Processos Estocásticos (EST020)

Prof. Lupércio F. Bessegato

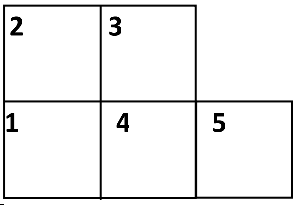
Lista nº 1 – Cadeias de Markov (1)

1. Suponha que chover ou não hoje depende da condição do tempo nos últimos três dias. Mostre como este sistema pode ser analisado utilizando uma cadeia de Markov. Quantos estados são necessários?
2. No problema anterior, suponha que, se choveu nos últimos três dias, então choverá hoje com probabilidade 0,8. Se não choveu em nenhum dos últimos três dias, a probabilidade de chover hoje é 0,2. Em qualquer outro caso, a probabilidade de ocorrer hoje o que ocorreu ontem será igual a 0,6. Determine a matriz de transição desta cadeia de Markov.
3. Sociólogos frequentemente assumem que classes sociais de sucessivas gerações em uma família podem estar relacionadas com uma cadeia de Markov. Portanto, supõe-se que a ocupação de um filho é dependente apenas da ocupação de seus pais e não da ocupação de seu avô.

		Classe do filho		
		L	M	U
Classe social do pai	L	0,40	0,50	0,10
	M	0,05	0,70	0,25
	U	0,05	0,50	0,45

Para tal população, qual a proporção de pessoas que estarão na classe média à longo prazo?

4. Um rato move-se em um labirinto em que as salas adjacentes se comunicam. Se no tempo n ele está em um compartimento com k salas adjacentes, ele estará em uma destas salas no instante n+1, escolhendo-a ao acaso com probabilidade 1/k. Um gato gordo e preguiçoso permanece todo o tempo em um determinado compartimento e um pedaço de queijo espera pelo rato em outra sala. O gato não é completamente preguiçoso: se o rato entrar no compartimento habitado pelo gato, o gato o comerá.



Qual é a probabilidade de o rato conseguir comer o queijo se ele iniciar seu movimento da sala 1, o gato estiver na sala 3 e o queijo na sala 5.

5. Um rato e um gato movem-se entre duas salas, usando diferentes caminhos. Seus movimentos são independentes, governados por suas respectivas matrizes de transição. O gato inicia na sala 1 e o rato na sala 2. Se eles estão na mesma sala, o gato come o rato. Quanto tempo, em média, o rato sobreviverá? As matrizes do rato e do gato são, respectivamente:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

6. Integrantes de um plano de pensão podem escolher entre três Fundos para aplicar seus investimentos: Fundo 0, Fundo 1 ou Fundo 2. Caso desejem, os membros podem trocar de fundo a cada mês. As probabilidades de troca permanecem constantes de mês a mês. A matriz de transição para o processo de troca de fundo é dada abaixo. Suponha que este plano de pensão inicie, no tempo 0, com seus empregados distribuídos igualmente pelos três fundos.

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

a. Construa a matriz de probabilidades de transição deste processo.
b. Qual será a proporção de empregados em cada fundo no final do primeiro mês?
c. Qual será a proporção de empregados em cada fundo no final do sétimo mês?
d. Qual será a proporção de empregados em cada fundo em longo prazo?

7. Suponha que um processo de produção mude de estado de acordo com uma cadeia de Markov, cuja matriz de probabilidades de transição está dada abaixo. Suponha também que certos estados são considerados aceitáveis e os restantes, inaceitáveis. Denote por A os estados inaceitáveis e por A^c os estados inaceitáveis. O processo de produção é considerado "bom" quando está em um estado aceitável e "ruim" quando está em um estado inaceitável.

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. A taxa pela qual o processo vai de "bom" para "ruim" (taxa de quebras);
b. O tempo médio que o processo permanece "ruim" quando ele estava "ruim";
c. O tempo médio que o processo permanece "bom", quando ele estava "bom".

8. A cada dia, o tempo de uma cidade é classificado como chuvoso, ensolarado ou nublado. Se um dia é chuvoso, é igualmente provável ser ensolarado ou nublado no próximo dia. Se o dia não é chuvoso, então há uma chance em três de que o tempo persistirá, no próximo dia, no tempo em que estiver, e se o tempo mudar de um dia para outro, então é igualmente provável ele tornar-se um dos dois outros estados. À longo prazo, qual a proporção de dias que são ensolarados? Qual a proporção de dias chuvosos?

9. Suponha que estudos demográficos mostrem que a cada ano, cerca de 5% da população da cidade se muda para o subúrbio, enquanto que 3% da população do subúrbio se muda para a cidade. Suponha também que um habitante é escolhido ao acaso, então um vetor de estado para certo ano pode ser interpretado como sendo as probabilidades de que o habitante resida na cidade ou em um subúrbio naquele instante.
a. Determine a matriz de probabilidades de migração para este modelo de deslocamento da população;
b. Suponha que o habitante escolhido resida na cidade atualmente. Qual é a probabilidade de que este habitante esteja residindo nos subúrbios no próximo ano?
c. Qual é a probabilidade de que o habitante esteja residindo no subúrbio daqui a dois anos?
d. Qual é a porcentagem da população que estará residindo no subúrbio após muitos anos?

10. Suponha que uma rede de comunicação transmita dígitos binários, 0 ou 1, em que cada dígito é transmitido dez vezes em seguida. Durante cada transmissão, a probabilidade é de 0,99 de que o dígito introduzido será transmitido de forma acurada. Em outras palavras, a probabilidade é de 0,01 de que o dígito que está sendo transmitido será registrado com valor oposto no final da transmissão. Para cada transmissão após a primeira, o dígito introduzido para transmissão é aquele que foi registrado no final da transmissão anterior. Caso X_0 represente o dígito binário entrando no sistema, X_1, o

dígito binário gravado após a primeira transmissão, X_2, o dígito binário gravado após a segunda transmissão, e assim por diante. Então $\{X_n\}$ é uma cadeia de Markov.

a. Construa a matriz de transição (em uma etapa).
b. Calcule a matriz de transição em 10 passos [$P^{(10)}$]. Use este resultado para identificar a probabilidade de que um dígito entrando na rede será gravado de forma precisa após a última transmissão.
c. Suponha que a rede seja redesenhada para melhorar a precisão na transmissão, aumentando para 0,999 a probabilidade de que o dígito de entrada seja transmitido corretamente, em uma única transmissão. Repita o item para encontrar a nova probabilidade de que um dígito entrando na rede será gravado de forma acurada após a última transmissão.