Lista nº 3 – Cadeias de Markov (2)

1. Seja $\boldsymbol{\alpha}_0' = \boldsymbol{\pi}'$
   a. Prove que a distribuição de X_1 é $\boldsymbol{\pi}$.
   b. Prove que a distribuição de X_k é $\boldsymbol{\pi}$ para qualquer instante de tempo k.
   c. Prove que $(X_0, X_1) \overset{d}{=} (X_1, X_2)$.
2. Prove que se uma cadeia irredutível finita possui matriz de transição duplamente estocástica, então todos as probabilidades invariantes são iguais.
3. Seja uma cadeia de Markov com espaço de estados E = {a, b, c}, distribuição inicial $\boldsymbol{\alpha}_0$' = [2/5, 1/5, 2/5] e matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

   Calcule:

   a. $P\{X_1 = b, X_2 = b, X_3 = b, X_4 = a, X_5 = c \mid X_0 = a\}$.
   b. $P\{X_1 = a, X_2 = c, X_3 = c, X_4 = a, X_5 = b \mid X_0 = c\}$.
   c. $P\{X_1 = b, X_3 = a, X_4 = c, X_6 = b \mid X_0 = a\}$.
   d. $P\{X_1 = b, X_2 = b, X_3 = a\}$.
   e. $P\{X_2 = b, X_5 = b, X_6 = b\}$.
4. Seja uma cadeia de Markov com espaço de estados E = {0, 1, 2, 3} e matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

   Calcule:

   a. $P\{X_5 = 2, X_6 = 0, X_7 = 2, X_8 = 2 \mid X_4 = 1\}$.
5. Seja Yn a soma dos resultados obtidos em n lançamentos independentes de um dado. Encontre $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{Y_n \text{ ser múltiplo de } 7\}$.
6. Considere o caminho aleatório com barreiras reflexivas, com espaço de estados E = {0, 1, 2, 3, 4, 5}e probabilidades de transição $P_{i,\, i+1} = 0,3$; $P_{i,\, i-1} = 0,7$; $P_{0,1} = 1$ e $P_{5,4} = 1$.
   a. Qual o comportamento de $\mathbf{P}^n$ quando n cresce?
   b. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3 \mid X_0 = 1\}$.
   c. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3 \mid X_0 = 2\}$.
   d. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3\}$ com $\boldsymbol{\alpha}_0$' = [1/6, 1/6, ..., 1/6]
7. Considere o caminho aleatório com barreiras absorventes, com espaço de estados E = {0, 1, 2, 3, 4, 5}e probabilidades de transição $P_{i,\, i+1} = 0,3$; $P_{i,\, i-1} = 0,7$; $P_{0,0} = 1$ e $P_{5,5} = 1$.
   a. Qual o comportamento de $\mathbf{P}^n$ quando n cresce?
   b. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3 \mid X_0 = 1\}$.
   c. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3 \mid X_0 = 2\}$.
   d. Calcule $P\{X_1 = 3, X_4 = 2, X_8 = 1, X_{16} = 3\}$ com $\boldsymbol{\alpha}_0$' = [1/6, 1/6, ..., 1/6]

8. Classifique os estados das cadeias de Markov com as seguintes matrizes de transição:

   a. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}$

   b. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,5 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}$

   c. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$

9. Seja uma cadeia de Markov com espaço de estados E = {0, 1, 2, 3, 4, 5} tem matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

   a. Determine quais são os estados recorrentes e os estados transitórios.
   b. Calcule $f_{j,\, R1}$, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 e R_1 = {0, 1}.

10. Uma cadeia de Markov com espaço de estados E = {0, 1, 2, 3, 4, 5} tem matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

   a. Encontres todas as classes.
   b. Calcule

11. Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ uma cadeia de Markov com dois estados, isto é $P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\} = p$ e $P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0\} = q$. Calcule:

   a. $P\{X_1 = 0 \mid X_0 = 0, X_2 = 0\}$.
   b. $P\{X_1 \neq X_2\}$.

12. Suponha que duas urnas possuam 2d bolas, das quais d são pretas e d são vermelhas. Inicialmente, d bolas são colocadas na urna 1 e as restantes na urna 2. A cada passo do experimento aleatório, uma bola é escolhida ao acaso de cada urna e colocada na urna oposta. Seja X_0 a variável aleatória associada à quantidade de bolas pretas inicialmente na urna 1 e X_n, associada à quantidade de bolas pretas na urna 1 depois de n passos do experimento. Encontre a função de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$.
13. Alguém, jogando roleta aposta R$1 a cada rodada, com probabilidade 9/19 de ganhar e 10/19 de perder. O jogador decide parar de apostar tão logo ele tenha R$ 1 a mais do que tinha quando iniciou as apostas, ou quando tiver perdido todos os R$ 1000 que tinha inicialmente.
    a. Calcule a probabilidade de que, quando o jogador parar de apostar, ele tenha perdido todo o seu capital de R$ 1000;
    b. Calcule sua perda esperada.
14. Considere uma cadeia de Markov com dois estados e matriz de transição
    $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$
    a. Mostre por indução que $\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2p-1)^n \end{bmatrix}$
    b. Obtenha a distribuição invariante da cadeia.
15. Considere a cadeia de Markov com espaço de estados E = {0, 1, 2} e matriz de probabilidades de transição

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

    a. Calcule $\mathbf{P}^2$.
    b. Mostre que $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2$.
    c. Encontre $\mathbf{P}^n$, $n \geq 1$.