I) Estimando o valor de um parâmetro a partir de uma estatística amostral

Objeto de estudo:

Artifício

População (N) “bem definida”
Variável X
Medidas síntese: **parâmetros** (θ)

Ex: μ_X ; σ_X^2 ; σ_X ; Med. ; etc

Parâmetros são constantes na população, com valores conhecidos ou não.

Amostragem probabilística

Estimação

Amostra (n) “representativa”
Variável X
Medidas síntese:
estatísticas ($\hat{\theta}$): VA
Ex: $\bar{X}$; S_X^2 ; S_X ; $\tilde{X}$; etc

Estudos populacionais (censo)

Estudos amostrais

Para estimarmos o valor de um parâmetro θ desconhecido, precisamos de teorias sobre as estatísticas $\boldsymbol{\hat{\theta}}$, denominadas estimadores do respectivo parâmetro. Devemos conhecer o “comportamento” da distribuição da VA considerada:

$$\begin{cases} -formato \\ -tendência\ central \\ -dispersão \end{cases}$$

II) Testando Hipóteses sobre um parâmetro com base em evidências amostrais

Objeto de estudo: Artifício

População (N) “bem definida”
Variável X
Medidas síntese: **parâmetros** (θ)

Ex: μ_X ; σ_X^2 ; σ_X ; Med. ; etc

Hipóteses sobre os valores de um parâmetro populacional.

Amostragem probabilística

Teste de Hipóteses

Amostra (n) “representativa”
Variável X
Medidas síntese:
estatísticas ($\hat{\theta}$): VA
Ex: $\bar{X}$; S_X^2 ; S_X ; $\tilde{X}$; etc

Dados populacionais (censo)

Dados amostrais

Para **testarmos hipóteses** sobre o valor de um parâmetro populacional θ desconhecido, precisamos de teorias sobre as estatísticas $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, denominadas também de estimadores do respectivo parâmetro, como veremos mais tarde. Devemos, da mesma forma, conhecer o “comportamento” da distribuição da VA considerada.

- População, aqui, não é um conjunto de *pessoas*, mas um conjunto de *números*. As idades de cada um dos habitantes de um país, por exemplo, formam um conjunto finito de números (a “distribuição etária”) que podemos considerar como uma “população” de números. Uma população pode ser constituída de *contagens* (ex: o número de aparelhos de TV em cada domicílio de uma cidade) ou de *medições* feitas sobre objetos reais (ex: a altura de todos os professores de matemática em uma escola).

- Qual o estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ e seu comportamento teórico: *Tendência central*: **E($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$),** *Dispersão*: **VAR($\widehat{\boldsymbol{\theta}}$)** e *Formato* da distribuição da **V.A.** $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$;

Resumindo, precisamos distinguir, de agora em diante, os valores calculados a partir dos dados populacionais daqueles calculados a partir de dados amostrais.

- A partir da população temos os chamados **parâmetros**, representados em geral por letras gregas (média = μ, desvio-padrão = σ, proporção de sucessos = π),
- A partir de uma amostra representativa temos as chamadas **estatísticas amostrais**

($\bar{X}$, S, P), representadas por letras romanas. Os valores numéricos das estatísticas são considerados estimativas pontuais para os valores dos parâmetros.

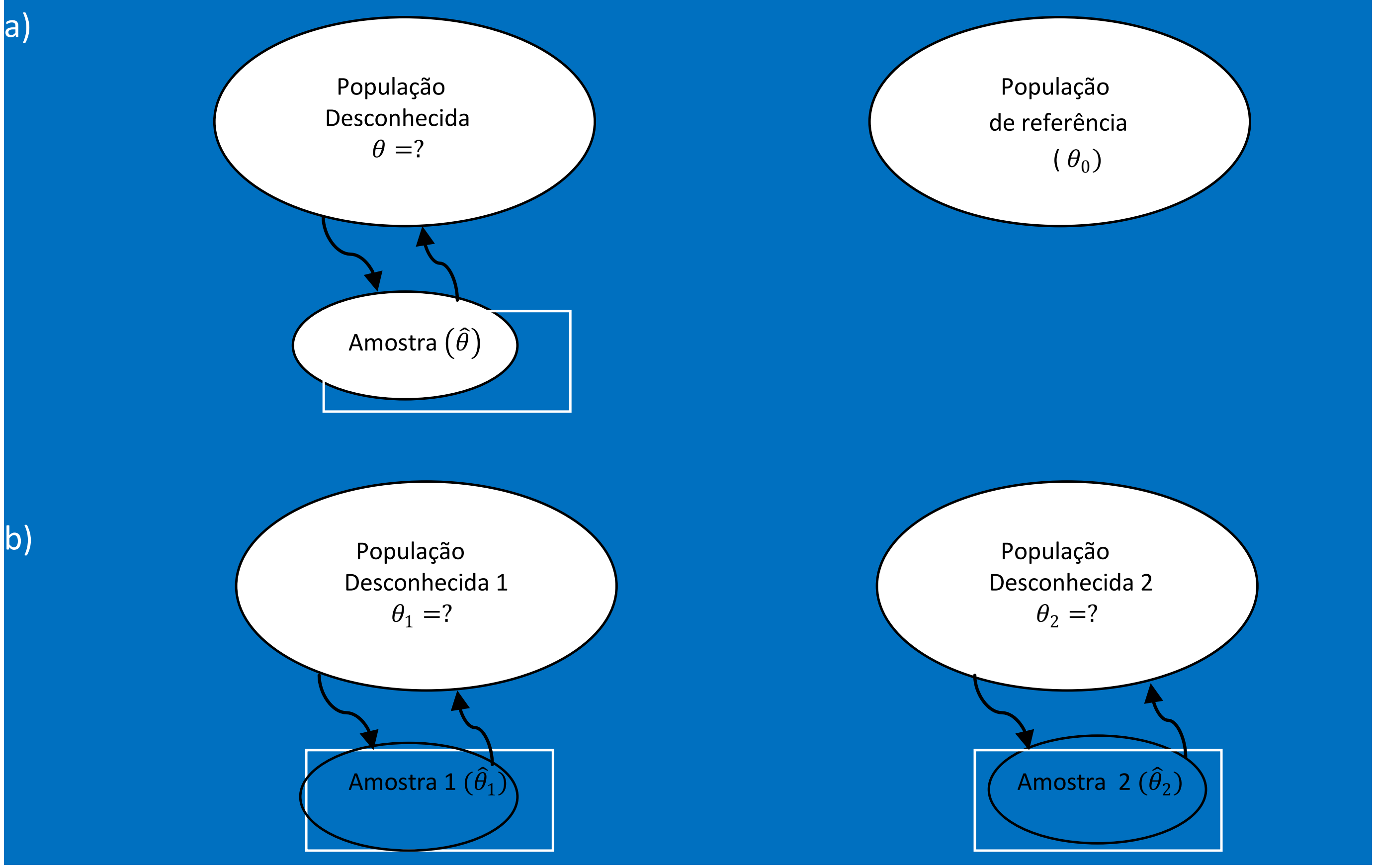
Como trabalhamos com o resultado obtido em uma amostra de tamanho “n”, temos que ter clareza que estaremos sujeitos a flutuações amostrais e que o resultado obtido (evidências amostrais) poderia ter sido diferente.

É necessário que essa ideia de variação amostral seja passada de forma clara aos alunos, assim como o conceito de “distribuição amostral” de um estimador.

Atividade no. 12

Estratégia de Comparação: Testes de Hipóteses

- 2 situações de comparação:



- A Hipótese Nula (H_0):

a) $\theta = \theta_0$

b) $\theta_1 = \theta_2$

- A Hipótese Alternativa (H_1):

a) $\theta \neq \theta_0$ (bilateral)

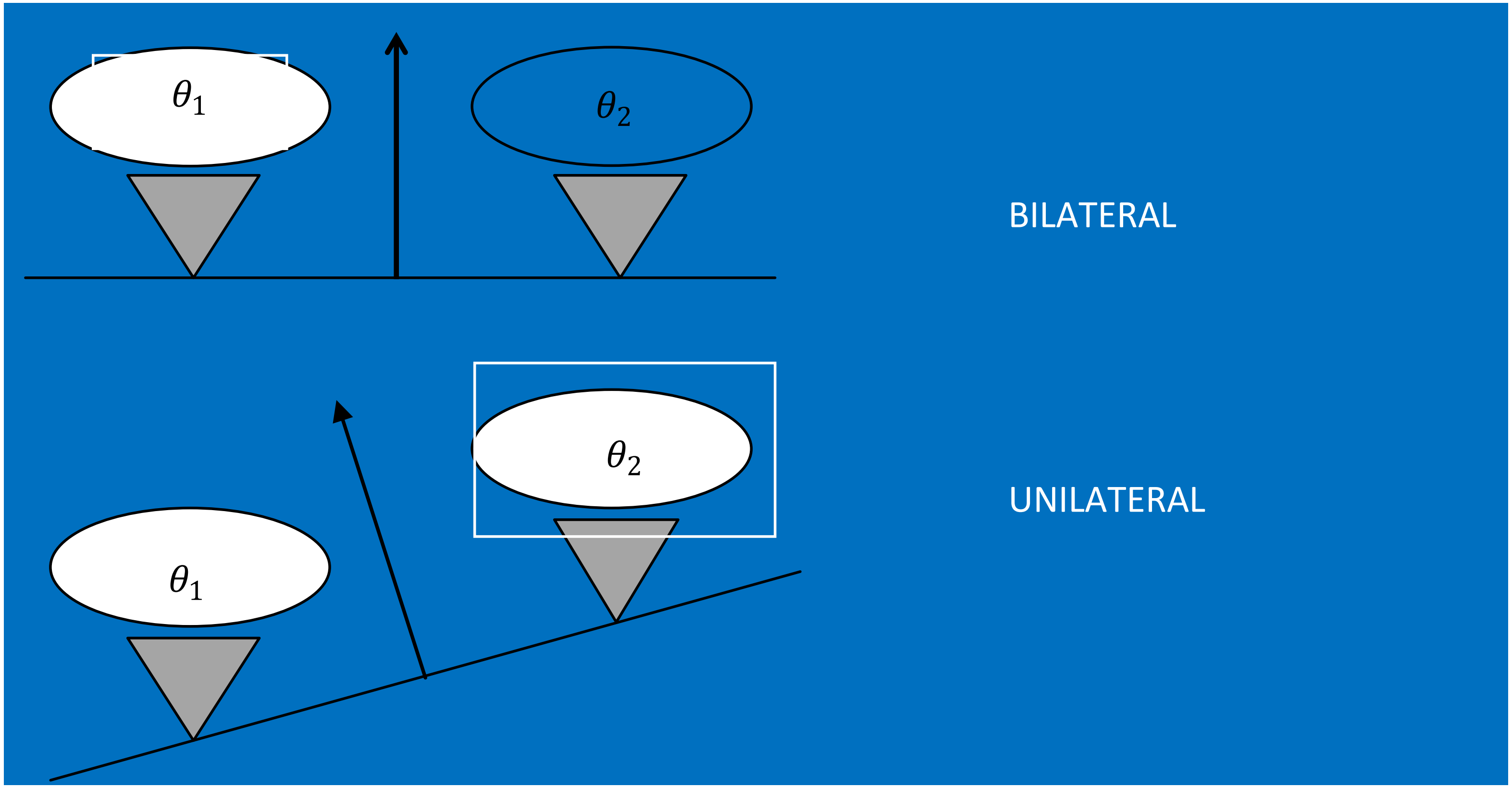
$\theta < \theta_0$ (unilateral)

$\theta > \theta_0$ (unilateral)

b) $\theta_1 \neq \theta_2$ (bilateral)

$\theta_1 < \theta_2$ (unilateral)

$\theta_1 > \theta_2$ (unilateral)


θ_1
θ_2
BILATERAL
θ_2
θ_1
UNILATERAL

A Estatística de Teste:

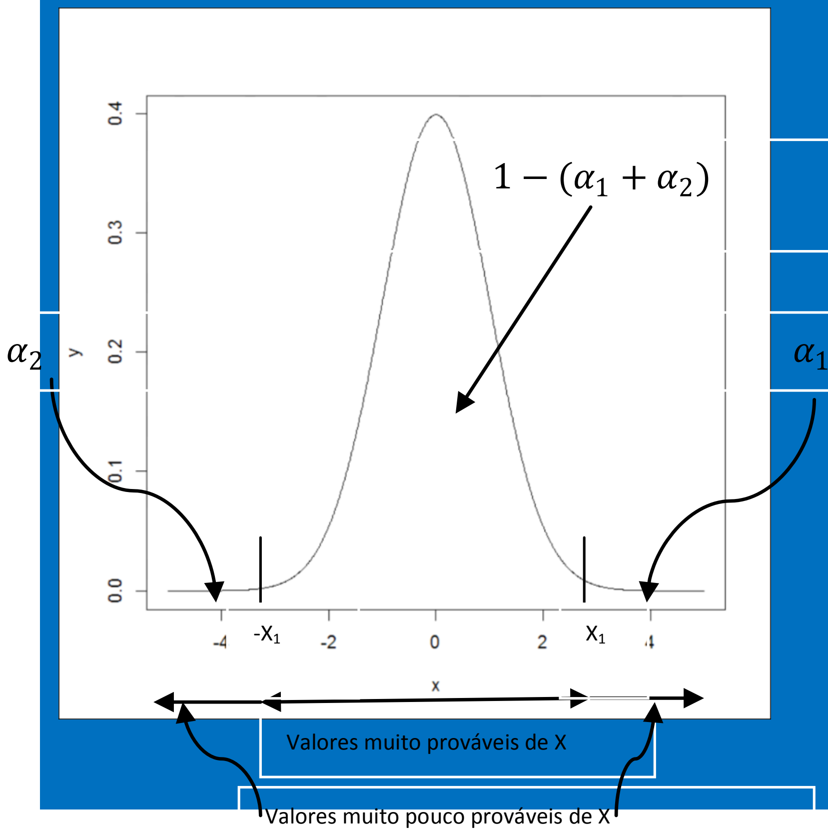
Uma quantidade matemática (vinda de uma expressão matemática) que exprima a "defasagem" entre os parâmetros (diferença, razão, outro indicador). É um valor particular de uma VA, por ter sido obtida a partir das observações feitas na amostra. Portanto, é uma estatística.

$$\frac{\text{valor estimado} - \text{valor na hipótese nula}}{\text{erro padrão do estimador}}$$

A Distribuição Teórica:

“Modelo” teórico de distribuição de probabilidades para a estatística de teste na situação H_0, que é a referência contra a qual o valor calculado da estatística de teste será confrontado. O teste vai verificar a posição relativa desse valor calculado em relação ao modelo teórico (do qual sabemos a expressão matemática, a forma, a tendência central e a dispersão). Assim podemos verificar se o valor calculado para a estatística é um valor “bem” provável da distribuição teórica considerada, ou se é um valor tão extremo daquela distribuição que fica difícil aceitarmos que tenha corrido apenas devido a flutuações amostrais. Precisamos então definir o que vamos considerar como “extremo”.

A Regra de Decisão:



$$P(X > x_1) = \alpha_1$$

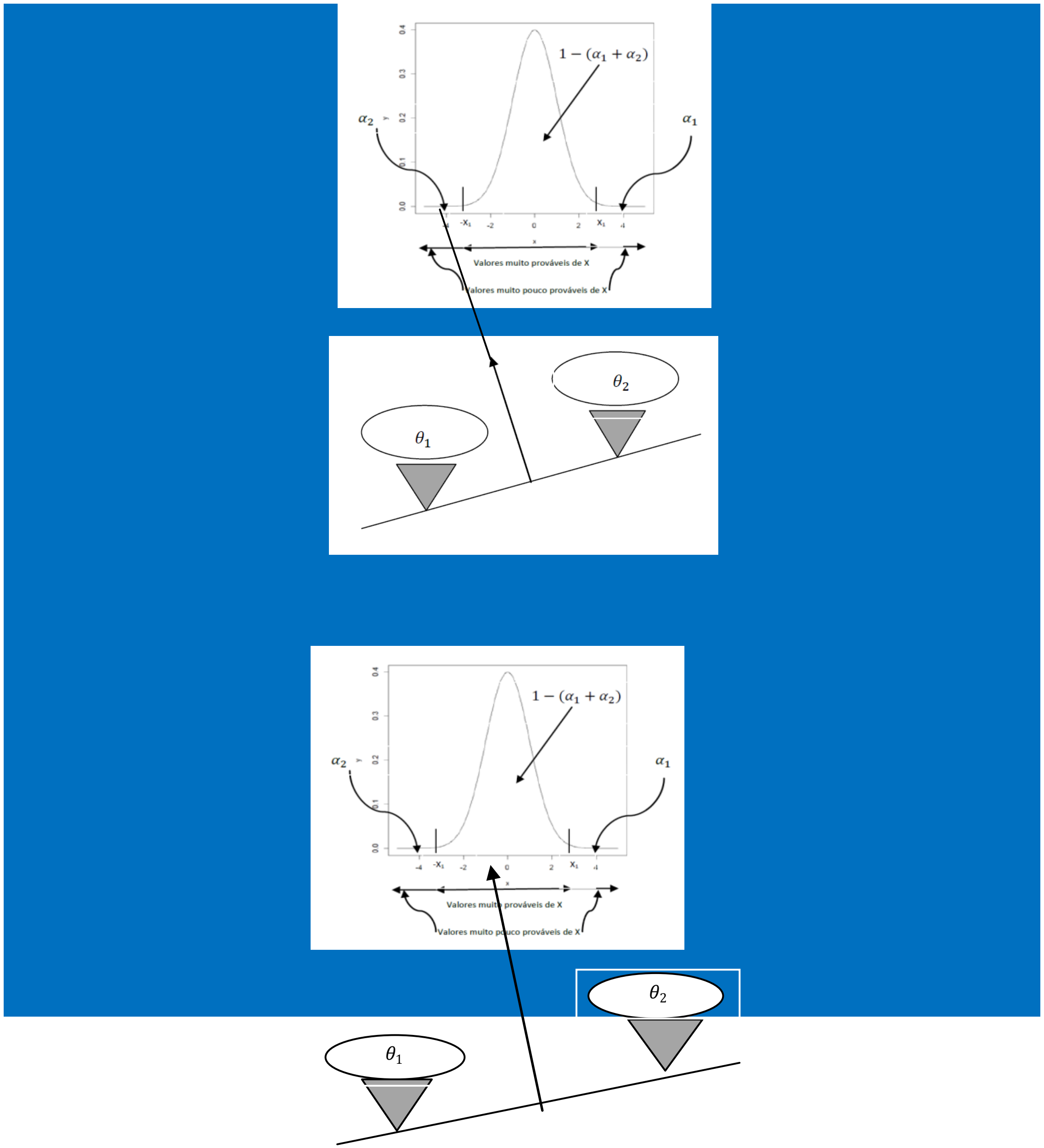
$$P(X < -x_1) = \alpha_2$$

$$P(X > x_1 \; ou \; X < -x_1) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

$$P(-x_1 < X < x_1) = 1 - \alpha$$

- Resultado do Teste de Comparação

Ao aplicarmos a regra de decisão no confronto do valor empírico obtido com a distribuição teórica de probabilidades da estatística de teste na situação H_0, chegamos ao resultado do TH.



$1-(\alpha_1+\alpha_2)$
α_2
α_1
$-X_1$
X_1
Valores muito prováveis de X
Valores muito pouco prováveis de X
θ_1
θ_2

Risco de errar ao rejeitar H_0 (nível de significância α):

A P(rejeitar H_0 | H_0 é verdade) é conhecida como nível de significância ou PROBABILIDADE DE ERRO DO TIPO 1. Veja que "rejeitar H_0" é consequência de termos observado um valor raro (muito pouco provável) para a estatística de teste. Esse risco é fixado ANTES de realizarmos o teste, já que o mesmo define a regra de decisão. É o risco de concluirmos por uma diferença inexistente. (Um valor de $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$ é muito usual nas pesquisas médicas).

- Risco de errar ao não rejeitar H_0 ($\boldsymbol{\beta}$)

A P(não rejeitar H_0 | H_1 é verdade) é conhecida como PROBABILIDADE DE ERRO DO TIPO 2 ($\boldsymbol{\beta}$). Veja que "não rejeitar H_0" é consequência de termos observado um valor bem provável para a estatística de teste. Se o teste não consegue "perceber" a diferença real que existe, o mesmo comete esse tipo de erro. Daí dizermos que $\boldsymbol{(1-\beta)}$ é o PODER DO TESTE, ou seja, a capacidade do mesmo de rejeitar H_0 diante de uma diferença real. O poder de um teste está ligado ao tamanho da amostra utilizada, aumentando com o aumento do tamanho da amostra. Devemos lembrar que ao não rejeitarmos H_0 podemos estar cometendo o ERRO DO TIPO 2, razão pela qual nunca podemos "confirmar" H_0.

Decisão estatística	**Dados de uma população para a qual:**	
	H_0 é verdadeira	**H_0 não é verdadeira (H_0 é falsa)**
Não rejeitar H_0	**Decisão correta** P(não rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira) = 1 - α	**Erro tipo 2** P(Não Rejeitar H_0 | H_0 é falsa) = β
Rejeitar H_0	**Erro tipo 1** P(Rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira) = α	**Decisão correta** P(Rejeitar H_0 | H_0 é falsa) = 1 - β

- O que fazer se ...

a) H_0 não é rejeitada

Devemos concluir que não há evidências nos dados para afirmarmos ter uma diferença estatísticamente significativa entre os parâmetros comparados. Estaremos diante de um resultado não significativo.

Nunca devemos afirmar que H_0 é verdade nessa situação.

b) H_0 é rejeitada

Ao rejeitarmos H_0 imediatamente aceitamos H_1. Se o teste foi do tipo bilateral devemos dizer que os parâmetros são diferentes. Já em um teste unilateral podemos afirmar que um parâmetro é superior (ou inferior) ao outro. Devemos comunicar o valor de α adotado para que todos saibam a probabilidade máxima de ERRO DO TIPO 1.

- A significância estatística do resultado obtido (valor-p; p-valor; valor de p; “p-value”)

Após o teste podemos calcular a probabilidade de, se H_0 for verdade, de encontrarmos o valor calculado da estatística de teste ou um valor ainda mais extremo. Essa probabilidade nos informa o quanto de evidência os dados fornecem para rejeitar H_0. Um valor muito baixo indica que o que calculamos é pouco provável de ocorrer na situação H_0. Logo, rejeitamos a hipótese nula, já que um valor muito pouco provável em princípio não deveria ser o que ocorre na situação descrita em H_0.

Curiosidade: Os banqueiros de casas de apostas na Inglaterra tradicionalmente aceitavam o risco de perder 1 *shilling* em cada aposta de 1 libra. Como naquela época 1 libra correspondia a 20 *shillings*, dizem ser esta a origem do nível de significância $\alpha = \mathbf{0,05}$.

Os passos de um teste estatístico de hipóteses:

Apresentar a indagação motivadora da pesquisa

↓

Transformar a indagação motivadora da pesquisa em hipótese de pesquisa

↓

Definir as duas hipóteses estatísticas (H_0 e H_1)

↓

Definir o nível de significância do teste (α)

↓

Selecionar uma amostra de tamanho n (suficiente para garantir um dado poder para o teste para o nível de significância adotado) e coletar os dados

↓

Definir e calcular a estatística de teste (pela teoria sobre o estimador utilizado)

↓

Avaliar a evidência amostral contra H_0

↓

Tomar decisão e apresentar a conclusão estatística (pela regra de decisão)

↓

E, finalmente ...

Relatar a conclusão estatística de forma clara e compreensível (evitar informar apenas o "valor de p" e, se possível, apresentar a estimação intervalar para o parâmetro em questão)

- Podem ser realizados testes de hipóteses para qualquer parâmetro populacional, ou funções de parâmetros, bastando seguir os passos descritos acima.
- Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: A média aritmética de pesos de mamíferos de uma certa espécie, em idade adulta, em uma área de preservação fechada é igual a 8,95 kg. Uma amostra aleatória de 100 animais adultos que vivem na fronteira entre a mata atlântica e a área urbana de uma cidade, foi calculada como sendo igual a 7,5 kg, com desvio padrão igual a 0,49 kg. Realizar um TH para o parâmetro da população representada pela amostra, tendo como referência os dados da área de preservação fechada.

Situação do Exemplo 1:

População: qquer	**σ^2** desconhecido	**H_0 :** $\mu = \mu_0$	**Nível de signif. α**
Estatística de teste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$		Aproximadamente Normal se $\mu = \mu_0$ e ***se amostra n for grande*** ($n \geq 30$)	
Hipótese Alternativa H_1:		**Regra de decisão: Rejeitar H_0 se:**	
$\mu \neq \mu_0$		$\|Z\| > Z_{\alpha/2}$	
$\mu > \mu_0$		$Z > Z_\alpha$	
$\mu < \mu_0$		$Z < -Z_\alpha$	

Exemplo 2: Segundo dados do mesmo estudo acima a prevalência de carrapatos na população adulta na área de preservação fechada foi igual a 8%. Se uma amostra aleatória de 100 animais adultos, representativa do mesmo ecossistema acima, apresentou prevalência de 9,1%, realizar TH para o parâmetro da população representada pela amostra, tendo como referência os dados da área de preservação fechada.

População: qquer	Seja P a proporção de sucessos em n tentativas	**H_0 :** $\pi = \pi_0$	**Nível de signif. α**

Estatística de teste: $$Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$	Proporção π_0 na população de referência Aproximadamente Normal ***para n grande*** ($n \geq 30$) e $\pi = \pi_0$
Hipótese Alternativa H_1:	**Regra de decisão: Rejeitar H_0 se:**
$\pi \neq \pi_0$	$\lvert Z \rvert > Z_{\alpha/2}$
$\pi > \pi_0$	$Z > Z_\alpha$
$\pi < \pi_0$	$Z < -Z_\alpha$