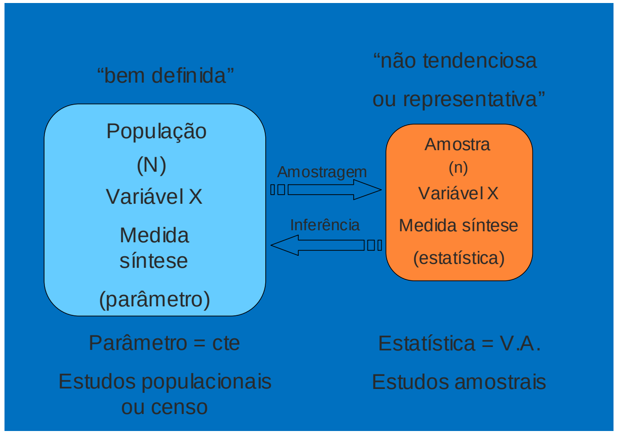
Ensino de Estatística na Educação Básica
Inferência: Estimação

Estimar um parâmetro de uma população é tentar definir o valor desconhecido de um parâmetro θ a partir de medida observada (estatística, no caso denominada estimador $\hat{\theta}$) em uma amostra representativa de tal população, É uma metodologia muito importante da inferência estatística.

Por exemplo, estimar μ_X (parâmetro) a partir de $\bar{X}$ (estatística) ou estimar π (parâmetro) a partir de p (estatística)



Ao calcularmos uma medida síntese em uma amostra representativa de uma população de interesse ficamos interessados no seguinte:

- que o valor calculado na amostra (estatística) tenha grandes possibilidades de representar bem o valor desconhecido do parâmetro;
- que tal valor calculado na amostra (estatística) se aproxime do valor populacional desconhecido (parâmetro) quando a amostra é representativa;
- que ao repetirmos a amostragem, vamos obter outros valores calculados, todos relativamente próximos uns dos outros.

Apostamos nas premissas mencionadas para realizar uma estimação. Devemos estimar o parâmetro e informar qual a confiança (suficientemente grande) depositada na estimativa feita. Daí o cálculo do chamado INTERVALO DE CONFIANÇA, ao qual associamos um NÍVEL DE CONFIANÇA (probabilidade de que os limites de tal intervalo irão conter o verdadeiro valor do parâmetro, que é desconhecido).

Como não utilizamos todos os valores da população para o cálculo da medida síntese, mas apenas os n valores amostrais, há sempre o risco de se cometer um erro ao apresentarmos a estimativa, dado por: (1- NÍVEL DE CONFIANÇA).

Há a necessidade, portanto, de termos conhecimento sobre como a estatística se "comporta" nas possíveis amostras representativas de mesmo tamanho que possam ser retiradas da população estudada.

Tal conhecimento é teórico, e serve para a construção do chamado intervalo de confiança, que veremos nesta aula.

A estatística, por ser qualquer função de uma amostra (X_1, X_2, ..., X_n) é uma VA, então podemos dizer que o "comportamento" da mesma é dado por:

- sua tendência central;
- sua variabilidade;
- a "forma" de sua distribuição de probabilidades

Ao conhecermos tais características sabemos o "comportamento" da VA e podemos então realizar a estimativa com base em tal conhecimento.

É importante atentarmos para a seguinte distinção:

- Um estimador é uma função f (X_1, X_2, ..., X_n) da amostra;

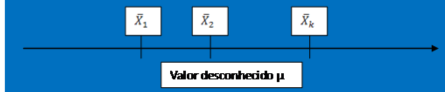
- Uma estimativa é o valor observado de um estimador em uma dada amostra (isto é: um número, obtido pela função f(x_1, x_2, ..., x_n)).

ESTIMAÇÃO DA MÉDIA POPULACIONAL μ_X:

A estatística que intuitivamente podemos escolher para estimar μ_X é a média aritmética calculada na amostra representativa observada, ou seja, $\bar{X}$.
Devemos conhecer como "flutuam" os valores desta estatística observada em amostras representativas de tamanho n.

Se amostra é bem escolhida e se seus elementos são obtidos de forma aleatória, ou seja, se a amostra é **representativa**, podemos dizer que o valor observado deve estar próximo ao valor do parâmetro não observado (desconhecido), mas precisamos definir melhor qual a distância provável da estatística calculada a este valor desconhecido.

Se chamamos as médias obtidas em k diferentes amostras de tamanho n, de $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$, podemos afirmar que tais médias podem apresentar valores distintos e próximos entre si, mas não saberemos dizer qual a distância de cada uma delas ao verdadeiro valor desconhecido μ.



Se imaginarmos agora que podemos obter **todas** as amostras possíveis de tamanho n
da população cujo parâmetro μ queremos estimar (um feito difícil de ser realizado na prática, mas uma abstração fácil de ser realizada), cada amostra nos dá um valor $\bar{X}_i$ para sua média.

Em geral, iremos representar os *parâmetros* por letras gregas (por exemplo, μ, σ), e a estatísticas amostrais por letras romanas ($\bar{X}$, S). O quadro a seguir lista os parâmetros mais importantes e os respectivos símbolos mais usuais:

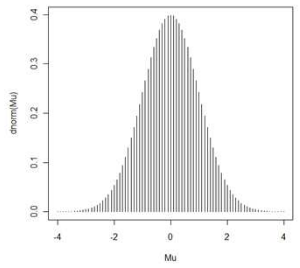
Medida	Símbolo		
	População	Amostra	Estimador $\bar{X}$ e parâmetros de sua Distr. Amostral
Variável	X	X	$\bar{X}$
Média	μ ou μ_X	$\bar{X}$	$\mu_{\bar{X}}$
desv.padrão	σ ou σ_X	S ou S_X	$\sigma_{\bar{X}}$ (erro padrão)

Para entender como todas estas variáveis e constantes se relacionam, precisaremos rever alguns teoremas de probabilidades.

Obs: A distribuição de qualquer estatística amostral é chamada de *distribuição amostral*;

A representação gráfica de tais valores (por exemplo, Distr. Amostral de $\bar{X}$) poderá indicar, a título de ilustração, o formato representado na figura a seguir, indicando a flutuação dos valores das médias amostrais.

Note que se o parâmetro μ pudesse ser calculado, pelas características da distribuição, o mesmo se encontraria no centro da figura.



ESTIMATIVA PONTUAL E INTERVALAR:

Podemos usar sempre a seguinte notação genérica:

θ é um parâmetro qualquer (desconhecido) da população de interesse que queremos estimar e $\hat{\theta}$ é a estatística (medida resumo) correspondente que utilizamos para realizar a estimação. Logo, chamamos $\hat{\theta}$ (ou $\hat{\theta}(X)$) de **estimador pontual** para o parâmetro θ.

Como sabemos que em cada amostra de tamanho n podemos obter um valor distinto para o estimador $\hat{\theta}$, vamos chamar este valor calculado para o estimador na amostra observada de **estimativa pontual** ($\hat{\theta}(x)$) para o parâmetro θ (cada valor de $\bar{X}$ do exemplo anterior).

A estimativa pontual, no entanto, não fornece nenhuma informação sobre o erro cometido ao utilizarmos tal estimativa (a proximidade com o valor do parâmetro e a chance de acerto ao usarmos tal estimativa).

Daí precisarmos de uma estimativa que nos indique a margem de erro da mesma e a probabilidade de acerto ao a utilizarmos.

Surge então a **estimativa intervalar**:

$\hat{\theta} \pm margem\ de\ erro$,

associada a uma **probabilidade da mesma conter o verdadeiro valor do parâmetro θ**, chamada de **nível de confiança**.

Vamos ver, para o caso específico da estimativa do parâmetro μ, como calcular a margem de erro para um dado nível de confiança, e assim podermos construir um **Intervalo de Confiança**, que é uma representação da estimativa intervalar.

Um Pouco de Teoria

Se a média aritmética amostral é um estimador (no caso, $\hat{\theta} = \bar{X}$) do parâmetro populacional ($\theta = \mu_X$) e a mesma é uma VA, devemos obter dois parâmetros que caracterizem sua distribuição: sua média ($\mu_{\bar{X}}$) e seu desvio-padrão ($\sigma_{\bar{X}}$), também conhecido por erro padrão. Além disso, devemos saber qual a forma que a distribuição apresenta.

Veremos então os teoremas que nos dizem algo a respeito de tais parâmetros e a respeito da forma da distribuição amostral da média aritmética. Os dois teoremas se referem a amostras aleatórias simples.

Para evitar confusão com o valor do desvio padrão dos valores da variável X, observados em uma amostra (S_X), o desvio-padrão de qualquer estimador é chamado de **erro padrão (EP)**.

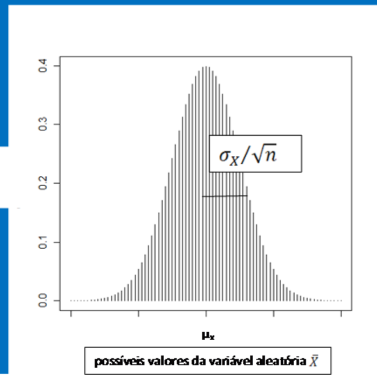
Teorema 1: O valor esperado (média) do estimador $\bar{X}$, ou seja, $\mu_{\bar{X}}$, é igual ao parâmetro que desejamos estimar (μ_X) e o seu erro padrão, ou seja, $\sigma_{\bar{X}}$, é igual a $\sigma_X/\sqrt{n}$.

Resumindo: $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ e $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_X/\sqrt{n}$

Pelo o que vimos anteriormente, podemos enunciar o teorema fundamental para a inferência estatística, o teorema do limite central:

Teorema 2: Se o tamanho da amostra n for suficientemente grande a VA $\bar{X}$ **segue uma distribuição gaussiana** centrada em μ_X e com desvio-padrão (erro-padrão) igual a $\sigma_X/\sqrt{n}$.
(Em termos práticos vamos considerar $n \geq 30$ como sendo uma amostra suficientemente grande).

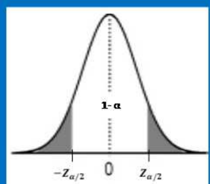
Resumindo: $\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X^2 / n)$, para $n \geq 30$



Utilizando a teoria acima podemos escrever:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Já que para amostras com $n \geq 30$ temos $\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X^2 / n)$, $Z = \frac{\bar{X}-\mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$ e teremos:



Chegaremos então à seguinte expressão:

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

O que foi obtido acima nos fala que se a VA $\bar{X}$ (estimador) é usada para fornecer uma estimativa pontual $\bar{x}$ para μ_X, então há a probabilidade $1-\alpha$ de que μ_X estará contido nos limites definidos.

Se α é pequeno, de forma que $1-\alpha$ é grande, então há uma grande probabilidade de que a desigualdade entre parêntesis seja satisfeita. Então, podemos ter grande confiança de que se $\bar{x}$ é um valor observado para o estimador $\bar{X}$, a desigualdade:

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

também será satisfeita.

Os **limites do IC** correspondem ao lado esquerdo e ao lado direito das desigualdades acima;

A expressão $Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ é chamada de **margem de erro**;

A margem de erro da estimativa intervalar depende do **nível de confiança** adotado (1- α) e do tamanho da amostra, que influencia o valor teórico do **desvio-padrão do estimador**, denominado **erro-padrão** (EP).

O lado direito da igualdade definida anteriormente, o valor $1-\alpha$, é chamado de **nível de confiança** do IC obtido;

Pode-se interpretar então que a **confiança que temos do IC conter o parâmetro** é igual a $1-\alpha$.

O valor **(1- α),** que representa o **nível de confiança** da estimativa intervalar, não se refere apenas a uma amostra em particular, mas sim ao desempenho deste procedimento de estimação para todas as possíveis amostras representativas de tamanho *n.*

Se amostras aleatórias repetidas de tamanho *n* são retiradas da população, e se para cada amostra aleatória for calculado o valor da média amostral e um intervalo de confiança com nível de confiança 1- α for construído, então devemos esperar que aproximadamente (1- α) . 100% destes ICs sejam afirmativas corretas. O IC calculado a partir de uma amostra em particular não necessariamente inclui o verdadeiro valor do parâmetro.

A desigualdade a que chegamos, ao substituir $\bar{X}$ por $\bar{x}$, corresponde ao **intervalo de confiança para estimação de μ_X a partir de $\bar{X}$, ao nível de confiança de $1-\alpha$.**

O IC também poderia ser representado por:

$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$, ou seja, $\hat{\theta} \pm margem\ de\ erro.$

Para diferentes valores de $1-\alpha$, teremos diferentes valores para $Z_{\alpha/2}$ (lembre-se dos valores tabelados para Z):

$1-\alpha$	$Z_{\alpha/2}$
0,95	1,96
0,90	1,65
0,99	2,58
0,999	3,30

Se a variância na população σ_X^2 for desconhecida, um procedimento aceitável é substituir σ_X (o desvio padrão na população) por S_X (o valor observado do desvio-padrão amostral) na fórmula do IC, desde que a amostra observada seja grande ($n \geq 30$).

Vamos ver agora um exemplo calculado:

Em uma pesquisa sobre o tempo de sono em crianças de 2 a 3 anos, realizada com 540 crianças saudáveis, encontrou-se um tempo médio igual a 11,7 horas, com desvio-padrão igual a 1,3 horas. Qual o tempo médio de sono para todas as crianças da população representada por esta amostra, ao nível de confiança de 0,95 ?

Resposta: 11,7 ± 0,11 h
($IC_{95\%}$ para μ_X: 11,59---11,81 horas)

Resumindo o que já vimos até agora:

- Estimativa PONTUAL: um único valor (um número)
- Estimativa INTERVALAR: um conjunto de valores (um intervalo) associado a uma probabilidade, ou NÍVEL DE CONFIANÇA $(1-\alpha)$, de que este intervalo inclui o verdadeiro valor do parâmetro (que é desconhecido): INTERVALO DE CONFIANÇA.
- A probabilidade $(1-\alpha)$ não se refere apenas a uma amostra em particular, mas sim ao desempenho do procedimento para todas as possíveis amostras de mesmo tamanho n.

ESTIMAÇÃO DA PROPORÇÃO POPULACIONAL π:

Para estimar uma proporção desconhecida na população π a partir da proporção observada na amostra de tamanho $n \geq 30$, devemos utilizar o mesmo princípio que adotamos para a estimação da média: $\hat{\theta} \pm margem\ de\ erro$, onde $\hat{\theta}$ é o valor obtido para o estimador p na amostra considerada e a margem de erro é dada por: $Z_{\alpha/2} \times EP_p$, onde

$EP_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ é o erro-padrão do estimador p.

Logo, o IC para π será representado por:

$$p - Z_{\alpha/2} \times EP_p \leq \pi \leq p + Z_{\alpha/2} \times EP_p$$

ou seja: $\pi = p \pm Z_{\alpha/2} \times EP_p$

A interpretação do IC é feita de forma análoga.

Um exemplo calculado:

Na mesma pesquisa do exemplo anterior 86 crianças da amostra apresentaram distúrbios do sono. Estimar ao nível de confiança de 0,95 o percentual de crianças na população representada por tal amostra que apresentam distúrbios do sono.

Resposta: 86/540 = 0,159 (15,9%);

$EP_p = \sqrt{\frac{0,159(1-0,159)}{540}} = 0,016;$

$IC_{95\%}$ para π: 12,8 --- 19,0%

O que acontece quando modificamos o nível de confiança da estimativa?

Por exemplo: para ter mais confiança na estimativa o pesquisador decide utilizar o nível de confiança 0,99 (99%). Recalcular os ICs para os dois exemplos anteriores. O que você observa?

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \times \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

$$p + Z_{\alpha/2} \times EP_p$$

Resposta: os ICs são maiores. Houve então uma perda na precisão da estimativa.

Propriedades desejáveis de um estimador $\hat{\theta}$:

a) Se $\hat{\theta}$ é um estimador para o parâmetro θ e se $\mu_{\hat{\theta}} = \theta$, ou seja, se o valor esperado do estimador é igual ao valor do parâmetro, então $\hat{\theta}$ é um estimador **não tendencioso** para θ.
Ex: $\bar{X}$ é um estimador não tendencioso para μ_X, de acordo com o Teorema 1.

b) Se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são estimadores não tendenciosos para o parâmetro θ, com erros-padrão $EP_{\hat{\theta}_1}$ e $EP_{\hat{\theta}_2}$ respectivamente, e se $EP_{\hat{\theta}_2} < EP_{\hat{\theta}_1}$, então $\hat{\theta}_2$ é um estimador **mais eficiente (de mínima variância)** para θ.

c) Se $\hat{\theta}$ é um estimador **não tendencioso** para θ e se $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, então $\hat{\theta}$ é um estimador **consistente** para θ.

Ex: Mostre que $\bar{X}$ é um estimador consistente para μ_X.

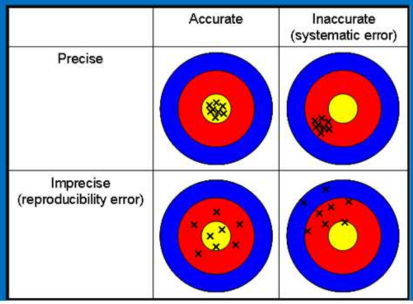
A variância do estimador $\bar{X}$ é igual a $\frac{\sigma_X^2}{n}$ de acordo com Teorema 1. Logo, quando n for muito grande a variância do estimador vai se aproximar de zero.

Dois conceitos importantes são usualmente empregados no contexto de estimação:

1. **Exatidão**: uma estimativa é exata quando em média não se afastar do valor que deseja estimar.

2. **Precisão:** uma estimativa é tão mais precisa quanto menor for a amplitude do IC obtido.

Logo, podemos concluir que a exatidão está associada ao nível de confiança e a precisão à margem de erro. Veja analogia ao esporte de tiro ao alvo:



Quanto maior o intervalo, por exemplo: se estimamos uma proporção populacional “entre 40 e 92%”, bem exata será sua estimativa já que este intervalo é bem provável de conter a verdadeira proporção desconhecida. No entanto, o preço da exatidão é a precisão: você não está sendo muito preciso ao afirmar que a proporção desconhecida está “entre 40 e 92%”. Você estará bem confiante com sua estimativa, mas pouco preciso.

Ao contrário, quanto menor o intervalo talvez você não consiga depositar a mesma confiança em sua estimativa. Por exemplo, ao estimar a proporção desconhecida “entre 90 e 92%” a mesma é bastante precisa, mas em termos de confiança na estimativa será que você teria uma confiança no acerto da estimativa equivalente a quando a mesma era “entre 40 e 92%” ?

A conclusão é que mantidas as condições, inclusive o tamanho da amostra, existe uma relação inversa entre precisão e exatidão.

O que seria necessário para, mantido um determinado nível de confiança (alto), a precisão da estimativa fosse melhorada?

O que vimos até agora serve para estimação de dois parâmetros (μ e π) na presença de amostras grandes. No entanto, em várias situações de pesquisa não se pode trabalhar com amostras grandes, por questões éticas, custo, etc.

Estimativa com Pequenas Amostras e σ_X Desconhecido

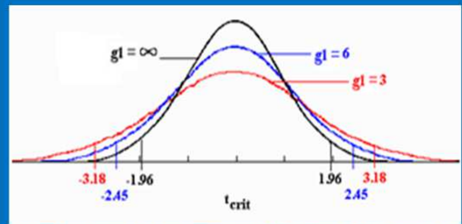
No caso de termos amostras pequenas ($n < 30$) e a variância populacional desconhecida, quando temos que utilizar a variância amostral como sua estimativa, o Teorema 2 não é válido.

Nestas situações, temos a teoria de estimação para pequenas amostras, dada pelo teorema a seguir:

Teorema 3: *Se a distribuição da variável X na população seguir uma distribuição Gaussiana*, então a estatística $\frac{\bar{X}-\mu_X}{\frac{s_X}{\sqrt{n}}}$ segue uma distribuição T de Student com $n-1$ graus de liberdade.

A distribuição T de Student é simétrica e unimodal, como a Gaussiana, mas apresenta caudas mais pesadas do que a Gaussiana. Em outras palavras, apresenta maior variabilidade, sendo sempre mais "achatada" que a Gaussiana para um mesmo valor de média.

Observe na figura abaixo a distribuição Gaussiana (em preto) comparada a uma distribuição T com 3 ($n = 4$) G.L. e 6 ($n = 7$) G.L. (em vermelho e em azul, respectivamente)



Podemos observar que, à medida que n aumenta, a distribuição T tende para distribuição Gaussiana, que é uma T com ∞ G.L.

Logo, com pequenas amostras, para um mesmo nível de confiança, teremos estimativas intervalares mais ou menos precisas?

Um IC para μ_X obtido a partir de amostra pequena, verificado o pressuposto de que a variável X segue uma distribuição Gaussiana, seria assim:

$$\bar{x} - T_{\alpha/2} \times \frac{S_X}{\sqrt{n}} \leq \mu_X \leq \bar{x} + T_{\alpha/2} \times \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

Exemplo: Foi medida a glicemia em uma amostra de 25 indivíduos representativos de uma determinada população. Encontrou-se na amostra média aritmética 1,52 g/l e desvio-padrão igual a 0,40 g/l. Sabe-se, por estudos anteriores, que a glicemia segue uma distribuição Gaussiana na população. Estimar a taxa média de glicemia, na população representada por esta amostra, ao nível de confiança de 0,99.

Resposta: $T_{24\ G.L.,\alpha=0,01}$ = 2,8 (tabela);

$IC_{99\%}$ para μ_X: 1,296---1,744 g/l.

OBS: Lembrar sempre de verificar se a variável atende ao pressuposto de normalidade antes de realizar estimações com amostras pequenas!

TAMANHO DE AMOSTRA NECESSÁRIO (n =?):

Na realização de pesquisas precisamos definir o tamanho de amostra necessário, dentro dos recursos disponíveis, de forma a termos a estimativa intervalar suficientemente precisa, escolhido um nível de confiança para a mesma.

Tanto para estimativas de médias e de proporções devemos definir qual a precisão (em termos absolutos ou percentuais) que queremos alcançar.

A margem de erro, que representa a precisão da estimativa, deve ser igualada à precisão desejada (l) de forma que apenas o n seja desconhecido.

No caso da média teremos: $n = \frac{\sigma_X^2 \times z_{\alpha/2}^2}{l^2}$

Normalmente não temos o valor de ${\sigma_X}^2$. Devemos então utilizar um valor obtido em outros estudos para a mesma variável ou então devemos realizar um estudo piloto (n pelo menos igual a 30) e utilizar ${S_X}^2$ como estimador de ${\sigma_X}^2$.

No caso da proporção teremos: $n = \frac{p(1-p)z^2_{\alpha/2}}{i^2}$

De maneira análoga ao caso de estimação da média, devemos obter p a partir de outros estudos para a mesma variável ou então devemos realizar um estudo piloto (n pelo menos igual a 30).

A relação entre a precisão e tamanho da amostra não é linear. Devemos buscar um equilíbrio entre precisão e o tamanho de amostra que seja viável.

Vejamos um exemplo:

Se desejamos estimar a proporção de crianças de 2 a 3 anos de idade com distúrbios de sono em uma dada população, com precisão de 3 pontos percentuais para mais ou para menos ($\pm 0,03$) a um nível de confiança de 0,95, devemos procurar na literatura especializada um valor para p (ou então realizar um estudo piloto com, por exemplo 30 observações). Encontrou-se informação de que em outras populações de crianças com a mesma idade o percentual de indivíduos com distúrbios do sono era próximo a 16% ($p = 0,16$). Podemos agora determinar n para a estimação com tal precisão.

$$n = \frac{0,16(1-0,16)1,96^2}{0,03^2} \cong 574$$

Se os pesquisadores achassem posteriormente que uma precisão de 0,03 não seria suficiente e que seria necessária uma precisão de 0,02, o novo tamanho de amostra seria:

$$n = \frac{0,16(1-0,16)1,96^2}{0,02^2} \cong 1291$$

Observe que para ganhar 1 ponto percentual de precisão seria preciso **dobrar** o tamanho da amostra!

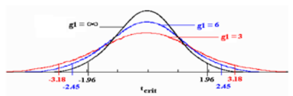


TABELA DE VALORES EM DF EM UMA DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT QUE DELIMITAM AS ÁREAS A (DO VALOR EM DF A INFINITO ou DO –VALOR EM DF A MENOS INFINITO)

ν / A	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500	0,0250	0,0100	0,0050	0,0025	0,0010	0,0005
001	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,710	31,820	63,660	127,300	318,300	636,600
002	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,090	22,330	31,600
003	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,210	12,920
004	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
005	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
006	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
007	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
008	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
009	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
010	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
011	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
012	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
013	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
014	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
015	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
016	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
017	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
018	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
019	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
020	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
021	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
022	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
023	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
024	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
025	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
026	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
027	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
028	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
029	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
030	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
040	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
050	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]