

Cadeias de Markov - Exemplos de Aplicação

Exemplo 01 - Clima

O tempo em Montes Claros pode mudar de maneira bastante rápida de um dia para o outro. Entretanto, as chances de o dia ser ensolarado amanhã são ligeiramente maiores caso não esteja chovendo hoje. Particularmente, a probabilidade de não chover amanhã é 0,8, caso hoje esteja seco, porém é de apenas 0,6, caso tenha chovido hoje. Essas probabilidades não mudam, caso as informações sobre o tempo antes de hoje forem levadas em consideração. O clima na região é bastante estável, permitindo supor que essas probabilidades de transição não se alterem durante o ano.

Exemplo 02 - Modelo de Estoque

Um dado produto é estocado de maneira a satisfazer uma demanda continuada. A demanda agregada entre o tempo t e $t+1$ é D_{t+1} , $t=0, 1, \dots$. Assume-se que $\{D_{t+1}\}_{t>0}$ são identicamente distribuídas e independentes entre si e com o valor inicial do estoque X_0 . A reposição do estoque ocorre no tempo $t+0$ (ou seja, imediatamente após o instante t), para todo $t > 0$. Uma estratégia popular de reposição de estoque é a política (s, S) , onde s e S são inteiros tais que $0 < s < S$. Sob essa política de estoque, se, no instante t , o estoque está menor ou igual a s , então ele é trazido para o nível S no instante $t+0$. Caso contrário não é tomada nenhuma ação. O estoque inicial X_0 não é maior que S e, portanto, $\{X_{t+1}\}_{t>0}$ assume valores em $E = \{S, S-1, S-2, \dots\}_{t>0}$. São permitidos valores negativos, com a interpretação de que uma demanda não atendida é imediatamente satisfeita mediante reposição de estoque.

A equação dinâmica de evolução do estoque é dada por:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & , \text{ se } s < X_t \leq S \\ S - D_{t+1} & , \text{ se } X_t \leq s \end{cases}$$

$\{X_{t+1}\}_{t>0}$ é uma cadeia de Markov homogênea.

Outra abordagem:

Não há reposição instantânea caso a demanda no instante t seja maior que o estoque. Assim, $\{X_{t+1}\}_{t>0}$ assume valores em $E = \{S, S-1, S-2, \dots\}$. Nesse caso, a equação dinâmica da evolução do estoque é:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & , \text{ se } s < X_t \leq S \\ \max\{S - D_{t+1}, 0\} & , \text{ se } X_t \leq s \end{cases}$$

Exercício 03 - Falhas em Equipamentos

Há três máquinas em operação em uma linha de produção. A probabilidade de uma máquina falhar em um determinado dia é p , independente da situação das outras máquinas. Somente uma máquina pode ser reparada no mesmo dia (a oficina estará disponível para o próximo dia). A máquina 1 supre as máquinas 2 e 3, ou seja, se a máquina 1 falhar não há produção naquele dia. Se a máquina 1 falhar, ela é sempre reparada primeiro. Se as máquinas 2 e 3 falharem e a 1 continuar em operação, a máquina 2 é reparada primeiro. As máquinas, que estiverem inoperantes permanecem inoperantes durante todo o dia. Máquinas em operação permanecem funcionando, mas podem falhar no próximo dia. É certo que uma máquina reparada operará no próximo dia.

Exercício 04 - Preço de Ativo Financeiro

Considere o seguinte modelo para o valor de uma ação. No final de cada dia, o preço é registrado. Se a ação subiu, a probabilidade de que ela subirá amanhã é de 0,7. Se a ação tiver caído, a probabilidade de que ela subirá amanhã é de apenas 0,5. Para fins de simplificação, classificaremos como uma queda, caso o preço da ação permaneça estável.