distribuição final
Alanos	150	8,2508	8		8
Betta	78	4,2904	4	1	5
Coni	181	9,9560	9	1	10
Dugos	204	11,2211	11		11
Ellisium	296	16,2816	16		16
Total	900	-----	48	2	50

Note que, passados 10 anos, mesmo tendo aumentado a população de Ellisium em 1 bilhão de pessoas, este planeta acaba perdendo uma de suas vagas à Federação Intergaláctica, justamente para um dos planetas que não sofreu alteração no número de habitantes, ou seja, Betta. Portanto, este exemplo mostra que o método de Hamilton realmente adere ao Paradoxo da População.

Exercício: Agora, vamos verificar se o método utilizado no Brasil sofre problemas com o paradoxo da população. Para isso vamos utilizar o exercício anterior, tomando a segunda distribuição que lá fizemos, a qual está expressa na tabela 49. Vamos supor que logo depois de feita aquela divisão proporcional, 66 alunos ingressaram na escola A e 4 alunos na escola C, as escolas B e D permaneceram com o mesmo número de alunos, com isso o prefeito estabeleceu que deveria ser feita uma nova divisão das vagas para a comissão, frente a essa nova realidade. Encontre a nova divisão proporcional pedida pelo prefeito.

Tabela 52
Divisão proporcional das 11 vagas – Método brasileiro

Escola	Nº de alunos	Quota	Quota mínima	Vagas sobrantes	Distribuição final
A	2.352				
B	525				
C	485				
D	1.985				
Total	5.347				

Compare as duas distribuições e veja se o método brasileiro viola ou não o paradoxo da População.

2.4.4 Paradoxo dos Novos Estados

Este paradoxo foi descoberto em 1907, quando Oklahoma se tornou estado. Antes disso a Câmara dos Representantes dos Estados Unidos tinha 386 lugares. Baseado na população de Oklahoma chegou-se à conclusão que o mesmo teria direito a 5 vagas e , com isso, o total de lugares da câmara passou de 386 para 391. A intenção era manter a divisão anterior intacta, porém quando recalcularam a distribuição das vagas, incluindo Oklahoma, aconteceu algo estranho: Maine acabou sendo beneficiado, já que teve um acréscimo de uma vaga em relação à divisão anterior, justamente a vaga que antes pertencia à Nova Iorque.

Este paradoxo consiste no fato de que, quando incluímos um novo concorrente com a sua respectiva quota de lugares, isso pode acabar afetando a distribuição de lugares dos outros concorrentes.

Assim como os demais paradoxos que nós vimos, este também só ocorre nos métodos de Hamilton e aquele utilizado no Brasil para eleições proporcionais.

Como fizemos até aqui, vamos apresentar um exemplo que mostra o problema do Paradoxo dos Novos Estados.

Exemplo P8: Uma cidade vizinha daquela do exercício sobre as escolas resolve que também vai criar uma comissão para decidir onde serão aplicados os recursos destinados à educação. Só que esta comissão será formada por 21 integrantes, provenientes das três escolas existentes no município naquele momento. Para tornar mais justa a escolha das pessoas que integrariam esta comissão, o prefeito decidiu dividir o total de vagas entre as escolas, proporcionalmente ao número de alunos que elas atendem. Nós utilizaremos os métodos de Hamilton e o método que atualmente é usado no Brasil para escolher vereadores numa cidade. A tabela 53 abaixo, mostra como ficou a composição da comissão em cada um dos dois métodos.

Tabela 53
Divisão proporcional das 21 vagas – (quociente eleitoral = 100)

Escola	N^o de alunos	Quota	Quota mínima	Distribuição final (Método de Hamilton)	Distribuição final (Método de brasileiro)
A	1.050	10,50	10	11	11
B	949	9,49	9	9	9
C	101	1,01	1	1	1
Total	2100	-----	20	21	21

Notemos que ambos os métodos produzem a mesma divisão das vagas entre as três escolas.

Passados dez meses este município ganhou uma nova escola (escola D), que já está em pleno funcionamento e é necessário que a mesma seja representada na comissão. Como se sabia que o quociente eleitoral da divisão proporcional realizada há dez meses atrás era de 100, então resolveu-se aumentar a comissão em duas vagas, o que seria necessário para atender o critério de proporcionalidade usado, ou seja, o número de alunos atendidos, já que esta nova escola possui 247 alunos matriculados. Porém, a secretária de educação resolveu, por conta própria refazer o cálculo da divisão das vagas à comissão de educação do município, considerando a inclusão desta nova escola e a abertura das duas vagas para a mesma.

A tabela 54 abaixo mostra o que ocorreu com a nova divisão proporcional das vagas, em ambos os métodos.

Tabela 54
Divisão proporcional das 23 vagas
Hamilton (quociente eleitoral = 101,5217) / brasileiro (quociente eleitoral = 102)

Escola	N^o de alunos	Quota Hamilton	Quota Brasileiro	Distribuição final (Método de Hamilton)	Distribuição final (Método brasileiro)
A	1.050	10,3426	10,2941	10	11
B	949	9,3477	9,3039	10	10
C	101	0,9949	0,9902	1	0
D	235	2,3148	2,3039	2	2
Total	2335	-----	-----	23	23

Observando as tabelas 53 e 54, podemos notar que, com a entrada da escola D na divisão das vagas à comissão de educação, pelo método de Hamilton a escola A acaba perdendo uma de suas vagas para a escola B e pelo método de divisão adotado pelo Brasil nas suas disputas proporcionais, a escola C acaba perdendo sua única vaga para a escola B. Portanto, podemos dizer que a entrada da escola D na formação da comissão acabou beneficiando a escola B.

2.5 Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young

Agora que já vimos, como funcionam os seis métodos de divisão proporcional e os quatro problemas que podem afetar estes métodos (Regra da Quota, Paradoxo do Alabama, Paradoxo da População e o Paradoxo dos Novos Estados), podemos fazer algumas considerações: entre os métodos estudados, podemos perceber através dos exemplos apresentados que, dependendo da situação, os métodos podem produzir divisões proporcionais diferentes ou não; apesar de alguns métodos serem claramente melhores do que outros, nenhum deles é perfeito, já que podem violar a regra da quota ou acabar produzindo algum dos paradoxos vistos. Com relação a violação da regra da quota ou a produção destes paradoxos, apresentamos abaixo, através do quadro 36, um resumo das nossas constatações sobre os seis métodos vistos neste capítulo.

Métodos	Regra da quota	Paradoxo do Alabama	Paradoxo da População	Paradoxo dos Novos Estados
Hamilton	Não	Sim	Sim	Sim
Jefferson	Sim	Não	Não	Não
Adams	Sim	Não	Não	Não
Webster	Sim	Não	Não	Não
Huntington-Hill	Sim	Não	Não	Não
Brasileiro	Sim	Sim	Sim	Sim

Quadro 20: Resumo das confrontações dos métodos com os critérios.
Nota: SIM – o método apresenta problemas quanto ao critério; NÃO – o método não apresenta problemas.

Pelo que vimos, e analisando o nosso quadro resumo acima, podemos perceber que nenhum dos seis métodos estudados pode ser considerado justo, e mais, o método atualmente utilizado no Brasil para a escolha de representantes ao poder legislativo, é o pior entre os seis estudados aqui, portanto é o método mais injusto para um processo de divisão proporcional.

Então fica uma pergunta, será que existe algum método de divisão proporcional que não viole a Regra da Quota e também não produza nenhum dos três paradoxos que vimos? Aparentemente não, tanto Tannenbaum (2004), quanto **A Matemática da divisão proporcional** [8] não são claros em relação a esta questão, mas acreditamos que certamente se existisse, estas obras os apresentariam.

Em 1980, os matemáticos americanos Michel Balinski e Hobart Peyton Young, descobriram e provaram um teorema que trata das divisões proporcionais. Tal teorema é conhecido como ***Teorema da Impossibilidade de Balinski e Young***, o qual afirma que: *não existe nenhum método de divisão proporcional perfeito, já que qualquer método de divisão proporcional que não viole a regra da quota produz paradoxos e qualquer método que não produza paradoxos viola a regra da quota.*

Por este teorema, mesmo que existisse um método que não violasse a Regra da Quota nem produzisse os três paradoxos apresentados neste trabalho, ele certamente acabaria produzindo um outro paradoxo.

Para concluir, fazemos nossas as palavras de Tannenbaum que diz: “Mais uma vez chegamos à conclusão já familiar noutros contextos: justiça e representação proporcional são incompatíveis” (2004, p.155).

---

[8] **A matemática da divisão proporcional**. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/MAcs/Textos_Macs/Partilha_nas_eleicoes.pdf > Acesso em: 24 jun. 2003.

OBRAS CONSULTADAS

A Matemática Da Divisão Proporcional. Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/textos_macs/partilha_nas_eleicoes.pdf> Acesso Em: 24 Jun. 2003

ASSUNÇÂO, João Borges. O Plebiscito Francês. **Expresso Online**. 11 Mai. 2002. Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/textos_macs/voto_preferencia.pdf> Acesso Em: 29 Jun. 2003

Athens to host 2004 olympics: Athens wins the 2004 summer games. Disponível em: <http://www.agamemnon.dabsol.co.uk/olympics.htm> Acesso em: 22 set. 2003

Condorcet, Marquês De 1743-1794. Disponível Em: <http://www.iscsp.utl.pt/~cepp/autores/franceses/1743._condorcet.htm> Acesso Em: 20 Out. 2003

CRATO, Numes. **Expresso – Revista**, 15 Mar. 2002. Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/textos_macs/paradoxoseleitorais_ncrato.pdf> Acesso Em: 15 Jun. 2003

Discrete Math Problem Of The Week: Archive Of Problems, Submissions & Commentary The 2000 Olympic. Disponível em: <http://www.mathforum.org/dmpow/solutions/solution.ehtml?puzzle=46> Acesso em: 22 set. 2003

Eleições 2002. TRE-MT. Disponível Em: <http://200.252.203.141/ele2002/calculo> Acesso Em: 10 Set. 2003

MARCHIAVELO, Antonio. Eleições, Paradoxos E A 5ª Dimensão... **Resumo De Uma Palestra Proferida No Departamento De Matemática Pura Da FCUP (Semana Da Ciência E Da Tecnologia - 27 Nov. 2002)**. Centro De Matemática Da Universidade Do Porto. Disponível Em: <http://www.fc.up.pt/cmup/home/ajmachia/palctep5d.html> Acesso Em: 11 Jul. 2003

MEHAFFEY, John. **Olympics – Beijing wins sweeping victory in 2008 race**. Disponível em: <http://in.news.yahoo.com/010713/64/117jo.html> Acesso em: 22 set. 2003

MELLO, José Luiz Pastore. **Matemática: Método De Borda Propõe "Democracia Matemática"**. Folha De S. Paulo. São Paulo, 11 Abr. 2002. Disponível Em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/educacao/ult305u8781.shtml> Acesso Em: 23 Mai. 2003

NICOLAU, Jairo. **Dados Eleitorais Do Brasil (1982-2000)**. Disponível Em: <http://www.iuperj.br/deb/port/cap2/cap2_texto.htm> Acesso Em: 15 Out. 2003

O Método D'hondt. Disponível Em: <http://www.mozambique.mz/governo/eleicoes/hondt.htm> Acesso Em: 28 Jun. 2003

Projeto De Lei Do Senado Nº 88, De 1999. Disponível Em: <http://senado.gov.br/web/senador/lucalc/1999projetos/listapar.htm> Acesso Em: 08 Set. 2003

Resultado das Eleições 2002. Disponível em: <http://www.tre-rs.gov.br> Acesso em: 02 out. 2003

TANNENBAUM, Peter. **Excursions in Modern Mathematics**. 5.ed. New Jersey: Pearson Education, 2004.

Teoria Das Eleições/Partilha Equilibrada. Disponível Em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/macs/ligacoes.html> Acesso Em: 17 Mai. 2003

Teoria Matemática Das Eleições. Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/propostas/prop_2.pdf> Acesso Em: 14 Mai. 2003

The Mathematical Theory Of Elections. Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/textos_macs/capitulo_3_eleicoes.pdf> Acesso Em: 11 Jul. 2003

Viva O Festival Da Canção! Disponível Em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/matematica/acompanhamento/macs/textos_macs/borda_buescu.pdf> Acesso Em: 29 Jun. 2003

Voting And Elections: Ballots. Disponível Em: <http://www.ams.org/new-in-math/cover/voting-ballots.html> Acesso Em: 17 Mai. 2003

Voting And Elections: Election Decision Methods. Disponível Em: <http://www.ams.org/new-in-math/cover/voting-decision.html> Acesso Em: 17 Mai. 2003

Voting And Elections: Introduction. Disponível Em: <http://www.ams.org/new-in-math/cover/voting-introduction.html> Acesso Em: 17 Mai. 2003