Processos Estocásticos (EST020)

Prof. Lupércio F. Bessegato

Lista de Exercícios nº 5 – Processo de Poisson

1) Sejam $\{X_t;\ t \geq 0\}$ e $\{Y_t;\ t \geq 0\}$ dois processos de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Defina $Z_t = X_t - Y_t$, $t \geq 0$. Este é um processo estocástico cujo espaço de estados consiste de todos os inteiros (positivos, negativos e zero).
Seja $P_n(t) = P\{Z_t = n\}$, n= 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ...
Estabeleça a fórmula $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(t) Z^n = \exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\exp\{\lambda_1 zt + (\lambda_2/z)t\}$.
Calcule $E\{Z(t)\}$ e $E\{Z(t)^2\}$

2) Chamadas chegam a uma taxa de 15 chamadas por minuto de acordo a um processo de Poisson.
   a) Encontre a probabilidade de que, em um período de 1 minuto, cheguem 3 chamadas durante os primeiros 10 segundos e 2 chamadas durante os últimos 15 segundos.;
   b) Determine a média e a vari6ancia do tempo até a chegada da décima chamada.

3) Seja $\mathbf{X} = \{X_t;\ t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa $\lambda = 15$. Calcule:
   a) $\mathbf{P}(X_6 = 9)$;
   b) $\mathbf{P}(X_6 = 9, X_{20} = 13, X_{56} = 27)$;
   c) $\mathbf{P}(X_{20} = 13 \mid X_6 = 9)$;
   d) $\mathbf{P}(X_6 = 9 \mid X_{20} = 13)$.

4) Seja $X=\{X_t;\ t \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$. Calcule:
   a) $\mathbf{E}(X_t)$ e $\mathbf{Var}(X_t)$;
   b) $\mathbf{E}(X_{t+s} \mid X_t)$.

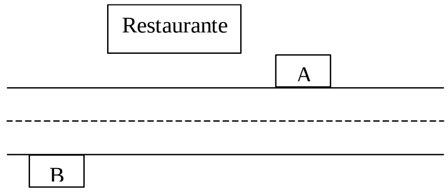
5) Suponha que as chegadas de passageiros em uma parada de ônibus seguem um processo de Poisson **X**, com taxa $\lambda = 1/3$ por minuto. Assuma que um ônibus partiu da parada no instante $t = 0$, não deixando nenhum passageiro para trás. Seja T o instante de chegada do próximo ônibus. Então o número de passageiros presentes quando ele chegar será X_t. Suponha que T tem distribuição Ψ.
   a) Calcule $\mathbf{E}(X_T \mid T)$ e $\mathbf{E}(X^2_T \mid T)$.
   b) Calcule $\mathbf{E}(X_T)$ e $\mathbf{Var}(X_T)$ para $f_\psi = ½$, $9 \leq t \leq 11$.

6) Uma loja promete dar um pequeno presente a cada 13º cliente que chegue à loja. Supondo que os clientes cheguem segundo um processo de Poisson com taxa λ,
   a) Encontre a f.d.p. do tempo entre chegadas de clientes que recebem presentes ;
   b) Encontre $P(M_t = k)$ para o número de presentes dados pela loja no intervalo $[0, t]$

7) Clientes chegam a uma loja segundo um processo de Poisson **X** com taxa $\lambda = 20$ por hora. Encontre o número esperado de vendas realizadas durante um dia de trabalho (a loja fica aberta 8 horas por dia), supondo que a probabilidade de um cliente comprar algo é $0,3$.

8) Para um processo de Poisson, mostre que, para 0<s<t,
$$P(X_s = k \mid X_t = n) = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k},\ k = 0,1,2,\ldots,n.$$

9) Considere o tráfego em uma estrada, conforme figura abaixo. Sabe-se que a quantidade de veículos passando pelo ponto A em uma hora segue uma distribuição de Poisson com média 60; 20% destes veículos são caminhões. O número de veículos passando pelo Ponto B em uma hora também segue uma distribuição de Poisson, possuindo média 80; 30% destes veículos são caminhões. Em geral, 10% de todos os veículos param no restaurante. O número de pessoas em um caminhão é um; o número de passageiros em um carro é igual a 1, 2, 3, 4, ou 5, com probabilidades 0,30; 0,30; 0,20; 0,10 e 0,10. Encontre o valor esperado do número de pessoas chegando no restaurante em uma hora (Z);



10) Um dispositivo está sujeito a choques que ocorrem de acordo com um processo de Poisson **X**, com taxa λ. O dispositivo pode falhar somente devido ao choque, e a probabilidade que um dado choque cause falha é *p* independente do número e dos tempos dos choques anteriores. Seja *K* o número total de choques que o dispositivo leva antes da falha, e seja $T=T_K$ o tempo da falha.

a) Calcule $\mathbf{E}(T)$ e $\mathbf{Var}(T)$;
b) Calcule $\mathbf{E}(T|\,K)$.
c) Calcule $\mathbf{E}(T\mid K>9)$.

11) Uma loja de departamentos tem três portas. As chegadas em cada porta seguem um processo de Poisson com taxas $\lambda_1=110$, $\lambda_2=90$, $\lambda_3=160$ clientes por hora. 30% de todos os clientes são homens. A probabilidade que um cliente masculino compre algum produto é 0,80, sendo de 0,10 no caso das clientes femininas. Uma compra média é avaliada em $4,50.

a) Qual é a média do total de vendas efetuadas em um dia de 10 horas;
b) Qual a probabilidade de que a 3ª cliente feminina a comprar algum produto, chegue durante os primeiros 15 minutos? Qual é o tempo esperado de sua chegada?

12) Clientes chegam em um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa λ. Suponha que dois clientes cheguem durante a primeira hora. Qual é a probabilidade que:

a) Ambos tenham chegado durante os primeiros 20 minutos?
b) Pelo menos um tenha chegado durante os primeiros 20 minutos.

13) Admita que automáveis passem por determinado trecho de uma estrada de acordo a um processo de Poisson com taxa $\lambda= 3$ carro por minuto.

a) Suponha que uma pessoa decida atravessar esse mesmo trecho com os olhos vendados. Qual ~e a probabilidade de ele conseguir escapar ileso, se a referida travessia demorar *s* segundos: Considere *s* = 2, 5, 10, 20.
b) Suponha agora que a mesma pessoa é suficientemente ágil para conseguir escapar ileso de um automóvel, não acontecendo o mesmo, se durante a travessia surgirem dois ou mais automóveis. Calcule a probabilidade de esta pessoa não ser ferida, caso a travessia demore *s* = 5, 10, 20, 30 segundos.

14) Em cada domingo, 15 unidades de um determinado produto são postas em estoque para venda no restante da semana. As encomendas desse produto ocorrem de acordo a um processo de Poisson de taxa igual a 3 unidades por dia. Note-se que uma encomenda não resulta numa venda caso não haja unidades em estoque. Admita ainda que devido à natureza do produto são destruídas em cada domingo todas as unidades que não tenham sido vendidas na semana anterior.

a) Calcule a probabilidade de não haver unidades para venda a partir das 0 horas de terça-feira;
b) Determine a probabilidade de terem sido vendidas todas as unidades em estoque até as 24 horas de sábado;
c) Obtenha a expressão do número esperado de unidades destruídas em cada semana.

15) Um certo produto é distribuído diariamente, mas a hora de sua chegada é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1h e 2h (sendo zero a hora de abertura do supermercado). O processo de chegadas dos clientes ao supermercado é um processo de Poisson de taxa 20 (a unidade de tempo é a hora).

a) Sabendo que em cada 100 clientes, 60 pretendem adquirir o referido produto, calcule o número esperado de clientes não servidos diariamente devido ao produto não ter sido ainda distribuído;

Ainda no mesmo supermercado, vai realizar-se, num determinado dia, uma campanha que consiste em atriuir um prêmio a cada 20º. cliente que chegar.

b) Qual é a distribuição do intervalo de tempo entre chegadas de clientes premiados?
c) Sabendo que o supermercado está aberto entre as 9h e as 19h, indique a expressão que lhe permitiria calcular a probabilidade de ter-se que atribuir exatamente 10 prêmios;

d) Considere um processo {Y(t), t≥0}, em que Y(t) representa o número de clientes premiados no intervalo (0, t]. Será que Y(t) é um processo de Poisson? Justifique.

16) Automóveis passam em determinado ponto de uma estrada de acordo a um processo de Poisson de taxa $\lambda = 1$ automóvel por minuto. Considerando que a percentagem de Mercedes que circulam nessa estrada é de 5%, calcule:

a) A probabilidade de passar pelo menos uma Mercedes no período de uma hora;
b) O número esperado de automóveis que passaram no período de uma hora, sabendo que 10 deles eram Mercedes;
c) A probabilidade de terem passado 5 Mercedes ao fim de uma hora, sabendo que nesse período passaram 50 carros pelo referido ponto da estrada;

17) Seja, para $t \geq 0$, X(t) o valor do total dos pr6emios pagos por uma companhia de seguros de vida no intervalo (0, t]. Os pagamentos de prêmios de seguros de vida são reclamados à companhia segundo um processo de Poisson de taxa 5 pagamentos por semana. Se os prêmios forem independentes e possuírem distribuição exponencial com valor esperado $ 20.000, determine:

a) O valor esperado e a variância do valor total de prêmios pagos pela companhia num período de 4 semanas;
b) Cov (X(s), X(t)), com $0 \leq s \leq t$;