Processos Estocásticos

Prof. Lupércio França Bessegato

Departamento de Estatística
lupercio.bessegato@ufjf.edu.br
www.ufjf.br/lupercio_bessegato

Semestre 2013/3

Roteiro da apresentação

1. Introdução

2. Cadeias de Markov

Roteiro da apresentação

Roteiro da apresentação

Roteiro da apresentação

Roteiro da apresentação

1

INTRODUÇÃO

Sequência de eventos governados por leis probabilísticas

Sequência de eventos governados por leis probabilísticas

OBJETIVO

- Investigar estrutura de variáveis aleatórias X_t
- t é um parâmetro em um conjunto de ínidices T

Sequência de eventos governados por leis probabilísticas

OBJETIVO

- Investigar estrutura de variáveis aleatórias X_t
- t é um parâmetro em um conjunto de ínidices T

ALGUNS TIPOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Passeio aleatório, processo de renovação, processo de ramificação, filas, movimento Browniano, etc.

Sequência de eventos governados por leis probabilísticas

OBJETIVO

- Investigar estrutura de variáveis aleatórias X_t
- t é um parâmetro em um conjunto de ínidices T

ALGUNS TIPOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Passeio aleatório, processo de renovação, processo de ramificação, filas, movimento Browniano, etc.

Amplas possibilidade de aplicações

Definições Fundamentais

Definição (Processo Estocástico)

Sequência de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in T\}$, todas definidas em um mesmo espaço de probabilidades e indexadas por um conjunto T

$$X_t : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$$

Espaço de estados (E)

Conjunto ao qual pertencem todos os possíveis valores de X_t

DEFINIÇÕES FUNDAMENTAIS

DEFINIÇÃO (PROCESSO ESTOCÁSTICO)

Sequência de variáveis aleatórias $\{X_t : t \in T\}$, todas definidas em um mesmo espaço de probabilidades e indexadas por um conjunto T

$$X_t : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$$

ESPAÇO DE ESTADOS (E)

Conjunto ao qual pertencem todos os possíveis valores de X_t

ESPAÇO PARAMÉTRICO DE TEMPO (T)

- Se $T = 0, 1, \ldots,$ $\{X_t\}$ é um processo estocástico em tempo discreto
- Se $T = [0, \infty)$, $\{X_t\}$ é um processo estocástico em tempo contínuo
- T pode não ser unidimensional (Processo de Poisson espacial)

Tipos de Processos

Atendendo a natureza de T e E

E discreto, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \mathbb{N}$

Tipos de Processos

Atendendo a natureza de T e E

E discreto, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \mathbb{N}$

E discreto, T contínuo

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \{t : t \geq 0\}$

Atendendo a natureza de T e E

E discreto, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \mathbb{N}$

E discreto, T contínuo

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \{t : t \geq 0\}$

E contínuo, T discreto

Geralmente: $E = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{N}$

Atendendo a natureza de T e E

E DISCRETO, T DISCRETO

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \mathbb{N}$

E DISCRETO, T CONTÍNUO

Geralmente: $E = \mathbb{Z}$ e $T = \{t : t \geq 0\}$

E CONTÍNUO, T DISCRETO

Geralmente: $E = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{N}$

E CONTÍNUO, T CONTÍNUO

Geralmente: $E = \mathbb{R}$ e $T = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

Definição

Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset T$, a distribuição do vetor $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ é denominada *distribuição finito dimensional* do processo.

Definição

Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset T$, a distribuição do vetor $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ é denominada *distribuição finito dimensional* do processo.

- A totalidade das distribuições finito dimensionais de um processo determinam, sob condições gerais, a distribuição do processo.

Definição

Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset T$, a distribuição do vetor $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ é denominada *distribuição finito dimensional* do processo.

- A totalidade das distribuições finito dimensionais de um processo determinam, sob condições gerais, a distribuição do processo.
- Um processo estocástico é denominado *Gaussiano* se todos os vetores finito dimensionais possuem distribuição normal multivariada

Distribuição Finito Dimensional

Definição

Para qualquer conjunto finito $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subset T$, a distribuição do vetor $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ é denominada *distribuição finito dimensional* do processo.

- A totalidade das distribuições finito dimensionais de um processo determinam, sob condições gerais, a distribuição do processo.
- Um processo estocástico é denominado *Gaussiano* se todos os vetores finito dimensionais possuem distribuição normal multivariada
- Para um valor de t fixo, tem-se a distribuição unidimensional de X_t.

Sejam $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$ e $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\}$, respectivamente, a média e a variância associadas à X_t .

Sejam $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$ e $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\}$, respectivamente, a média e a variância associadas à X_t .

Definição

- Função média do processo: $\mu = \{\mu_t : t \in T\}$

Sejam $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$ e $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\}$, respectivamente, a média e a variância associadas à X_t .

Definição

- Função média do processo: $\mu = \{\mu_t : t \in T\}$
- Função variância do processo: $\sigma^2 = \{\sigma_t^2 : t \in T\}$

Estatísticas de um Processo

Sejam $\mu_t = \mathrm{E}[X_t]$ e $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\}$, respectivamente, a média e a variância associadas à X_t .

Definição

- Função média do processo: $\mu = \{\mu_t : t \in T\}$
- Função variância do processo: $\sigma^2 = \left\{\sigma_t^2 : t \in T\right\}$
- Função covariância do processo: $\sigma_{s,t} = \{\mathrm{Cov}\{X_t, X_s\} : s, t \in T\}$

Considerando $T = [0, \infty)$, a menos que explicitado em contrário

DEFINIÇÃO

Se $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes para todas as escolhas de $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_n$, dizemos que o processo $\{X_t\}$ possui *incrementos indepedentes*.

Considerando $T = [0, \infty)$, a menos que explicitado em contrário

DEFINIÇÃO

Se $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes para todas as escolhas de $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_n$, dizemos que o processo $\{X_t\}$ possui *incrementos indepedentes*.

CONSEQUÊNCIA

Seja um processo $\{X_t\}$ a tempo discreto ($T = \{0, 1, \dots\}$) com incrementos independentes.
$\{Z_i\}, Z_i = X_i - X_{i-1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_i = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_i$

DEFINIÇÃO

Diz-se que o processo tem incrementos estacionários se a distribuição dos incrementos $X_{t_1+h} - X_{t_1}$ depende somente do comprimento h e não do tempo t_1.

Definição

Diz-se que o processo tem incrementos estacionários se a distribuição dos incrementos $X_{t_1+h} - X_{t_1}$ depende somente do comprimento h e não do tempo t_1.

Consequência

Para um processo com incrementos estacionários,
$X_{t_1+h} - X_{t_1} \stackrel{d}{=} X_{t_2+h} - X_{t_2}$ para qualquer valor de $t_1, t_2,$ e h.

Processo com Incrementos Estacionários e Independentes

Propriedade

Se um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com momentos de $2^{a.}$ ordem finitos, tem incrementos independentes e estacionários, então:

Processo com Incrementos Estacionários e Independentes

Propriedade

Se um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com momentos de $2^{a.}$ ordem finitos, tem incrementos independentes e estacionários, então:

1. $\mu_t = \mathrm{E}\left[X_t\right] = \mu_0 + m_1 t$, onde $m_1 = \mu_1 - \mu_0$.

Processo com Incrementos Estacionários e Independentes

Propriedade

Se um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com momentos de $2^{a.}$ ordem finitos, tem incrementos independentes e estacionários, então:

1. $\mu_t = \mathrm{E}[X_t] = \mu_0 + m_1 t$, onde $m_1 = \mu_1 - \mu_0$.
2. $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\{X_t\} = \sigma_0^2 + \sigma_1^{*2} t$, onde $\sigma_1^{*2} = \mathrm{E}\left[(X_1 - m_1)^2\right] - \sigma_0^2$

Definição

Um processo estocástico é estacionário quando $\mu_t = \mu$, $\sigma_t^2 = \sigma^2$ e $\operatorname{Cov}\{X_t, X_s\}$ depende apenas de $|t-s|$.

Estacionariedade I

Definição

Um processo estocástico é estacionário quando $\mu_t = \mu$, $\sigma_t^2 = \sigma^2$ e $\mathrm{Cov}\left\{X_t, X_s\right\}$ depende apenas de $|t - s|$.

Definição

Um processo estocástico é estritamente estacionário quando $\left\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}\right\} \overset{d}{=} \left\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h}\right\}, \forall h, t_1, t_2 \ldots t_k$. Em essência o processo está em equilíbrio probabilístico.

ESTACIONARIEDADE I

DEFINIÇÃO

Um processo estocástico é estacionário quando $\mu_t = \mu$, $\sigma_t^2 = \sigma^2$ e $\mathrm{Cov}\left\{X_t, X_s\right\}$ depende apenas de $|t - s|$.

DEFINIÇÃO

Um processo estocástico é estritamente estacionário quando $\left\{X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}\right\} \stackrel{d}{=} \left\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h}\right\}, \forall h, t_1, t_2 \ldots t_k$. Em essência o processo está em equilíbrio probabilístico.

CONSEQUÊNCIA

Em particular, a distribuição de X_t e X_{t+h} são identicamente distribuídos para quaisquer valores de t e h.

DEFINIÇÃO

Um processo estocástico é estacionário no sentido da covariância quando $\mathrm{Cov}\left\{X_{t_1}, X_{t_1+h}\right\} = \mathrm{Cov}\left\{X_{t_2}, X_{t_2+h}\right\}$ e se possuir segundo momento finito. É também denominado fracamente estacionário ou estacionário de $2^{a.}$ ordem.

Estacionariedade II

Definição

Um processo estocástico é estacionário no sentido da covariância quando $\text{Cov}\left\{X_{t_1}, X_{t_1+h}\right\} = \text{Cov}\left\{X_{t_2}, X_{t_2+h}\right\}$ e se possuir segundo momento finito. É também denominado fracamente estacionário ou estacionário de $2^{a.}$ ordem.

Consequência

Se o processo é estacionário na covariância não implica que ele seja estritamente estacionário.

Estacionariedade II

Definição

Um processo estocástico é estacionário no sentido da covariância quando $\text{Cov}\left\{X_{t_1}, X_{t_1+h}\right\} = \text{Cov}\left\{X_{t_2}, X_{t_2+h}\right\}$ e se possuir segundo momento finito. É também denominado fracamente estacionário ou estacionário de $2^{a.}$ ordem.

Consequência

Se o processo é estacionário na covariância não implica que ele seja estritamente estacionário.

Importante

Estacionariedade não implica independência.

- Média do processo: $\mu = \mu_t = \mathrm{E}\left[X_t\right]$

Estatísticas de um Processo Estacionário

- Média do processo: $\mu = \mu_t = \mathrm{E}\left[X_t\right]$
- Variância do processo: $\sigma^2 = \sigma_t^2 = \mathrm{Var}\left\{X_t\right\}$

- Média do processo: $\mu = \mu_t = \mathrm{E}\left[X_t\right]$
- Variância do processo: $\sigma^2 = \sigma_t^2 = \mathrm{Var}\left\{X_t\right\}$
- Covariância: $\gamma_h = \mathrm{Cov}\left\{X_t, X_{t+h}\right\}, \gamma_0 = \sigma^2$

- Média do processo: $\mu = \mu_t = \mathrm{E}\left[X_t\right]$
- Variância do processo: $\sigma^2 = \sigma_t^2 = \mathrm{Var}\left\{X_t\right\}$
- Covariância: $\gamma_h = \mathrm{Cov}\left\{X_t, X_{t+h}\right\}, \gamma_0 = \sigma^2$
- Correlação: $\rho_h = \frac{\mathrm{Cov}\{x_t, X_{t+h}\}}{\sigma_t \sigma_{t+h}} = \frac{\gamma_h}{\sigma^2}$

DEFINIÇÃO

Um processo estocástico possui a propriedade de Markov se $\mathrm{P}\left\{X_t \in A | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\right\} = \mathrm{P}\left\{X_t \in A | X_{t_n} = x_n\right\}$, para $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n < t$.

Propriedade de Markov

Definição

Um processo estocástico possui a propriedade de Markov se $P\{X_t \in A | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = P\{X_t \in A | X_{t_n} = x_n\}$, para $0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_n < t$.

Consequência

"O futuro não depende do passado quando se conhece o presente"

Definições

Definição (Distribuição inicial do processo)

É a distribuição de X_0.

Definições

Definição (Distribuição inicial do processo)

É a distribuição de X_0.

Definição (Função de probabilidade de transição)

$\mathrm{P}(x, s, t, A) = \mathrm{P}\left\{X_t \in A | X_s = x\right\}, T > s$

Definições

Definição (Distribuição inicial do processo)

É a distribuição de X_0.

Definição (Função de probabilidade de transição)

$P(x, s, t, A) = P\{X_t \in A | X_s = x\}, T > s$

Consequência

Conhecidas a distribuição inicial e a função de probabilidade de transição de um processo Markoviano, pode-se calcular todas suas distribuições finito dimensionais.

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$\mathrm{P}\{X_t = j\}$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$\mathrm{P}\left\{X_t = j\right\} = \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_t = j\right\}$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_t = j\} &= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_t = j\} \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_t = j | X_0 = i\}\, \mathrm{P}\{X_0 = i\}
\end{aligned}
$$

DISTRIBUIÇÕES UNIDIMENSIONAIS

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_t = j\} &= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_t = j\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_t = j | X_0 = i\} \mathrm{P}\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}(i, 0, t, j) \mathrm{P}\{X_0 = 1\} \end{aligned}$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$\mathrm{P}\left\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_k} = i_k\right\} =$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$\mathrm{P}\left\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_k} = i_k\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_k} = i_k\right\}$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \dots, M\}$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_k} = i_k\right\} = \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \dots, X_{t_k} = i_k\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\left\{X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1\right\} \dots \\
&\quad \mathrm{P}\left\{X_{t_k} = i_k | X_{t_{k-1}} = i_{k-1}\right\}
\end{aligned}
$$

Processo Markoviano com espaço de estados finito $E = \{0, 1, \ldots, M\}$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_k} = i_k\} = \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots, X_{t_k} = i_k\} \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_{t_1} = i_1 | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1\}\ldots \\
&\quad \mathrm{P}\left\{X_{t_k} = i_k | X_{t_{k-1}} = i_{k-1}\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{M} \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}(i, 0, t_1, i_1)\mathrm{P}(i_1, t_1, t_2, i_2)\ldots\mathrm{P}(i_{t_{k-1}}, t_{k-1}, t_k, i_k)
\end{aligned}
$$

2

Cadeias de Markov

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

PROCESSOS MARKOVIANOS

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

PROCESSOS MARKOVIANOS

- Permite modelar a incerteza em muitos sistemas reais que evoluem dinamicamente no tempo

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

Processos Markovianos

- Permite modelar a incerteza em muitos sistemas reais que evoluem dinamicamente no tempo
- Ampla variedade de campos de aplicação

INTRODUÇÃO

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

PROCESSOS MARKOVIANOS

- Permite modelar a incerteza em muitos sistemas reais que evoluem dinamicamente no tempo
- Ampla variedade de campos de aplicação
- Conceitos básicos: estado e transição de estado

Em geral, os modelos simples são os mais úteis na análise de problemas práticos

PROCESSOS MARKOVIANOS

- Permite modelar a incerteza em muitos sistemas reais que evoluem dinamicamente no tempo
- Ampla variedade de campos de aplicação
- Conceitos básicos: estado e transição de estado

PROPRIEDADE MARKOVIANA

O conhecimento do estado atual do processo é suficiente para predizer o comportamento estocástico futuro do processo

Introdução II

Objetivo

Encontrar descrição adequada de estados de maneira que o processo estocástico associado tenha a propriedade Markoviana

Introdução II

Objetivo

Encontrar descrição adequada de estados de maneira que o processo estocástico associado tenha a propriedade Markoviana

Desenvolvimento Teórico

Introdução II

Objetivo

Encontrar descrição adequada de estados de maneira que o processo estocástico associado tenha a propriedade Markoviana

Desenvolvimento Teórico

- Processo de Markov a tempo discreto

Introdução II

Objetivo

Encontrar descrição adequada de estados de maneira que o processo estocástico associado tenha a propriedade Markoviana

Desenvolvimento Teórico

- Processo de Markov a tempo discreto
- Transições de estado ocorrem apenas em tempos fixos

Espaço de estados discreto e parâmetro de tempo discreto.

Definição

Diz-se que um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, é uma cadeia de Markov (de primeira ordem) se para $\forall i, j, n$ tem-se que:

$$\mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\} = \mathrm{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

Espaço de estados discreto e parâmetro de tempo discreto.

Definição

Diz-se que um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$, com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, é uma cadeia de Markov (de primeira ordem) se para $\forall i, j, n$ tem-se que:

$$\mathrm{P}\left\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\right\} = \mathrm{P}\left\{X_{n+1} = j | X_n = i\right\}$$

Notação

$\mathrm{P}_{ij}^{(n,n+1)} = \mathrm{P}\left\{X_{n+1} = j | X_n = i\right\}$ é a probabilidade de transição de i para j no tempo n.

Cadeia Homogênea

Definição

A cadeia é homogênea no tempo quando as probabilidades de transição não dependem de t.

Cadeia Homogênea

Definição

A cadeia é homogênea no tempo quando as probabilidades de transição não dependem de t.

Consequência

$$\mathrm{P}_{ij} = \mathrm{P}\left\{X_{t+1} = j | X_t = i\right\}, \forall t \in E$$

Definição

$$X_i = X_{i-1} + Z_i, \text{ com}$$

- $X_0 = 0$
- $\mathrm{P}\{Z_i = 1\} = \mathrm{P}\{Z_i = -1\} = 1/2, \forall i$

Passeio Aleatório

Definição

$$X_i = X_{i-1} + Z_i, \text{ com}$$

- $X_0 = 0$
- $\mathrm{P}\{Z_i = 1\} = \mathrm{P}\{Z_i = -1\} = 1/2, \forall i$

Exemplo (1)

$$\mathrm{P}\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} = \mathrm{P}\{X_1 = -1 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

Exemplo (2)

$$P\left\{X_2 = 0 | X_0 = 0\right\} = \frac{1}{2}$$

Exemplo (2)

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = \frac{1}{2}$$

Exemplo (2)

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = -1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = -1\} = \frac{1}{2}$$

Exemplo (2)

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = -1\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = -1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X_2 = 0 | X_0 = 0\} = P\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} P\{X_1 = 1 | X_0 = 0\} + P\{X_2 = 0 | X_1 = -1\} P\{X_1 = -1 | X_0 = 0\}$$

Exemplo (2)

$$P\left\{X_2 = 0 | X_0 = 0\right\} = \frac{1}{2}$$

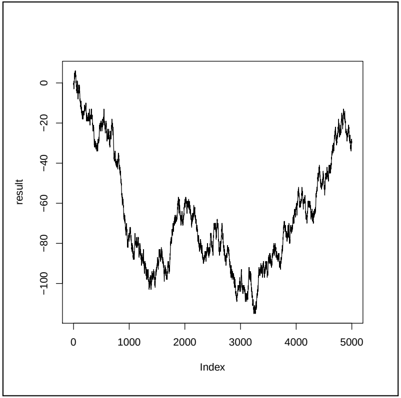
$$P\left\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = 1\right\} = P\left\{X_2 = 0 | X_1 = 1\right\} = \frac{1}{2}$$

$$P\left\{X_2 = 0 | X_0 = 0, X_1 = -1\right\} = P\left\{X_2 = 0 | X_1 = -1\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P\left\{X_2 = 0 | X_0 = 0\right\} = {} & P\left\{X_2 = 0 | X_1 = 1\right\} P\left\{X_1 = 1 | X_0 = 0\right\} + \\ & P\left\{X_2 = 0 | X_1 = -1\right\} P\left\{X_1 = -1 | X_0 = 0\right\} \end{aligned}$$

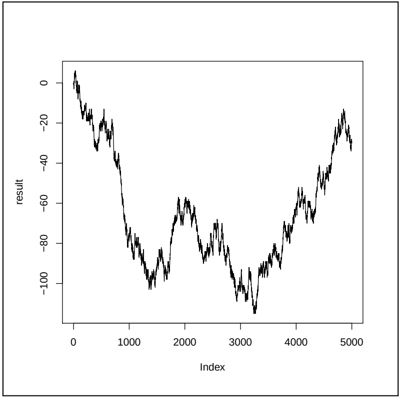
$$P\left\{X_t = 0 | X_0 = 0\right\} = \frac{1}{2}, \forall t \in E$$

5.000 passos com $p = 0,50$

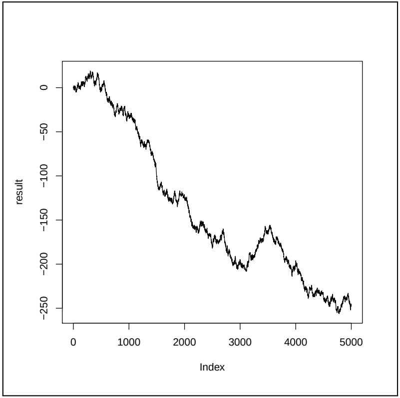


Trajetórias de Passeios Aleatórios

5.000 passos com $p = 0,50$



5.000 passos com $p = 0,48$



DEFINIÇÃO

Se a cadeia é homogênea no tempo, a matriz de probabilidade de transição (em um passo) é:

$$\mathbf{P} = \left(P_{ij}\right), \ i, j \in E$$

Matriz de Probabilidades de Transição

Definição

Se a cadeia é homogênea no tempo, a matriz de probabilidade de transição (em um passo) é:

$$\mathbf{P} = (P_{ij})\,,\; i,j \in E$$

Propriedades de P

1. $P_{ij} \geq 0, \forall i,j$
2. $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1, \forall i \in E$, ou seja, para i fixo, $\{P_{ij} : j \in E\}$ define uma função de probabilidade.

Matriz de Probabilidades de Transição

Definição

Se a cadeia é homogênea no tempo, a matriz de probabilidade de transição (em um passo) é:

$$\mathbf{P} = (P_{ij}),\ i,j \in E$$

Propriedades de P

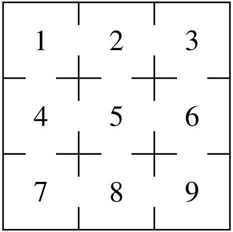
1. $P_{ij} \geq 0, \forall i,j$
2. $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1, \forall i \in E$, ou seja, para i fixo, $\{P_{ij} : j \in E\}$ define uma função de probabilidade.

Toda matriz que satifaz (1) e (2) é chamada matriz estocástica

Exemplo

Rato em Labirinto

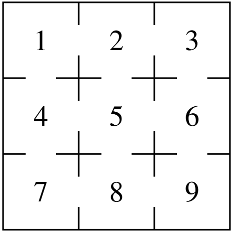
Um rato é colocado no labirinto abaixo.



Exemplo

Rato em Labirinto

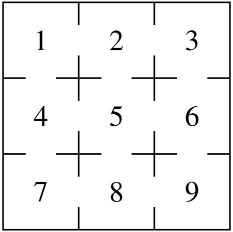
Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos.



Exemplo

Rato em Labirinto

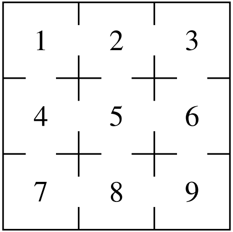
Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo.



Exemplo

Rato em Labirinto

Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo. O estado do sistema é o número do compartimento em que o rato está.

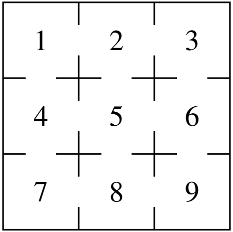


Exemplo

Rato em Labirinto

Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo. O estado do sistema é o número do compartimento em que o rato está.

Determine a matriz de probabilidades de transição deste processo.



Solução

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Distribuição Marginal de X_0

Função de Probabilidade de X_0

$$\boldsymbol{\alpha}_0' = [\alpha_0(i); i \in E], \text{ com } \alpha_0(i) = \mathrm{P}\left\{X_0 = i\right\},$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor que define a função de probabilidade de X_0.

Distribuição Marginal de X_0

Função de Probabilidade de X_0

$$\boldsymbol{\alpha}'_0 = [\alpha_0(i); i \in E], \text{ com } \alpha_0(i) = \mathrm{P}\{X_0 = i\},$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é o vetor que define a função de probabilidade de X_0.

A função de probabilidade de X_0 é chamada função de probabilidade inicial da cadeia

Função de Probabilidade de X_1

$$\alpha_1(j) = \mathrm{P}\left\{X_1 = j\right\}$$

DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE X_1

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DE X_1

$$\begin{aligned}\alpha_1(j) &= \mathrm{P}\{X_1 = j\} \\ &= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j\}\end{aligned}$$

Função de Probabilidade de X_1

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(j) &= \mathrm{P}\left\{X_1 = j\right\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_1 = j\right\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\left\{X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_1 = j | X_0 = i\right\}
\end{aligned}
$$

Distribuição Marginal de X_1

Função de Probabilidade de X_1

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(j) &= \mathrm{P}\{X_1 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_0 = i\}\, \mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} \\
\alpha_1(j) &= \sum_{i \in E} \alpha_0(i) P_{ij}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Dados

Suponha $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dados

Suponha $E = \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1(0) = \mathrm{P}\{X_1 = 0\} = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,35$$

Distribuição Marginal de X_1

$$\alpha_1' =$$

EXEMPLO (CONT.)

DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE X_1

$$\alpha_1' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.)

Distribuição Marginal de X_1

$$\alpha_1' = [0,2;0,1;0,3;0,4] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1{}' = [0,35;0,11;0,26;0,28]$$

Distribuição Marginal de X_2

Função de Probabilidade de X_2

$$\alpha_2(j) = \mathrm{P}\{X_2 = j\}$$

Função de Probabilidade de X_2

$$\begin{aligned}
\alpha_2(j) &= \mathrm{P}\{X_2 = j\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\{X_1 = i, X_2 = j\}
\end{aligned}$$

Distribuição Marginal de X_2

Função de Probabilidade de X_2

$$
\begin{aligned}
\alpha_2(j) &= \mathrm{P}\left\{X_2 = j\right\} \\
&= \sum_{i \in E} \mathrm{P}\left\{X_1 = i, X_2 = j\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_2(j) = \sum_{i \in E} \alpha_1(i) P_{ij}
$$

Dados

Exemplo anterior, com $\alpha_1' = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dados

Exemplo anterior, com $\alpha_1' = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28]$ e

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2(0) = \mathrm{P}\{X_2 = 1\} = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28] \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{bmatrix} = 0,281$$

DISTRIBUIÇÃO MARGINAL DE X_2

$$\alpha_2' =$$

Exemplo (cont.)

Distribuição Marginal de X_2

$$\alpha'_2 = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.)

Distribuição Marginal de X_2

$$\alpha_2' = [0,35; 0,11; 0,26; 0,28] \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2{}' = [0,281; 0,153; 0,208; 0,358]$$

Dadas a distribuição inicial da cadeia e a matriz de probabilidades de transição, pode-se calcular:

- a distribuição marginal de $X_k, k \geq 1$
- a distribuição conjunta de $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$

DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS DA CADEIA

Em notação matricial.

Distribuições Marginais da Cadeia

Em notação matricial.

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$

Distribuições Marginais da Cadeia

Em notação matricial.

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$
$$\boldsymbol{\alpha}'_2 = \boldsymbol{\alpha}'_1 \mathbf{P} = \left(\boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}\right) \mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}^2$$

Distribuições Marginais da Cadeia

Em notação matricial.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}'_1 &= \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P} \\
\boldsymbol{\alpha}'_2 &= \boldsymbol{\alpha}'_1\,\mathbf{P} = \left(\boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}\right)\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}^2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\alpha}'_k &= \boldsymbol{\alpha}'_{k-1}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_{k-2}\,\mathbf{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}^k
\end{aligned}
$$

Distribuições Marginais da Cadeia

Em notação matricial.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}'_1 &= \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P} \\
\boldsymbol{\alpha}'_2 &= \boldsymbol{\alpha}'_1\,\mathbf{P} = \left(\boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}\right)\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}^2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\alpha}'_k &= \boldsymbol{\alpha}'_{k-1}\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}'_{k-2}\,\mathbf{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}^k
\end{aligned}$$

Função de probabilidade de X_k

$$\boldsymbol{\alpha}'_k = \boldsymbol{\alpha}'_0\,\mathbf{P}^k$$

α'_1 É Função de Probabilidade?

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$

$\boldsymbol{\alpha}'_1$ É Função de Probabilidade?

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$

$$\sum_{j \in E} \alpha_1(j) = \sum_{j \in E} \left(\sum_{i \in E} \alpha_0(i) P_{ij} \right)$$

$\boldsymbol{\alpha}'_1$ É FUNÇÃO DE PROBABILIDADE?

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$

$$\sum_{j \in E} \alpha_1(j) = \sum_{j \in E} \left(\sum_{i \in E} \alpha_0(i) P_{ij} \right) = \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} \alpha_0(i) P_{ij}$$

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 = \boldsymbol{\alpha}'_0 \mathbf{P}$$

$$\sum_{j \in E} \alpha_1(j) = \sum_{j \in E} \left(\sum_{i \in E} \alpha_0(i) P_{ij} \right) = \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} \alpha_0(i) P_{ij}$$

$$= \sum_{i \in E} \alpha_0(i) \sum_{j \in E} P_{ij}$$

$\boldsymbol{\alpha}_1'$ É FUNÇÃO DE PROBABILIDADE?

$$\boldsymbol{\alpha}_1' = \boldsymbol{\alpha}_0' \mathbf{P}$$

$$\sum_{j\in E} \alpha_1(j) = \sum_{j\in E} \left(\sum_{i\in E} \alpha_0(i) P_{ij} \right) = \sum_{i\in E} \sum_{j\in E} \alpha_0(i) P_{ij}$$

$$= \sum_{i\in E} \alpha_0(i) \sum_{j\in E} P_{ij}$$

Mas $\sum_{j\in E} P_{ij} = 1$. Assim:

$$\sum_{j\in E} \alpha_1(j) = \sum_{i\in E} \alpha_0(i) = 1$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$P\left\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\right\}$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} = P\{X_0 = i\} P\{X_1 = j | X_0 = i\} P\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\}$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$\begin{aligned} P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} &= P\{X_0 = i\}\, P\{X_1 = j | X_0 = i\}\, P\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= P\{X_0 = i\}\, P\{X_1 = j | X_0 = i\}\, P\{X_2 = k | X_1 = j\} \end{aligned}$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} &= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \\
&= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_1 = j\} \\
&= \alpha_0(i) P_{ij} P_{jk}
\end{aligned}
$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} &= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \\
&= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_1 = j\} \\
&= \alpha_0(i) P_{ij} P_{jk}
\end{aligned}$$

Trajetória em r passos

$$\mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_r = i_r\}$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} &= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \\ &= \mathrm{P}\{X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_1 = j | X_0 = i\}\,\mathrm{P}\{X_2 = k | X_1 = j\} \\ &= \alpha_0(i) P_{ij} P_{jk}\end{aligned}$$

Trajetória em r passos

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_r = i_r\} = \mathrm{P}\{X_0 = i_0\}\,\mathrm{P}\{X_1 = i_1 | X_0 = i_0\} \ldots \\ \mathrm{P}\{X_r = i_r | X_{r-1} = i_{r-1}\}\end{aligned}$$

Distribuição Conjunta

Trajetória em 2 passos

$$
\begin{aligned}
P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k\} &= P\{X_0 = i\} P\{X_1 = j | X_0 = i\} P\{X_2 = k | X_0 = i, X_1 = j\} \\
&= P\{X_0 = i\} P\{X_1 = j | X_0 = i\} P\{X_2 = k | X_1 = j\} \\
&= \alpha_0(i) P_{ij} P_{jk}
\end{aligned}
$$

Trajetória em r passos

$$
\begin{aligned}
P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_r = i_r\} &= P\{X_0 = i_0\} P\{X_1 = i_1 | X_0 = i_0\} \ldots \\
&\quad P\{X_r = i_r | X_{r-1} = i_{r-1}\} \\
&= \alpha_0(i_0) P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} \ldots P_{i_{r-1},i_r}
\end{aligned}
$$

Exemplo

Dados

Calcular $\mathrm{P}\left\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0\right\}$, com $E = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\boldsymbol{\alpha}_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo

Dados

Calcular $\mathrm{P}\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0\}$, com $E = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$

Solução

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 0\} &= \mathrm{P}\{X_0 = 1\}\,\mathrm{P}\{X_1 = 0 | X_0 = 1\}\,\mathrm{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 0\} \\ &= \alpha_0(1) P_{10} P_{00} = 0 \end{aligned}$$

Probabilidades de Transição de $2^{a.}$ Ordem

$$P\{X_2 = j | X_0 = i\}$$

Probabilidades de Transição de $2^{a.}$ Ordem

$$\mathrm{P}\left\{X_2 = j | X_0 = i\right\} = \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_1 = k, X_2 = j | X_0 = i\right\}$$

$$\begin{aligned} P\{X_2 = j | X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} P\{X_1 = k, X_2 = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k \in E} P\{X_1 = k | X_0 = i\} P\{X_2 = j | X_1 = k\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\{X_2 = j | X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} P\{X_1 = k, X_2 = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} P\{X_1 = k | X_0 = i\} \, P\{X_2 = j | X_1 = k\} \\
&= \sum_{k \in E} P_{ik} P_{kj}
\end{aligned}
$$

Probabilidades de Transição de $2^{a.}$ Ordem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left\{X_2 = j | X_0 = i\right\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_1 = k, X_2 = j | X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_1 = k | X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_2 = j | X_1 = k\right\} \\
&= \sum_{k \in E} P_{ik} P_{kj}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{P}\left\{X_2 = j | X_0 = i\right\}$ é a célula (i, j)da matriz $\mathbf{P}^2$

Notação

$$P_{ij}^{(2)} = \mathrm{P}\left\{X_{n+2} = j | X_n = i\right\}$$

NOTAÇÃO

$$P_{ij}^{(2)} = \mathrm{P}\left\{X_{n+2} = j | X_n = i\right\}$$

A matriz $\mathbf{P}^2$ é formada pelas probabilidades de transição de $2^{a.}$ ordem.

Probabilidade de Transição de $2^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de $2^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,37 & 0,09 & 0,36 & 0,18 \\ 0,36 & 0,08 & 0,32 & 0,24 \\ 0,33 & 0,13 & 0,24 & 0,30 \\ 0,18 & 0,22 & 0,08 & 0,52 \end{bmatrix}$$

Probabilidade de Transição de $2^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de $2^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,37 & 0,09 & 0,36 & 0,18 \\ 0,36 & 0,08 & 0,32 & 0,24 \\ 0,33 & 0,13 & 0,24 & 0,30 \\ 0,18 & 0,22 & 0,08 & 0,52 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\left\{X_2 = 0 | X_0 = 1\right\} = P_{10}^{(2)} = 0,36$$

PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DE $3^{a.}$ ORDEM

$$\mathrm{P}\left\{X_3 = j | X_0 = i\right\}$$

Probabilidade de Transição de $3^{a.}$ Ordem

$$P\{X_3 = j | X_0 = i\} = \sum_{k \in E} P\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\}$$

Probabilidade de Transição de $3^{a.}$ Ordem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left\{X_3 = j | X_0 = i\right\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_2 = k | X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_3 = j | X_2 = k\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left\{X_3 = j | X_0 = i\right\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\right\} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\left\{X_2 = k | X_0 = i\right\} \mathrm{P}\left\{X_3 = j | X_2 = k\right\} \\
&= \sum_{k \in E} P_{ik}^{(2)} P_{kj} = (P^3)_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_3 = j | X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i\} \mathrm{P}\{X_3 = j | X_2 = k\} \\
&= \sum_{k \in E} P_{ik}^{(2)} P_{kj} = (P^3)_{ij} \\
&= P_{ij}^{(3)}
\end{aligned}
$$

Probabilidade de Transição de 3ª. Ordem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_3 = j | X_0 = i\} &= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k, X_3 = j | X_0 = i\} \\
&= \sum_{k \in E} \mathrm{P}\{X_2 = k | X_0 = i\} \mathrm{P}\{X_3 = j | X_2 = k\} \\
&= \sum_{k \in E} P_{ik}^{(2)} P_{kj} = (P^3)_{ij} \\
&= P_{ij}^{(3)}
\end{aligned}
$$

Notação

$$
P_{ij}^{(3)} = \mathrm{P}\{X_{n+3} = j | X_n = i\}
$$

DADO

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

DADO

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE $3^{a.}$ ORDEM

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,253 & 0,165 & 0,180 & 0,402 \\ 0,276 & 0,156 & 0,192 & 0,376 \\ 0,285 & 0,149 & 0,220 & 0,346 \\ 0,354 & 0,106 & 0,312 & 0,228 \end{bmatrix}$$

DADO

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE $3^{a.}$ ORDEM

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0,253 & 0,165 & 0,180 & 0,402 \\ 0,276 & 0,156 & 0,192 & 0,376 \\ 0,285 & 0,149 & 0,220 & 0,346 \\ 0,354 & 0,106 & 0,312 & 0,228 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\left\{X_3 = 0 | X_0 = 1\right\} = P_{10}^{(3)} = 0,276$$

Em geral,

$$P_{ij}^{(r)} = \mathrm{P}\left\{X_r = j | X_0 = i\right\}$$

Em geral,

$$P_{ij}^{(r)} = \mathrm{P}\left\{X_r = j | X_0 = i\right\}$$

CONSEQUÊNCIA

Em geral,

$$P_{ij}^{(r)} = \mathrm{P}\left\{X_r = j | X_0 = i\right\}$$

CONSEQUÊNCIA

1. $\mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_r = j\right\} = \alpha_0(i) P_{ij}^{(r)}$

Probabilidade de Transição de Ordem r

Em geral,

$$P_{ij}^{(r)} = \mathrm{P}\left\{X_r = j | X_0 = i\right\}$$

Consequência

1. $\mathrm{P}\left\{X_0 = i, X_r = j\right\} = \alpha_0(i) P_{ij}^{(r)}$
2. $\mathrm{P}\left\{X_{n+r} = j | X_n = i\right\} = P_{ij}^{(r)}$

Probabilidade de Transição de $50^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Probabilidade de Transição de $50^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de $3^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \end{bmatrix}$$

Probabilidade de Transição de $50^{a.}$ Ordem

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Transição de $3^{a.}$ Ordem

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \\ 0,297 & 0,141 & 0,234 & 0,328 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P}\left\{X_{50} = 0 | X_0 = i\right\} = P_{i0}^{(50)} = 0,297, \ \forall i \in E$$

EQUAÇÃO DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Estabelece as probabilidades de transição de um estado i para um estado j em $n+r$ passos.

$$\boxed{P_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(r)}}$$

Estabelece as probabilidades de transição de um estado i para um estado j em $n+r$ passos.

$$\boxed{P_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(r)}}$$

EXEMPLO

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_0 = i_0, X_3 = i_3, X_5 = i_5\} &= \mathrm{P}\{X_0 = i_0\}\,\mathrm{P}\{X_3 = i_3 | X_0 = i_0\}\,\mathrm{P}\{X_5 = i_5 | X_3 = i_3\} \\ &= \alpha_o(i_0) P_{i_0 i_3}^{(3)} P_{i_3 i_5}^{(2)}\end{aligned}$$

Exemplo

Dados

Calcular $\mathrm{P}\left\{X_0 = 1, X_3 = 0, X_6 = 1, X_8 = 3\right\}$, com $E = \{1, 2, 3, 4\}$,

$\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4]$ e $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo

Dados

Calcular $P\{X_0 = 1, X_3 = 0, X_6 = 1, X_8 = 3\}$, com $E = \{1,2,3,4\}$,

$$\alpha_0' = [0,2; 0,1; 0,3; 0,4] \text{ e } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

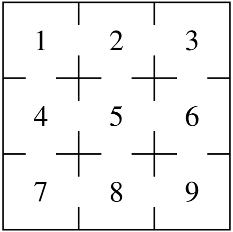
Solução

$$\begin{aligned} P\{X_0 = 1, X_3 = 0, X_6 = 1, X_8 = 3\} &= P\{X_0 = 1\} P\{X_3 = 0 | X_0 = 1\} P\{X_6 = 1 | X_3 = 0\} \\ &\quad P\{X_8 = 3 | X_6 = 1\} \\ &= \alpha_0(1) P_{10}^{(3)} P_{01}^{(3)} P_{13}^{(2)} = (0,1)(0,276)(0,165)(0,376) \\ &= 0,002 \end{aligned}$$

Exemplo - Rato

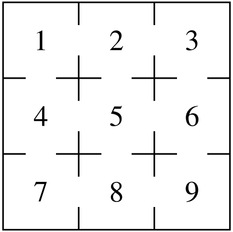
Rato em Labirinto

Um rato é colocado no labirinto abaixo.



Rato em Labirinto

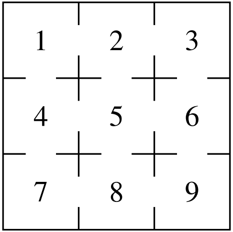
Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos.



Exemplo - Rato

Rato em Labirinto

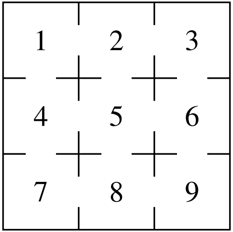
Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo.



Exemplo - Rato

Rato em Labirinto

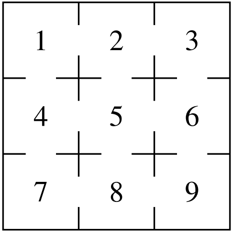
Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo. O estado do sistema é o número do compartimento em que o rato está.



Exemplo - Rato

Rato em Labirinto

Um rato é colocado no labirinto abaixo. Ele move-se ao acaso através dos compartimentos. Ele faz uma troca de compartimento em cada instante de tempo. O estado do sistema é o número do compartimento em que o rato está.
Determine a matriz de probabilidades de transição deste processo.



Solução

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Exemplo - Clima

Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Exemplo - Clima

Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Topologia da Cadeia

Exemplo - Clima

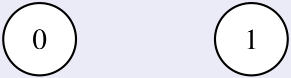
Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Topologia da Cadeia



Exemplo - Clima

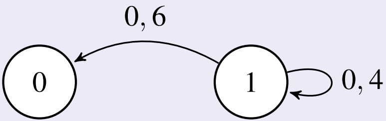
Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Topologia da Cadeia



Exemplo - Clima

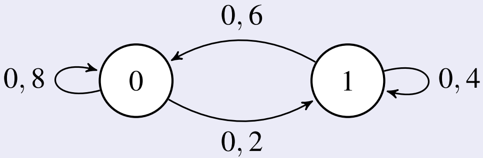
Clima em Montes Claros

A probabilidade de não chover amanhã é de $0,8$, caso hoje esteja seco. Porém é de apenas $0,6$, caso hoje seja chuvoso.

Estados

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{, se dia } t \text{ é seco} \\ 1 & \text{, se dia } t \text{ é chuvoso} \end{cases}$$

Topologia da Cadeia



Exemplo - Clima II

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Clima II

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Quais serão as probabilidades de transição de $365^{a.}$ ordem (daqui um ano)?

APLICAÇÕES

- Modelo de estoque
- Modelos de manutenção
- Modelos de evolução de ativos
- Modelos crédito

Falha de Equipamentos

Há 3 máquinas, que podem falhar a cada dia com uma probabilidade de 0.1, independente uma das outras. Oficina de reparo com capacidade de apenas uma máquina por dia. Máquina reparada não falha no próximo dia. Máquina 1 tem prioridade (gargalo na produção). Máquina 3 tem a menor prioridade.

Exemplo - Oficina

Falha de Equipamentos

Há 3 máquinas, que podem falhar a cada dia com uma probabilidade de 0.1, independente uma das outras. Oficina de reparo com capacidade de apenas uma máquina por dia. Máquina reparada não falha no próximo dia. Máquina 1 tem prioridade (gargalo na produção). Máquina 3 tem a menor prioridade.

Estados

1: máquina 1 falha
2: máquina 2 falha
3: máquina 3 falha
4: máquinas 1 e 2 falham
5: máquinas 1 e 3 falham
6: máquinas 2 e 3 falham
7: todas máquinas falham
8: todas máquinas trabalham

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,09 & 0,09 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0,81 \\ 0,09 & 0 & 0,09 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0,81 \\ 0.09 & 0,09 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0,81 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,081 & 0,081 & 0,081 & 0,009 & 0,009 & 0,009 & 0,001 & 0,729 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Oficina III

Probabilidades de Transição até o $50^{o.}$ Dia

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \\ 0.074 & 0.081 & 0.089 & 0.007 & 0.008 & 0.010 & 0.001 & 0.73 \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO (ACESSIBILIDADE)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

Definição (Acessibilidade)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.

DEFINIÇÃO (ACESSIBILIDADE)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.
- Notação: $i \to j$.

Definição (Acessibilidade)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.
- Notação: $i \to j$.

Definição (Comunicação)

Os estados i e j comunicam-se entre eles se $i \to j$ e $j \to i$.

DEFINIÇÃO (ACESSIBILIDADE)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.
- Notação: $i \to j$.

DEFINIÇÃO (COMUNICAÇÃO)

Os estados i e j comunicam-se entre eles se $i \to j$ e $j \to i$.

- Existem n_{ij} e n_{ji} tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$ e $P_{ji}^{(n_{ji})} > 0$.

Definição (Acessibilidade)

O estado j é acessível desde o estado i se existe uma trajetória indo do estado i para o estado j.

- Existe $n_{ij} > 0$ tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$.
- Notação: $i \to j$.

Definição (Comunicação)

Os estados i e j comunicam-se entre eles se $i \to j$ e $j \to i$.

- Existem n_{ij} e n_{ji} tal que $P_{ij}^{(n_{ij})} > 0$ e $P_{ji}^{(n_{ji})} > 0$.
- Notação: $i \leftrightarrow j$.

Relação de Comunicação

A relação de comunicação define uma relação de equivalênica, isto é:

Relação de Comunicação

A relação de comunicação define uma relação de equivalênica, isto é:

- $i \leftrightarrow i$

Relação de Comunicação

A relação de comunicação define uma relação de equivalênica, isto é:

- $i \leftrightarrow i$
- Se $i \leftrightarrow j$, então $j \leftrightarrow i$

Relação de Comunicação

A relação de comunicação define uma relação de equivalênica, isto é:

- $i \leftrightarrow i$
- Se $i \leftrightarrow j$, então $j \leftrightarrow i$
- Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k$, então $i \leftrightarrow k$

A relação de estados comunicantes induz uma partição do espaço de estados:

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup T$$

A relação de estados comunicantes induz uma partição do espaço de estados:

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup T$$

CLASSES DE EQUIVALÊNCIA (C)

Todos os estados em C_i comunicam-se entre si, mas nenhum de seus estados é acessível desde qualquer estado pertencente à $C_j, j \neq i$.

Decomposição do Espaço de Estados

A relação de estados comunicantes induz uma partição do espaço de estados:

$$E = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r \cup T$$

Classes de equivalência (C)

Todos os estados em C_i comunicam-se entre si, mas nenhum de seus estados é acessível desde qualquer estado pertencente à $C_j, j \neq i$.

Estados Transitórios

Conjunto T é formado por estados a partir dos quais há trajetórias para algum estado das classes $C_i,\ i = 1, 2, \ldots, r$.
(Dessas classes não é possível retornar ao conjunto T

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$$C_1 = \{0, 1, 2\}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4$

$$C_1 = \{0, 1, 2\}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4$

$$C_1 = \{0,1,2\}$$
$$C_2 = \{3,4\}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$
$3 \leftrightarrow 4$
$5 \rightarrow 0 \not\rightarrow 5$

$$C_1 = \{0, 1, 2\}$$
$$C_2 = \{3, 4\}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4$

$5 \rightarrow 0 \not\rightarrow 5$

$5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \not\rightarrow 5$

$$C_1 = \{0,1,2\}$$
$$C_2 = \{3,4\}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Solução

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow 4$

$5 \rightarrow 0 \not\rightarrow 5$

$5 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \not\rightarrow 5$

$C_1 = \{0, 1, 2\}$

$C_2 = \{3, 4\}$

$T = \{5\}$

Comportamento da cadeia à longo prazo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Comportamento da cadeia à longo prazo

DADO

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{P}^{50} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,359 & 0,119 & 0,379 & 0,033 & 0,110 & 0 \end{bmatrix}
$$

Irredutibilidade

Definição

Uma cadeia de Markov é irredutível se existe uma única classe de equivalência, isto é, $E = C_1$

Irredutibilidade

Definição

Uma cadeia de Markov é irredutível se existe uma única classe de equivalência, isto é, $E = C_1$

A cadeia é irredutível se todos os estados comunicam-se entre si.

PERIODICIDADE

DEFINIÇÃO

Período do estado i é definido como:

$$d(i) = \begin{cases} \text{m.d.c. } \{n\} & \text{, se } P_{ii}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{, se } P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases},$$

onde m.d.c. é o máximo divisor comum.

Periodicidade

Definição

Período do estado i é definido como:

$$d(i) = \begin{cases} \text{m.d.c.}\ \{n\} & \text{, se } P_{ii}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{, se } P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases},$$

onde m.d.c. é o máximo divisor comum.

Definição

Um estado $i \in E$ é aperiódico se $d(i) = 1$.

DEFINIÇÃO

Período do estado i é definido como:

$$d(i) = \begin{cases} \text{m.d.c. } \{n\} & \text{, se } P_{ii}^{(n)} > 0, \\ 0 & \text{, se } P_{ii}^{(n)} = 0 \end{cases},$$

onde m.d.c. é o máximo divisor comum.

DEFINIÇÃO

Um estado $i \in E$ é aperiódico se $d(i) = 1$.

PROPRIEDADE

Se $i \leftrightarrow j$, então $d(i) = d(j)$.

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

```
> potmatriz(matriz4,2)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.39 0.00 0.61 0.00
[2,] 0.00 0.38 0.00 0.62
[3,] 0.45 0.00 0.55 0.00
[4,] 0.00 0.44 0.00 0.56

> potmatriz(matriz4,3)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 0.000 0.422 0.000 0.578
[2,] 0.414 0.000 0.586 0.000
[3,] 0.000 0.410 0.000 0.590
[4,] 0.432 0.000 0.568 0.000
```

Dado

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}
$$

```
> potmatriz(matriz4,2)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.39 0.00 0.61 0.00
[2,] 0.00 0.38 0.00 0.62
[3,] 0.45 0.00 0.55 0.00
[4,] 0.00 0.44 0.00 0.56

> potmatriz(matriz4,3)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 0.000 0.422 0.000 0.578
[2,] 0.414 0.000 0.586 0.000
[3,] 0.000 0.410 0.000 0.590
[4,] 0.432 0.000 0.568 0.000
```

```
 potmatriz(matriz4,50)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.425 0.000 0.575 0.000
2,] 0.000 0.415 0.000 0.585
3,] 0.425 0.000 0.575 0.000
4,] 0.000 0.415 0.000 0.585

 potmatriz(matriz4,51)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.000 0.415 0.000 0.585
2,] 0.425 0.000 0.575 0.000
3,] 0.000 0.415 0.000 0.585
4,] 0.425 0.000 0.575 0.000
```

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

```
> potmatriz(matriz4,2)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,] 0.39 0.00 0.61 0.00
[2,] 0.00 0.38 0.00 0.62
[3,] 0.45 0.00 0.55 0.00
[4,] 0.00 0.44 0.00 0.56

> potmatriz(matriz4,3)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] 0.000 0.422 0.000 0.578
[2,] 0.414 0.000 0.586 0.000
[3,] 0.000 0.410 0.000 0.590
[4,] 0.432 0.000 0.568 0.000
```

```
 potmatriz(matriz4,50)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.425 0.000 0.575 0.000
2,] 0.000 0.415 0.000 0.585
3,] 0.425 0.000 0.575 0.000
4,] 0.000 0.415 0.000 0.585

 potmatriz(matriz4,51)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
1,] 0.000 0.415 0.000 0.585
2,] 0.425 0.000 0.575 0.000
3,] 0.000 0.415 0.000 0.585
4,] 0.425 0.000 0.575 0.000
```

$$\begin{cases} P_{00} = 0 \\ P_{00}^{(2)} \geq P_{01}P_{10} > 0 \end{cases}$$

$$d(0) = \text{m.d.c.}\,\{2, 4, \ldots\}$$

$$\Rightarrow d(0) = 2$$

DEFINIÇÃO

Diz-se que uma cadeia é aperiódica se ela é irredutível e um de seus estados tem período 1.

Cadeias Aperiódicas

Definição

Diz-se que uma cadeia é aperiódica se ela é irredutível e um de seus estados tem período 1.

Nossos estudos estarão concentrados em cadeias aperiódicas.

DEFINIÇÃO

Suponha que $X_0 = i$, $i \in E$. O tempo de primeiro retorno ao estado i, é definido como $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$.

Definição

Suponha que $X_0 = i$, $i \in E$. O tempo de primeiro retorno ao estado i, é definido como $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$.

Definição

Um estado i é recorrente se, e somente se, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$, ou, equivalentemente, $\mathrm{P}\left\{\tau_i < \infty | X_0 = i\right\} = 1$.

Definição

Suponha que $X_0 = i$, $i \in E$. O tempo de primeiro retorno ao estado i, é definido como $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$.

Definição

Um estado i é recorrente se, e somente se, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$, ou, equivalentemente, $\mathrm{P}\left\{\tau_i < \infty | X_0 = i\right\} = 1$.

Definição

Seja i um estado recorrente. Diz-se que i é recorrente positivo se $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$. Se $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = 0$, diz-se que o estado i é recorrente nulo.

Recorrência II

Propriedade

Recorrência é uma propriedade de classe, isto é, se $i \leftrightarrow j$ e i é recorrente, então j também é recorrente.

Propriedade

Recorrência é uma propriedade de classe, isto é, se $i \leftrightarrow j$ e i é recorrente, então j também é recorrente.

Se i é recorrente positivo (nulo) e $i \leftrightarrow j$, então j também é recorrente positivo (nulo).

Recorrência II

Propriedade

Recorrência é uma propriedade de classe, isto é, se $i \leftrightarrow j$ e i é recorrente, então j também é recorrente.

Se i é recorrente positivo (nulo) e $i \leftrightarrow j$, então j também é recorrente positivo (nulo).

Definição

Se um estado não é recorrente, ele é transitório.

Definição

Em uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, existe pelo menos um estado recorrente .

Definição

Em uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, existe pelo menos um estado recorrente .

Corolário

Se uma cadeia finita é irredutível, então todos os estados são recorrentes positivos.

Definição (Cadeia Ergódica)

Uma cadeia, não necessariamente finita, é ergódica se ela é irredutível, aperiódica e recorrente

DEFINIÇÃO (CADEIA ERGÓDICA)

Uma cadeia, não necessariamente finita, é ergódica se ela é irredutível, aperiódica e recorrente

DEFINIÇÃO (CADEIA FORTEMENTE ERGÓDICA)

Diz-se que uma cadeia é fortemente ergódica, se ela é ergódica e se pelo menos um de seus estados (e portanto todos) é recorrente positivo.

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Dado

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \end{bmatrix}$$

- Cadeia é finita irredutível, logo todos os estados são recorrentes positivos (nenhum é transitório).

EXEMPLO

DADO

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{50} = \begin{bmatrix} 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \\ 0,419 & 0,140 & 0,442 \end{bmatrix}$$

- Cadeia é finita irredutível, logo todos os estados são recorrentes positivos (nenhum é transitório).
- $P_{ii}^{n} > 0, \forall n$

Definição

Se uma cadeia é fortemente ergódica, então, para cada estado i existe $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$.

DEFINIÇÃO

Se uma cadeia é fortemente ergódica, então, para cada estado i existe $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$.

Esse limite não depende do estado inicial da cadeia, ou seja, $\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \pi(i)$.

DEFINIÇÃO

Se uma cadeia é fortemente ergódica, então, para cada estado i existe $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)} = \pi(i) > 0$.

Esse limite não depende do estado inicial da cadeia, ou seja, $\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \pi(i)$.

DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO INVARIANTE)

Dessa maneira, define-se a distribuição invariante da cadeia, que é representada por:

$$\boldsymbol{\pi}' = [\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(i), \ldots], i \in E.$$

Distribuição Invariante II

Teorema

Se a cadeia for fortemente ergódica, então, para $\forall i, j \in E$*:*

Teorema

Se a cadeia for fortemente ergódica, então, para $\forall i, j \in E$*:*

1.
$$\pi(i) = \frac{1}{\mathrm{E}_i(\tau_i)},$$

com $\mathrm{E}_i(\tau_i) = \mathrm{E}\left[\tau_i | X_0 = i\right]$ *e* $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$

Distribuição Invariante II

Teorema

Se a cadeia for fortemente ergódica, então, para $\forall i, j \in E$*:*

1. $$\pi(i) = \frac{1}{\mathrm{E}_i(\tau_i)},$$

   com $\mathrm{E}_i(\tau_i) = \mathrm{E}\left[\tau_i | X_0 = i\right]$ *e* $\tau_i = \min\{n : X_n = i\}$

2. $\lim_{n\to\infty} P_{ji}^{(n)} = \pi(i)$*, ou seja, esse limite não depende do estado inicial da cadeia*

Se a cadeia é finita, aperiódica e irredutível, existe a distribuição invariante, que pode ser obtida das seguintes maneiras:

Se a cadeia é finita, aperiódica e irredutível, existe a distribuição invariante, que pode ser obtida das seguintes maneiras:

1. Calcula-se $lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n$. Essa matriz existe e tem a forma $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}'$, onde $\mathbf{1}$ é um vetor de uns. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é qualquer das linhas dessa matriz-limite.

DISTRIBUIÇÃO INVARIANTE III

Se a cadeia é finita, aperiódica e irredutível, existe a distribuição invariante, que pode ser obtida das seguintes maneiras:

1. Calcula-se $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$. Essa matriz existe e tem a forma $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}'$, onde $\mathbf{1}$ é um vetor de uns. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é qualquer das linhas dessa matriz-limite.
2. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é a solução dos sistema de equações lineares $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}$, sujeito à restrição $\sum_{i\in E}\pi(i) = 1$. A condição de ergodicidade forte garante que a solução existe e é única.

Distribuição Invariante III

Se a cadeia é finita, aperiódica e irredutível, existe a distribuição invariante, que pode ser obtida das seguintes maneiras:

1. Calcula-se $lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$. Essa matriz existe e tem a forma $\mathbf{1}\boldsymbol{\pi}'$, onde $\mathbf{1}$ é um vetor de uns. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é qualquer das linhas dessa matriz-limite.
2. O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é a solução dos sistema de equações lineares $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}'\mathbf{P}$, sujeito à restrição $\sum_{i\in E}\pi(i) = 1$. A condição de ergodicidade forte garante que a solução existe e é única.

As probabilidades $\pi(i)$, $i \in E$ podem ser vistas com a proporção de vezes que a cadeia passa pelo estado i em uma quantidade suficientemente grande de passos.

Exemplo

Equação da Invariante

$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2)] = [\pi(0), \pi(1), \pi(2)] \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Equação da Invariante

$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2)] = [\pi(0), \pi(1), \pi(2)] \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,3\pi(0) + 0,2\pi(1) + 0,6\pi(2) & = \pi(0) \\ 0,2\pi(0) + 0,4\pi(1) + 0\pi(2) & = \pi(1) \\ 0,5\pi(0) + 0,4\pi(1) + 0,4\pi(2) & = \pi(2) \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) & = 1 \end{cases}$$

Exemplo

Equação da Invariante

$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2)] = [\pi(0), \pi(1), \pi(2)] \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,3\pi(0) + 0,2\pi(1) + 0,6\pi(2) & = \pi(0) \\ 0,2\pi(0) + 0,4\pi(1) + 0\pi(2) & = \pi(1) \\ 0,5\pi(0) + 0,4\pi(1) + 0,4\pi(2) & = \pi(2) \\ \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) & = 1 \end{cases}$$

Solução

$$\boldsymbol{\pi}' = [0,4186, 0,1395, 0,4419]$$

3

Modelos Markovianos de Decisão

Em geral, o modelo de Markov é apropriado para sistemas dinâmicos com movimentos regulados por determinada lei probabilística.

Em geral, o modelo de Markov é apropriado para sistemas dinâmicos com movimentos regulados por determinada lei probabilística.

Mesmo em presença de dinamismo e incerteza, há situações em que as transições dos estados podem ser controladas por uma sequência de ações.

Em geral, o modelo de Markov é apropriado para sistemas dinâmicos com movimentos regulados por determinada lei probabilística.

Mesmo em presença de dinamismo e incerteza, há situações em que as transições dos estados podem ser controladas por uma sequência de ações.

MODELO DE DECISÃO DE MARKOV

É uma ferramenta poderosa para analisar processos probabilísticos de decisão sequencial com um horizonte infinito de planejamento.

Modelo de Decisão

Aplicações Potenciais

- Controle de estoque
- Manutenção
- Fabricação
- Comunicação

APLICAÇÕES POTENCIAIS

- Controle de estoque
- Manutenção
- Fabricação
- Comunicação

CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO

Custo (ou recompensa) médio à longo prazo (*long-run*) por unidade de tempo

Modelo de Decisão

Aplicações Potenciais

- Controle de estoque
- Manutenção
- Fabricação
- Comunicação

Critério de Otimização

Custo (ou recompensa) médio à longo prazo (*long-run*) por unidade de tempo

Outros Critérios

- Custo esperado total
- Custo descontado (fluxo de caixa) esperado total

Produto é estocado para satisfazer demanda continuada.

Um Modelo de Estoque

Produto é estocado para satisfazer demanda continuada.

Demanda

D_{t+1}: demanda agregada entre os instantes t e $t+1$

$\{D_t\}_{t\geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas

Produto é estocado para satisfazer demanda continuada.

Demanda

D_{t+1}: demanda agregada entre os instantes t e $t+1$

$\{D_t\}_{t \geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas

Estoque

Dado $X_t = i$, X_{t+1} depende apenas da demanda em $t+1$, ou seja, não é afetada pelo histórico do estoque anterior ao instante t.

Um Modelo de Estoque

Produto é estocado para satisfazer demanda continuada.

Demanda

D_{t+1}: demanda agregada entre os instantes t e $t+1$

$\{D_t\}_{t \geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas

Estoque

Dado $X_t = i$, X_{t+1} depende apenas da demanda em $t+1$, ou seja, não é afetada pelo histórico do estoque anterior ao instante t.

Reposição do Estoque

Ocorre no imediatamente após o pedido.

Estratégia (s, S)

Se no instante t o estoque (X_t) é menor ou igual a s, então ele é trazido para o nível S no instante $t + 0$. Caso contrário, não se toma nenhuma ação.

ESTRATÉGIA (s, S)

Se no instante t o estoque (X_t) é menor ou igual a s, então ele é trazido para o nível S no instante $t + 0$. Caso contrário, não se toma nenhuma ação.

HIPÓTESES

- O estoque inicial (X_0) não é maior que S
- Não há reposição instantânea, caso a demanda no instante t seja maior que o estoque.

Estratégia (s, S)

Se no instante t o estoque (X_t) é menor ou igual a s, então ele é trazido para o nível S no instante $t + 0$. Caso contrário, não se toma nenhuma ação.

Hipóteses

- O estoque inicial (X_0) não é maior que S
- Não há reposição instantânea, caso a demanda no instante t seja maior que o estoque.

Consequência

Espaço de estado de $\{X_t\}_{t\geq 1}$: $E = \{S, S-1, S-2, \ldots, 0\}$

EQUAÇÃO DINÂMICA DO MODELO

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{, se } s < X_t \leq S \\ \max\{S - D_{t+1}, 0\} & \text{, se } X_t \leq s \end{cases}$$

Exemplo - Estoque

O Problema

- X_t: quantidade itens de produto X em estoque no final da semana t
- D_t: demanda do produto X na semana t, com $D_t \sim \text{Poisson}(1)$
- $(0,3)$: política (s,S) de estoque

O Problema

- X_t: quantidade itens de produto X em estoque no final da semana t
- D_t: demanda do produto X na semana t, com $D_t \sim \text{Poisson}(1)$
- $(0,3)$: política (s,S) de estoque

Demanda

$D_t = i$	$\text{P}\{D_t = i\}$
0	$0,368$
1	$0,368$
2	$0,184$
≥ 3	$0,080$

SITUAÇÕES PARA TRANSIÇÕES

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \\ D_t \geq 1 & D_t = 0 & 0 & 0 \\ D_t \geq 2 & D_t = 1 & D_t = 0 & 0 \\ D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \end{bmatrix}$$

Situações para Transições

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \\ D_t \geq 1 & D_t = 0 & 0 & 0 \\ D_t \geq 2 & D_t = 1 & D_t = 0 & 0 \\ D_t \geq 3 & D_t = 2 & D_t = 1 & D_t = 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Probabilidades de Transição

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \\ 0,632 & 0,368 & 0 & 0 \\ 0,264 & 0,368 & 0,368 & 0 \\ 0,080 & 0,184 & 0,368 & 0,368 \end{bmatrix}$$

Distribuição Estacionária da Cadeia

$$\pi' = [0,286; 0,285; 0,263; 0,166]$$

DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA DA CADEIA

$$\pi' = [0,286; 0,285; 0,263; 0,166]$$

Os valores da invariante podem ser interpretados como a proporção de vezes que o estoque atinge cada um destes estados após um número muito grande de semanas

Tempo Esperado de Recorrência

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi(i)}$$

TEMPO ESPERADO DE RECORRÊNCIA

$$\mu_{ii} = \frac{1}{\pi(i)}$$

ESTOQUE - TEMPOS DE RECORRÊNCIA

$$\mu_{00} = \frac{1}{0,286} = 3,50\,\text{sem.} \qquad \mu_{22} = \frac{1}{0,263} = 3,80\,\text{sem.}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{0,285} = 3,51\,\text{sem.} \qquad \mu_{33} = \frac{1}{0,166} = 6,02\,\text{sem.}$$

Custo Médio por Unidade de Tempo

Custos (ou Penalidades)

$C(X_t)$: custo (ou função perda) incorrido quando o processo se encontrar no estado X_t, no instante t

Custos (ou Penalidades)

$C(X_t)$: custo (ou função perda) incorrido quando o processo se encontrar no estado X_t, no instante t

Modelo de Custo

- $C(X_t)$ é variável aleatória que assume os valores $C(0), C(1), \ldots, C(M)$
- A função $C(.)$ é independente de t

Custos (ou Penalidades)

$C(X_t)$: custo (ou função perda) incorrido quando o processo se encontrar no estado X_t, no instante t

Modelo de Custo

- $C(X_t)$ é variável aleatória que assume os valores $C(0), C(1), \ldots, C(M)$
- A função $C(.)$ é independente de t

Custo Médio incorrido em n períodos

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right]$$

CUSTO ESPERADO POR UNIDADE DE TEMPO

Para um horizonte infinito de planejamento:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j\in E} \pi(j)C(j)$$

CUSTO ESPERADO POR UNIDADE DE TEMPO

Para um horizonte infinito de planejamento:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j\in E} \pi(j)C(j)$$

RESULTADO PRECEDENTE

Pode-se provar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}\right) = \pi(j)$$

ESTOQUE - FUNÇÃO DE CUSTO

$$C(X_t) = \begin{cases} \$0 & \text{, se } X_t = 0 \\ \$2 & \text{, se } X_t = 1 \\ \$8 & \text{, se } X_t = 2 \\ \$18 & \text{, se } X_t = 0 \end{cases}$$

Estoque - Custo Semanal Esperado

Estoque - Função de Custo

$$C(X_t) = \begin{cases} \$0 & , \text{se } X_t = 0 \\ \$2 & , \text{se } X_t = 1 \\ \$8 & , \text{se } X_t = 2 \\ \$18 & , \text{se } X_t = 0 \end{cases}$$

Custo de Estoque Esperado a Longo Prazo

$$[0,286 \quad 0,285 \quad 0,263 \quad 0,166] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix} = 5,662$$

Situação

Além do estado da cadeia, o custo também pode depender de alguma variável aleatória.

Situação

Além do estado da cadeia, o custo também pode depender de alguma variável aleatória.

Exemplo - Estoque

Custos as serem considerados:

- Custo da encomenda
- Custo de penalidade para demanda não atendida
- Custo de armazenagem

Funções de Custo Complexas

Situação

Além do estado da cadeia, o custo também pode depender de alguma variável aleatória.

Exemplo - Estoque

Custos as serem considerados:

- Custo da encomenda
- Custo de penalidade para demanda não atendida
- Custo de armazenagem

O custo total por semana t é função do estoque na semana anterior (X_{t-1}) e da demanda na semana corrente (D_t)

Custo Médio Esperado a Longo Prazo por Unidade de Tempo

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_{t-1}, D_t)\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

onde $k(j) = \mathrm{E}\left[C(j, D_t\right]$ que é a esperança condicional de $C(X_{t-1}, D_t)$ dado $X_{t-1} = j$.

Custos do Modelo

- Custo de encomenda: $\$25$ por unidade encomendada mais um valor fixo de $\$10$ por encomenda
- Penalidade por demanda não atendida: $\$50$
- Custo de armazenamento: considerado desprezível

CUSTOS DO MODELO

- Custo de encomenda: $\$25$ por unidade encomendada mais um valor fixo de $\$10$ por encomenda
- Penalidade por demanda não atendida: $\$50$
- Custo de armazenamento: considerado desprezível

EQUAÇÃO DINÂMICA DO CUSTO SEMANAL

$$C(X_{t-1}, D_t) = \begin{cases} 10 + (25)(3) + 50 \max\{D_t - 3, 0\} & \text{, se } s < X_{t-1} = 0 \\ 50 \max\{D_t - X_{t-1}, 0\} & \text{, se } X_t \geq 1 \end{cases},$$

em qualquer instante de tempo t.

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo do Estado 0

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 0

$$\begin{aligned} k(0) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 0\right] = 85 + 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 85 + 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$86,2 \end{aligned}$$

onde $P_D(i) = \mathrm{P}\{D_t = i\}$.

Custo do Estado 0

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 0

$$\begin{aligned} k(0) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 0\right] = 85 + 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 85 + 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$86,2 \end{aligned}$$

onde $P_D(i) = \mathrm{P}\{D_t = i\}$.

Probabilidades Demandas

Custo do Estado 0

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 0

$$\begin{aligned} k(0) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 0\right] = 85 + 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 85 + 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$86,2 \end{aligned}$$

onde $P_D(i) = \mathrm{P}\{D_t = i\}$.

Probabilidades Demandas

$$\begin{aligned} P_D(2) &= 0,184 \\ P_D(3) &= 0,061 \\ P_D(4) &= 0,015 \end{aligned}$$

Custo do Estado 0

$$C(0, D_t) = 85 + 50 \max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 0

$$\begin{aligned} k(0) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 0\right] = 85 + 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 85 + 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$86,2 \end{aligned}$$

onde $P_D(i) = \mathrm{P}\{D_t = i\}$.

Probabilidades Demandas

$P_D(2) = 0,184$
$P_D(3) = 0,061$
$P_D(4) = 0,015$

$P_D(5) = 0,003$
$P_D(6) = 0,001$
$P_D(7) = 0,000$

Custo do Estado 1

Custo do Estado 1

$$C(1, D_t) = 50 \max \{D_t - 1, 0\}$$

Custo do Estado 1

$$C(1, D_t) = 50 \max\{D_t - 1, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 1

$$\begin{aligned} k(1) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 1\right] = 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 1, 0\}\right] \\ &= 50\left[P_d(2) + 2P_D(3) + 3P_D(4) + \cdots\right] \\ &= \$18,4 \end{aligned}$$

Custo do Estado 2

$$C(2, D_t) = 50 \max\{D_t - 2, 0\}$$

Custo do Estado 2

Custo do Estado 2

$$C(2, D_t) = 50 \max\{D_t - 2, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 2

$$\begin{aligned} k(2) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 2\right] = 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 1, 0\}\right] \\ &= 50\left[P_d(3) + 2P_D(4) + 3P_D(5) + \cdots\right] \\ &= \$5,2 \end{aligned}$$

Custo do Estado 3

Custo do Estado 3

$$C(3, D_t) = 50 \max \{D_t - 3, 0\}$$

Custo do Estado 3

Custo do Estado 3

$$C(3, D_t) = 50\max\{D_t - 3, 0\}$$

Custo Esperado condicionado ao Estado 3

$$\begin{aligned} k(3) &= \mathrm{E}\left[C(X_{t-1}, D_t) | X_{t-1} = 3\right] = 50\mathrm{E}\left[\max\{D_t - 3, 0\}\right] \\ &= 50\left[P_d(4) + 2P_D(5) + 3P_D(6) + \cdots\right] \\ &= \$1,2 \end{aligned}$$

Custo Semanal Esperado (*Long-Run*)

$$\sum_{j=0}^{3} k(j)\pi(j) \begin{bmatrix} 86,2 \\ 18,4 \\ 5,2 \\ 1,2 \end{bmatrix} = \boxed{\$31,46}$$

Hipóteses do Modelo

Hipóteses do Modelo

- $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov irredutível (E finito)

HIPÓTESES DO MODELO

- $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov irredutível (E finito)
- Há uma sequência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes associadas a essa cadeia

Condições de Validade do Modelo

Hipóteses do Modelo

- $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov irredutível (E finito)
- Há uma sequência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes associadas a essa cadeia
- Para um $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fixo, um custo $C(X_{t-1}, D_{t+m})$ é incorrido no instante t.

Hipóteses do Modelo

- $\{X_t\}$ é uma cadeia de Markov irredutível (E finito)
- Há uma sequência de variáveis aleatórias condicionalmente independentes associadas a essa cadeia
- Para um $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fixo, um custo $C(X_{t-1}, D_{t+m})$ é incorrido no instante t.
- A sequência $X_0, X_1, X_2, \ldots$ é independente de D_{t+m}

Atendidas as condições enunciadas

Resultado 1

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

em que $k(j) = \mathrm{E}\left[C(j, D_{t+m})\right]$

Atendidas as condições enunciadas

RESULTADO 1

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

em que $k(j) = \mathrm{E}\left[C(j, D_{t+m})\right]$

RESULTADO 2

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j\in E} k(j)\pi(j),$$

para basicamente todos os caminhos do processo.

EXEMPLO ESTOQUE

Encontrou-se o custo médio semanal (*long-run*) para a política $((0, 3))$

Exemplo Estoque

Encontrou-se o custo médio semanal (*long-run*) para a política $((0,3))$

Política Ótima

Quais os valores de (s, S) que minimizam o custo médio semanal de estoque (*long-run*)?

4

Processos de Poisson

5

Modelos de Filas

6

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFIA

TIJMS, H. C.
A First Course in Stochastic Models
Wiley, 2003

ROSS, S. M.
Introduction to Probability Models
Academic Press, 2010

ROSS, S. M.
Stochastic Processes
Wiley, 1996

KARLIN, S.; TAYLOR, H. M.
A First Course in Stochastic Processes
Academic Press, 1975

ATUNCAR, G. S.
Conceitos Básicos de Processos Estocásticos
Dep. Estatística/UFMG, 2011

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Prof. Lupércio França Bessegato

Departamento de Estatística
lupercio.bessegato@ufjf.edu.br
www.ufjf.br/lupercio_bessegato

Semestre 2013/3