Modelos Estocásticos Aplicados à Indústria

Prof. Lupércio França Bessegato

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Juiz de Fora
lupercio.bessegato@ufjf.edu.br
www.ufjf.br/lupercio_bessegato

Setembro/2013

Roteiro da apresentação

1

Introdução

Processos Estocásticos

Sequência de eventos governados por leis probabilísticas

Objetivo

- Investigar estrutura de variáveis aleatórias X_t
- t é um parâmetro em um conjunto de ínidices T

Alguns Tipos de Processos Estocásticos

Passeio aleatório, processo de renovação, processo de ramificação, filas, movimento Browniano, etc.

Amplas possibilidade de aplicações

Definições Fundamentais

Definição (Processo Estocástico)

Sequência de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in T\}$, todas definidas em um mesmo espaço de probabilidades e indexadas por um conjunto T

$$X_t : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$$

Espaço de estados (E)

Conjunto ao qual pertencem todos os possíveis valores de X_t

Espaço paramétrico de tempo (T)

- Se $T = 0, 1, \ldots, \{X_t\}$ é um processo estocástico em tempo discreto
- Se $T = [0, \infty), \{X_t\}$ é um processo estocástico em tempo contínuo
- T pode não ser unidimensional (Processo de Poisson espacial)

Tipos de Processos

Atendendo a natureza de T e E

E discreto, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \mathbb{N}$

E discreto, T contínuo

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \{t : t \geq 0\}$

E contínuo, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{N}$

E contínuo, T contínuo

Geralmente: $E = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

Distribuição Finito Dimensional

Definição

Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset T$, a distribuição do vetor $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ é denominada *distribuição finito dimensional* do processo.

- A totalidade das distribuições finito dimensionais de um processo determinam, sob condições gerais, a distribuição do processo.
- Um processo estocástico é denominado *Gaussiano* se todos os vetores finito dimensionais possuem distribuição normal multivariada
- Para um valor de t fixo, tem-se a distribuição unidimensional de X_t.

Estatísticas de um Processo

Sejam $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$ e $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\}$, respectivamente, a média e a variância associadas à X_t .

Definição

- Função média do processo: $\mu = \{\mu_t : t \in T\}$
- Função variância do processo: $\sigma^2 = \{\sigma_t^2 : t \in T\}$
- Função covariância do processo: $\sigma_{s,t} = \{\mathrm{Cov}\{X_t, X_s\} : s, t \in T\}$

Processos com Incrementos Independentes

Considerando $T = [0, \infty)$, a menos que explicitado em contrário

Definição

Se $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes para todas as escolhas de $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_n$, dizemos que o processo $\{X_t\}$ possui *incrementos indepedentes*.

Consequência

Seja um processo $\{X_t\}$ a tempo discreto ($T = \{0, 1, \ldots\}$) com incrementos independentes.
$\{Z_i\}, Z_i = X_i - X_{i-1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_i = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_i$

Processo com Incrementos Estacionários

Definição

Diz-se que o processo tem incrementos estacionários se a distribuição dos incrementos $X_{t_1+h} - X_{t_1}$ depende somente do comprimento h e não do tempo t_1.

Consequência

Para um processo com incrementos estacionários,
$X_{t_1+h} - X_{t_1} \stackrel{d}{=} X_{t_2+h} - X_{t_2}$ para qualquer valor de $t_1, t_2,$ e h.

Propriedade de Markov

Definição

Um processo estocástico possui a propriedade de Markov se
$\mathrm{P}\{X_t \in A | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = \mathrm{P}\{X_t \in A | X_{t_n} = x_n\}$, para $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n < t$.

Consequência

"O futuro não depende do passado quando se conhece o presente"

Definições

Definição (Distribuição inicial do processo)

É a distribuição de X_0.

Definição (Função de probabilidade de transição)

$\mathrm{P}(x, s, t, A) = \mathrm{P}\{X_t \in A | X_s = x\}, T > s$

Consequência

Conhecidas a distribuição inicial e a função de probabilidade de transição de um processo Markoviano, pode-se calcular todas suas distribuições finito dimensionais.

Distribuições Unidimensionais

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \dots, M\}$

$$\begin{aligned} P\{X_t = j\} &= \sum_{i=0}^{M} P\{X_0 = i, X_t = j\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} P\{X_t = j | X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} P(i, 0, t, j) P\{X_0 = 1\} \end{aligned}$$

Distribuições Finito Dimensionai

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \dots, M\}$

$$\begin{aligned} &P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_k} = i_k\} = \\ &= \sum_{i=0}^{M} P\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_k} = i_k\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} P\{X_0 = i\} P\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\} P\{X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1\} \dots \\ &\quad P\left\{X_{t_k} = i_k | X_{t_{k-1}} = i_{k-1}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} P\{X_0 = i\} P(i, 0, t_1, i_1) P(i_1, t_1, t_2, i_2) \dots P(i_{t_{k-1}}, t_{k-1}, t_k, i_k) \end{aligned}$$

2

Cadeias de Markov

Introdução

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

Processos Markovianos

- Permite modelar a incerteza em muitos sistemas reais que evoluem dinamicamente no tempo
- Ampla variedade de campos de aplicação
- Conceitos básicos: estado e transição de estado

Propriedade Markoviana

O conhecimento do estado atual do processo é suficiente para predizer o comportamento estocástico futuro do processo

Introdução II

Objetivo

Encontrar descrição adequada de estados de maneira que o processo estocástico associado tenha a propriedade Markoviana

Desenvolvimento Teórico

- Processo de Markov a tempo discreto
- Transições de estado ocorrem apenas em tempos fixos

Cadeia de Markov

Espaço de estados discreto e parâmetro de tempo discreto.

Definição

Diz-se que um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, é uma cadeia de Markov (de primeira ordem) se para $\forall i, j, n$ tem-se que:

$$\mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i\} = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

Notação

$\mathrm{P}_{ij}^{(n,n+1)} = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$ é a probabilidade de transição de i para j no tempo n.

Cadeia Homogênea

Definição

A cadeia é homogênea no tempo quando as probabilidades de transição não dependem de t.

Consequência

$$\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{P}\{X_{t+1} = j | X_t = i\}, \forall t \in E$$

Passeio Aleatório

Definição

$$X_i = X_{i-1} + Z_i, \text{ com}$$

- $X_0 = 0$
- $\mathrm{P}\{Z_i = 1\} = \mathrm{P}\{Z_i = -1\} = 1/2, \forall i$

Exemplo (1)

$$\mathrm{P}\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} = \mathrm{P}\{X_1 = -1 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

Exemplo (2)

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = \frac{1}{2}$$

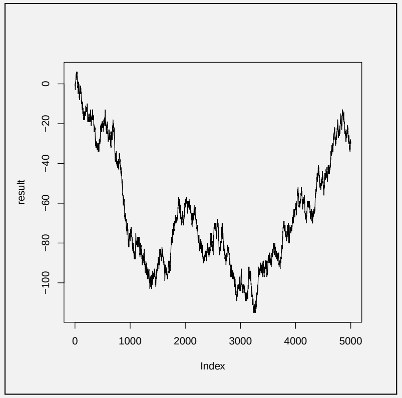
$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = -1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = -1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} P\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} + P\{X_2 = 0 | X_1 = -1\} P\{X_1 = -1 | X_0 = 0\}$$

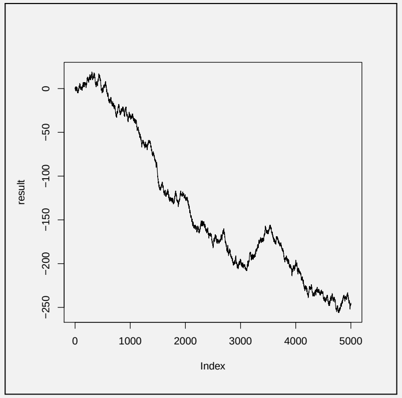
$$P\{X_t = 0 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}, \forall t \in E$$

Trajetórias de Passeios Aleatórios

5.000 passos com $p = 0,50$



5.000 passos com $p = 0,48$



Matriz de Probabilidades de Transição

Definição

Se a cadeia é homogênea no tempo, a matriz de probabilidade de transição (em um passo) é:

$$\mathbf{P} = (P_{ij}), \; i, j \in E$$

Propriedades de P

1. $P_{ij} \geq 0, \forall i, j$
2. $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1, \forall i \in E$, ou seja, para i fixo, $\{P_{ij} : j \in E\}$ define uma função de probabilidade.

Toda matriz que satifaz (1) e (2) é chamada matriz estocástica

Distribuição Marginal de X_0

Função de Probabilidade de X_0

$$\boldsymbol{\alpha}'_0 = [\alpha_0(i); i \in E], \text{ com } \alpha_0(i) = P\{X_0 = i\},$$

em que α é o vetor que define a função de probabilidade de X_0.

A função de probabilidade de X_0 é chamada função de probabilidade inicial da cadeia

Distribuição Marginal de X_1

Função de Probabilidade de X_1

$$\begin{aligned}
\alpha_1(j) &= \mathrm{P}\{X_1 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}
\end{aligned}$$

$$\alpha_1(j) = \sum_{i \in E} \alpha_0(i) P_{ij}$$

Exemplo

Dados

Suponha $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{\alpha}_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(0) = \mathrm{P}\{X_1 = 0\} = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,35$$

Exemplo (cont.)

Distribuição Marginal de X_1

$$\boldsymbol{\alpha}_1' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1{}' = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28]$$

Distribuição Marginal de X_2

Função de Probabilidade de X_2

$$\begin{aligned}
\alpha_2(j) &= \mathrm{P}\{X_2 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_1 = i, X_2 = j\}
\end{aligned}$$

$$\alpha_2(j) = \sum_{i \in E} \alpha_1(i) P_{ij}$$

Exemplo

Dados

Exemplo anterior, com $\alpha'_1 = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2(0) = \mathrm{P}\{X_2 = 1\} = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,281$$

Exemplo (cont.)

Distribuição Marginal de X_2

$$\boldsymbol{\alpha}'_2 = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2{}' = [0,281; 0,153; 0,208; 0,358]$$

Distribuição Marginal e Conjunta

Dadas a distribuição inicial da cadeia e a matriz de probabilidades de transição, pode-se calcular:

- a distribuição marginal de $X_k, k \geq 1$
- a distribuição conjunta de $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

Distribuições Marginais

Distribuições Marginais da Cadeia

Em notação matricial.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}'_1 &= \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\alpha}'_2 &= \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{P} = (\boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P})\, \mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}^2 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}'_k &= \boldsymbol{\alpha}'_{k-1} \mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_{k-2} \mathbf{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}^k \end{aligned}$$

Função de probabilidade de X_k

$$\boldsymbol{\alpha}'_k = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}^k$$

α'_1 É FUNÇÃO DE PROBABILIDADE?

$$\alpha'_1 = \alpha'_0 \mathbf{P}$$

$$\sum_{j\in E}\alpha_1(j) = \sum_{j\in E}\left(\sum_{i\in E}\alpha_0(i)P_{ij}\right) = \sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\alpha_0(i)P_{ij}$$
$$= \sum_{i\in E}\alpha_0(i)\sum_{j\in E}P_{ij}$$

Mas $\sum_{j\in E}P_{ij} = 1$. Assim:

$$\sum_{j\in E}\alpha_1(j) = \sum_{i\in E}\alpha_0(i) = 1$$

DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA

TRAJETÓRIA EM 2 PASSOS

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0=i,X_1=j,X_2=k\} &= \mathrm{P}\{X_0=i\}\,\mathrm{P}\{X_1=j|X_0=i\}\,\mathrm{P}\{X_2=k|X_0=i,X_1=j\}\\ &= \mathrm{P}\{X_0=i\}\,\mathrm{P}\{X_1=j|X_0=i\}\,\mathrm{P}\{X_2=k|X_1=j\}\\ &= \alpha_0(i)P_{ij}P_{jk}\end{aligned}$$

TRAJETÓRIA EM r PASSOS

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_r=i_r\} &= \mathrm{P}\{X_0=i_0\}\,\mathrm{P}\{X_1=i_1|X_0=i_0\}\ldots\\ &\quad \mathrm{P}\{X_r=i_r|X_{r-1}=i_{r-1}\}\\ &= \alpha_0(i_0)P_{i_0,i_1}P_{i_1,i_2}\ldots P_{i_{r-1},i_r}\end{aligned}$$

EXEMPLO

DADOS

Calcular $\mathrm{P}\{X_0=1,X_1=0,X_2=0\}$, com $E=\{1,2,3,4\}$,

$\alpha'_0 = [0,2;0,1;0,3;0,4]$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0,1 & 0,3 & 0 & 0,6\\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4\\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4\\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0\end{bmatrix}$

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0=1,X_1=0,X_2=0\} &= \mathrm{P}\{X_0=1\}\,\mathrm{P}\{X_1=0|X_0=1\}\,\mathrm{P}\{X_2=0|X_1=0\}\\ &= \alpha_0(1)P_{10}P_{00} = 0\end{aligned}$$

PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO DE $2^{a.}$ ORDEM

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_2=j|X_0=i\} &= \sum_{k\in E}\mathrm{P}\{X_1=k,X_2=j|X_0=i\}\\ &= \sum_{k\in E}\mathrm{P}\{X_1=k|X_0=i\}\,\mathrm{P}\{X_2=j|X_1=k\}\\ &= \sum_{k\in E}P_{ik}P_{kj}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\{X_2=j|X_0=i\}$ é a célula (i,j)da matriz $\mathbf{P}^2$

Transição de 2$^{a.}$ Ordem

Matriz de Probabilidades de Transição

Notação

$$P_{ij}^{(2)} = \mathrm{P}\{X_{n+2} = j | X_n = i\}$$

A matriz $\mathbf{P}^2$ é formada pelas probabilidades de transição de $2^{a.}$ ordem.

Probabilidade de Transição de 2$^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de 2$^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,37 & 0,09 & 0,36 & 0,18 \\ 0,36 & 0,08 & 0,32 & 0,24 \\ 0,33 & 0,13 & 0,24 & 0,30 \\ 0,18 & 0,22 & 0,08 & 0,52 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\{X_2 = 0 | X_0 = 1\} = P_{10}^{(2)} = 0,36$$

Probabilidade de Transição de 3$^{a.}$ Ordem

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_3 = j | X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i\}\, \mathrm{P}\{X_3 = j | X_2 = k\} \\ &= \sum_{k \in E} P_{ik}^{(2)} P_{kj} = (P^3)_{ij} \\ &= P_{ij}^{(3)} \end{aligned}$$

Notação

$$P_{ij}^{(3)} = \mathrm{P}\{X_{n+3} = j | X_n = i\}$$

Probabilidade de Transição de 3$^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de 3$^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,253 & 0,165 & 0,180 & 0,402 \\ 0,276 & 0,156 & 0,192 & 0,376 \\ 0,285 & 0,149 & 0,220 & 0,346 \\ 0,354 & 0,106 & 0,312 & 0,228 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\{X_3 = 0 | X_0 = 1\} = P_{10}^{(3)} = 0,276$$

Probabilidade de Transição de Ordem r

Em geral,

$$P_{ij}^{(r)} = \mathrm{P}\{X_r = j | X_0 = i\}$$

Consequência

1. $\mathrm{P}\{X_0 = i, X_r = j\} = \alpha_0(i) P_{ij}^{(r)}$
2. $\mathrm{P}\{X_{n+r} = j | X_n = i\} = P_{ij}^{(r)}$

Probabilidade de Transição de $50^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de $3^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\{X_{50} = 0 | X_0 = i\} = P_{i0}^{(50)} = 0,297, \forall i \in E$$

Equação de Chapman-Kolmogorov

Estabelece as probabilidades de transição de um estado i para um estado j em $n + r$ passos.

$$\boxed{P_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(r)}}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_3 = i_3, X_5 = i_5\} &= \mathrm{P}\{X_0 = i_0\} \mathrm{P}\{X_3 = i_3 | X_0 = i_0\} \mathrm{P}\{X_5 = i_5 | X_3 = i_3\} \\ &= \alpha_o(i_0) P_{i_0 i_3}^{(3)} P_{i_3 i_5}^{(2)} \end{aligned}$$

Exemplo

Dados

Calcular $\mathrm{P}\{X_0 = 1, X_3 = 0, X_6 = 1, X_8 = 3\}$, com $E = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$

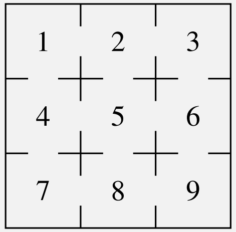
Solução

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_0 = 1, X_3 = 0, X_6 = 1, X_8 = 3\} &= \mathrm{P}\{X_0 = 1\} \mathrm{P}\{X_3 = 0 | X_0 = 1\} \mathrm{P}\{X_6 = 1 | X_3 = 0\} \\ &\quad \mathrm{P}\{X_8 = 3 | X_6 = 1\} \\ &= \alpha_0(1) P_{10}^{(3)} P_{01}^{(3)} P_{13}^{(2)} = (0,1)(0,276)(0,165)(0,376) \\ &= 0,002 \end{aligned}$$

Exemplo - Rato

Rato em Labirinto

Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo. O estado do sistema é o número do compartimento em que o rato está.
Determine a matriz de probabilidades de transição deste processo.



Solução

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Clima

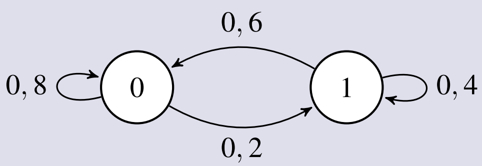
Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Topologia da Cadeia



Exemplo - Clima II

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0\\1 \end{array} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Quais serão as probabilidades de transição de $365^{a.}$ ordem (daqui um ano)?

Algumas Aplicações de Cadeia de Markov

Aplicações

- Modelo de estoque
- Modelos de manutenção
- Modelos de evolução de ativos
- Modelos crédito

Exemplo - Oficina

Falha de Equipamentos

Há 3 máquinas, que podem falhar a cada dia com uma probabilidade de 0.1, independente uma das outras. Oficina de reparo com capacidade de apenas uma máquina por dia. Máquina reparada não falha no próximo dia. Máquina 1 tem prioridade (gargalo na produção). Máquina 3 tem a menor prioridade.

Estados

1: máquina 1 falha
2: máquina 2 falha
3: máquina 3 falha
4: máquinas 1 e 2 falham
5: máquinas 1 e 3 falham
6: máquinas 2 e 3 falham
7: todas máquinas falham
8: todas máquinas trabalham

Exemplo - Oficina II

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,09 & 0,09 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0,81 \\ 0,09 & 0 & 0,09 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0,81 \\ 0.09 & 0,09 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0,81 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,081 & 0,081 & 0,081 & 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,001 & 0,729 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Oficina III

Probabilidades de Transição até o $50^{o.}$ Dia

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \end{bmatrix}$$

Classificação de Estados

Definição (Acessibilidade)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.
- Notação: $i \to j$.

Definição (Comunicação)

Os estados i e j comunicam-se entre eles se $i \to j$ e $j \to i$.

- Existem n_{ij} e n_{ji} tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$ e $P_{ji}^{(n_{ji})} > 0$.
- Notação: $i \leftrightarrow j$.

Relação de Comunicação

A relação de comunicação define uma relação de equivalênica, isto é:

- $i \leftrightarrow i$
- Se $i \leftrightarrow j$, então $j \leftrightarrow i$
- Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, então $i \leftrightarrow k$

Decomposição do Espaço de Estados

A relação de estados comunicantes induz uma partição do espaço de estados:

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup T$$

Classes de equivalência (C)

Todos os estados em C_i comunicam-se entre si, mas nenhum de seus estados é acessível desde qualquer estado pertencente à $C_j, j \neq i$.

Estados Transitórios

Conjunto T é formado por estados a partir dos quais há trajetórias para algum estado das classes $C_i,\ i = 1, 2, \ldots, r$.
(Dessas classes não é possível retornar ao conjunto T

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$
$3 \leftrightarrow 4$
$5 \to 0 \not\to 5$
$5 \to 3 \to 4 \not\to 5$

$C_1 = \{0, 1, 2\}$
$C_2 = \{3, 4\}$
$T = \{5\}$

Exemplo II

Comportamento da cadeia à longo prazo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,359 & 0,119 & 0,379 & 0,033 & 0,110 & 0 \end{bmatrix}$$

Irredutibilidade

Definição

Uma cadeia de Markov é irredutível se existe uma única classe de equivalência, isto é, $E = C_1$

A cadeia é irredutível se todos os estados comunicam-se entre si.

Periodicidade

Definição

Período do estado i é definido como:

$$d(i) = \begin{cases} \text{m.d.c. } \{n\} & \text{, se } P_{ii}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{, se } P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases},$$

onde m.d.c. é o máximo divisor comum.

Definição

Um estado $i \in E$ é aperiódico se $d(i) = 1$.

Propriedade

Se $i \leftrightarrow j$, então $d(i) = d(j)$.

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

```
> potmatriz(matriz4,2)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.39 0.00 0.61 0.00
[2,] 0.00 0.38 0.00 0.62
[3,] 0.45 0.00 0.55 0.00
[4,] 0.00 0.44 0.00 0.56

> potmatriz(matriz4,3)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 0.000 0.422 0.000 0.578
[2,] 0.414 0.000 0.586 0.000
[3,] 0.000 0.410 0.000 0.590
[4,] 0.432 0.000 0.568 0.000
```

```
potmatriz(matriz4,50)
     [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.425 0.000 0.575 0.000
2,] 0.000 0.415 0.000 0.585
3,] 0.425 0.000 0.575 0.000
4,] 0.000 0.415 0.000 0.585

potmatriz(matriz4,51)
     [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.000 0.415 0.000 0.585
2,] 0.425 0.000 0.575 0.000
3,] 0.000 0.415 0.000 0.585
4,] 0.425 0.000 0.575 0.000
```

$$\begin{cases} P_{00} = 0 \\ P_{00}^{(2)} \geq P_{01}P_{10} > 0 \end{cases}$$

$$d(0) = \text{m.d.c.}\,\{2, 4, \dots\}$$

$$\Rightarrow d(0) = 2$$

Cadeias Aperiódicas

Definição

Diz-se que uma cadeia é aperiódica se ela é irredutível e um de seus estados tem período 1.

Nossos estudos estarão concentrados em cadeias aperiódicas.

Recorrência I

Definição

Suponha que $X_0 = i$, $i \in E$. O tempo de primeiro retorno ao estado i, é definido como $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$.

Definição

Um estado i é recorrente se, e somente se, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$, ou, equivalentemente, $\mathrm{P}\{\tau_i < \infty | X_0 = i\} = 1$.

Definição

Seja i um estado recorrente. Diz-se que i é recorrente positivo se $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$. Se $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$, diz-se que o estado i é recorrente nulo.

Recorrência II

Propriedade

Recorrência é uma propriedade de classe, isto é, se $i \leftrightarrow j$ e i é recorrente, então j também é recorrente.

Se i é recorrente positivo (nulo) e $i \leftrightarrow j$, então j também é recorrente positivo (nulo).

Definição

Se um estado não é recorrente, ele é transitório.

Recorrência de Cadeias Finitas

Definição

Em uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, existe pelo menos um estado recorrente .

Corolário

Se uma cadeia finita é irredutível, então todos os estados são recorrentes positivos.

Cadeias Ergódicas

Definição (Cadeia Ergódica)

Uma cadeia, não necessariamente finita, é ergódica se ela é irredutível, aperiódica e recorrente

Definição (Cadeia Fortemente Ergódica)

Diz-se que uma cadeia é fortemente ergódica, se ela é ergódica e se pelo menos um de seus estados (e portanto todos) é recorrente positivo.

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \end{bmatrix}$$

- Cadeia é finita irredutível, logo todos os estados são recorrentes positivos (nenhum é transitório).
- $P_{ii}^{n} > 0, \forall n$

Distribuição Invariante I

Definição

Se uma cadeia é fortemente ergódica, então, para cada estado i existe $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$.

Esse limite não depende do estado inicial da cadeia, ou seja, $\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \pi(i)$.

Definição (Distribuição Invariante)

Dessa maneira, define-se a distribuição invariante da cadeia, que é representada por:

$$\boldsymbol{\pi}' = [\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(i), \ldots], \, i \in E.$$

Distribuição Invariante II

Teorema

Se a cadeia for fortemente ergódica, então, para $\forall i,j \in E$*:*

1. $$\pi(i) = \frac{1}{\mathrm{E}_i(\tau_i)},$$

   com $\mathrm{E}_i(\tau_i) = \mathrm{E}\left[\tau_i | X_0 = i\right]$ *e* $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$
2. $\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \pi(i)$*, ou seja, esse limite não depende do estado inicial da cadeia*

Distribuição Invariante III

Se a cadeia é finita, aperiódica e irredutível, existe a distribuição invariante, que pode ser obtida das seguintes maneiras:

1. Calcula-se $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$. Essa matriz existe e tem a forma $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}'$, onde $\mathbf{1}$ é um vetor de uns. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é qualquer das linhas dessa matriz-limite.
2. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é a solução dos sistema de equações lineares $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}$, sujeito à restrição $\sum_{i\in E}\pi(i) = 1$. A condição de ergodicidade forte garante que a solução existe e é única.

As probabilidades $\pi(i)$, $i \in E$ podem ser vistas com a proporção de vezes que a cadeia passa pelo estado i em uma quantidade suficientemente grande de passos.

Exemplo

Equação da Invariante

$$[\pi(0),\pi(1),\pi(2)] = [\pi(0),\pi(1),\pi(2)]\begin{bmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,2 & 0,4 & 0,4\\ 0,6 & 0 & 0,4\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,3\pi(0)+0,2\pi(1)+0,6\pi(2) & = \pi(0)\\ 0,2\pi(0)+0,4\pi(1)+0\pi(2) & = \pi(1)\\ 0,5\pi(0)+0,4\pi(1)+0,4\pi(2) & = \pi(2)\\ \pi(0)+\pi(1)+\pi(2) & = 1\end{cases}$$

Solução

$$\boldsymbol{\pi}' = [0,4186, 0,1395, 0,4419]$$

3

Modelos Markovianos de Decisão

Processos Markovianos de Decisão

Em geral, o modelo de Markov é apropriado para sistemas dinâmicos com movimentos regulados por determinada lei probabilística.

Mesmo em presença de dinamismo e incerteza, há situações em que as transições dos estados podem ser controladas por uma sequência de ações.

Modelo de Decisão de Markov

É uma ferramenta poderosa para analisar processos probabilísticos de decisão sequencial com um horizonte infinito de planejamento.

Modelo de Decisão

Aplicações Potenciais

- Controle de estoque
- Manutenção
- Fabricação
- Comunicação

Critério de Otimização

Custo (ou recompensa) médio à longo prazo (*long-run*) por unidade de tempo

Outros Critérios

- Custo esperado total
- Custo descontado (fluxo de caixa) esperado total

Um Modelo de Estoque

Produto é estocado para satisfazer demanda continuada.

Demanda

D_{t+1}: demanda agregada entre os instantes t e $t+1$
$\{D_t\}_{t\geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas

Estoque

Dado $X_t = i$, X_{t+1} depende apenas da demanda em $t+1$, ou seja, não é afetada pelo histórico do estoque anterior ao instante t.

Reposição do Estoque

Ocorre no imediatamente após o pedido.

Política de Estoque

Estratégia (s, S)

Se no instante t o estoque (X_t) é menor ou igual a s, então ele é trazido para o nível S no instante $t+0$. Caso contrário, não se toma nenhuma ação.

Hipóteses

- O estoque inicial (X_0) não é maior que S
- Não há reposição instantânea, caso a demanda no instante t seja maior que o estoque.

Consequência

Espaço de estado de $\{X_t\}_{t\geq 1}$: $E = \{S, S-1, S-2, \dots, 0\}$

Evolução do Estoque

Equação Dinâmica do Modelo

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{, se } s < X_t \leq S \\ \max\{S - D_{t+1}, 0\} & \text{, se } X_t \leq s \end{cases}$$

Exemplo - Estoque

O Problema

- X_t: quantidade itens de produto X em estoque no final da semana t
- D_t: demanda do produto X na semana t, com $D_t \sim \text{Poisson}(1)$
- $(0, 3)$: política (s, S) de estoque

Demanda

$D_t = i$	$P\{D_t = i\}$
0	0,368
1	0,368
2	0,184
≥ 3	0,080

Estoque - Modelo Probabilístico

Situações para Transições

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \\ D_t \geq 1 & D_t = 0 & 0 & 0 \\ D_t \geq 2 & D_t = 1 & D_t = 0 & 0 \\ D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix}$$

Estoque - Invariante

Distribuição Estacionária da Cadeia

$$\pi' = [0,286; 0,285; 0,263; 0,166]$$

Os valores da invariante podem ser interpretados como a proporção de vezes que o estoque atinge cada um destes estados após um número muito grande de semanas

Estoque - Tempos de Recorrência

Tempo Esperado de Recorrência

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi(i)}$$

Estoque - Tempos de Recorrência

$$\mu_{00} = \frac{1}{0,286} = 3,50 \text{ sem.} \qquad \mu_{22} = \frac{1}{0,263} = 3,80 \text{ sem.}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{0,285} = 3,51 \text{ sem.} \qquad \mu_{33} = \frac{1}{0,166} = 6,02 \text{ sem.}$$

Custo Médio por Unidade de Tempo

Custos (ou Penalidades)

$C(X_t)$: custo (ou função perda) incorrido quando o processo se encontrar no estado X_t, no instante t

Modelo de Custo

- $C(X_t)$ é variável aleatória que assume os valores $C(0), C(1), \ldots, C(M)$
- A função $C(.)$ é independente de t

Custo Médio incorrido em n períodos

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right]$$

Custo Esperado em Longo Prazo

Custo Esperado por Unidade de Tempo

Para um horizonte infinito de planejamento:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j\in E} \pi(j)C(j)$$

Resultado Precedente

Pode-se provar que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}\right) = \pi(j)$$

Estoque - Custo Semanal Esperado

Estoque - Função de Custo

$$C(X_t) = \begin{cases} \$0 & \text{, se } X_t = 0 \\ \$2 & \text{, se } X_t = 1 \\ \$8 & \text{, se } X_t = 2 \\ \$18 & \text{, se } X_t = 0 \end{cases}$$

Custo de Estoque Esperado a Longo Prazo

$$[0,286 \quad 0,285 \quad 0,263 \quad 0,166]\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix} = 5,662$$

Funções de Custo Complexas

Situação

Além do estado da cadeia, o custo também pode depender de alguma variável aleatória.

Exemplo - Estoque

Custos as serem considerados:

- Custo da encomenda
- Custo de penalidade para demanda não atendida
- Custo de armazenagem

O custo total por semana t é função do estoque na semana anterior (X_{t-1}) e da demanda na semana corrente (D_t)

Custo Médio Esperado

Custo Médio Esperado a Longo Prazo por Unidade de Tempo

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_{t-1}, D_t)\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

onde $k(j) = \mathrm{E}[C(j, D_t]$ que é a esperança condicional de $C(X_{t-1}, D_t)$ dado $X_{t-1} = j$.

Custos Adicionais - Estoque

Custos do Modelo

- Custo de encomenda: $25 por unidade encomendada mais um valor fixo de $10 por encomenda
- Penalidade por demanda não atendida: $50
- Custo de armazenamento: considerado desprezível

Equação Dinâmica do Custo Semanal

$$C(X_{t-1}, D_t) = \begin{cases} 10 + (25)(3) + 50\max\{D_t - 3, 0\} & \text{, se } s < X_{t-1} = 0 \\ 50\max\{D_t - X_{t-1}, 0\} & \text{, se } X_t \geq 1 \end{cases},$$

em qualquer instante de tempo t.

Custo do Estado 0

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50\max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 0

$$\begin{aligned} k(0) &= \mathrm{E}[C(X_{t-1}, D_t)|X_{t-1} = 0] = 85 + 50\mathrm{E}[\max\{D_t - 3, 0\}] \\ &= 85 + 50[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots] \\ &= \$86,2 \end{aligned}$$

onde $P_D(i) = \mathrm{P}\{D_t = i\}$.

Probabilidades Demandas

$P_D(2) = 0,184$
$P_D(3) = 0,061$
$P_D(4) = 0,015$
$P_D(5) = 0,003$
$P_D(6) = 0,001$
$P_D(7) = 0,000$

Custo do Estado 1

Custo do Estado 1

$$C(1, D_t) = 50\max\{D_t - 1, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 1

$$\begin{aligned} k(1) &= \mathrm{E}[C(X_{t-1}, D_t)|X_{t-1} = 1] = 50\mathrm{E}[\max\{D_t - 1, 0\}] \\ &= 50[P_d(2) + 2P_D(3) + 3P_D(4) + \cdots] \\ &= \$18,4 \end{aligned}$$

Custo do Estado 2

Custo do Estado 2

$$C(2, D_t) = 50 \max\{D_t - 2, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 2

$$\begin{aligned} k(2) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 2\right] = 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 1, 0\}\right] \\ &= 50\left[P_d(3) + 2P_D(4) + 3P_D(5) + \cdots\right] \\ &= \$5,2 \end{aligned}$$

Custo do Estado 3

Custo do Estado 3

$$C(3, D_t) = 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 3

$$\begin{aligned} k(3) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 3\right] = 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$1,2 \end{aligned}$$

Custo Semanal Esperado (*Long-Run*)

$$\sum_{j=0}^{3} k(j)\pi(j) \begin{bmatrix} 86,2 \\ 18,4 \\ 5,2 \\ 1,2 \end{bmatrix} = \boxed{\$31,46}$$

Condições de Validade do Modelo

Hipóteses do Modelo

- $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov irredutível (E finito)
- Há uma sequência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes associadas a essa cadeia
- Para um $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fixo, um custo $C(X_{t-1}, D_{t+m})$ é incorrido no instante t.
- A sequência $X_0, X_1, X_2, \ldots$ é independente de D_{t+m}

Resultados Fundamentais

Atendidas as condições enunciadas

Resultado 1

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

em que $k(j) = \mathrm{E}\left[C(j, D_{t+m})\right]$

Resultado 2

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

para basicamente todos os caminhos do processo.

Melhor Política

Exemplo Estoque

Encontrou-se o custo médio semanal (*long-run*) para a política $((0,3))$

Política Ótima

Quais os valores de (s, S) que minimizam o custo médio semanal de estoque (*long-run*)?

4

Referências Bibliográficas

Bibliografia

- TIJMS, H. C.
  A First Course in Stochastic Models
  Wiley, 2003
- ROSS, S. M.
  Introduction to Probability Models
  Academic Press, 2010
- ROSS, S. M.
  Stochastic Processes
  Wiley, 1996
- KARLIN, S.; TAYLOR, H. M.
  A First Course in Stochastic Processes
  Academic Press, 1975
- ATUNCAR, G. S.
  Conceitos Básicos de Processos Estocásticos
  Dep. Estatística/UFMG, 2011

Modelos Estocásticos Aplicados à Indústria

Prof. Lupércio França Bessegato

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Juiz de Fora
lupercio.bessegato@ufjf.edu.br
www.ufjf.br/lupercio_bessegato

Setembro/2013