Lista nº 1 – Variáveis Aleatórias e Independência

1. (Montgomery e Runger[2] – Exercício 5-26, pág. 113) O rendimento, em libras, de um dia de produção é distribuído normalmente, com uma média de 1.500 libras e um desvio-padrão de 100 libras. Considere que os rendimentos em diferentes dias sejam variáveis aleatórias independentes.
   a. Qual é a probabilidade de o rendimento da produção exceder 1.400 libras em cada um dos cinco dias da próxima semana? *R.: 0,84134.*
   b. Qual é a probabilidade de o rendimento da produção exceder 1.400 libras em no mínimo quatro dos cinco dias da próxima semana? *R.: 0,8190.*

2. (Montgomery e Runger[2] – Exercício 5-60, pág. 122) A largura de um portal é distribuída normalmente, com uma média de 24 polegadas e um desvio-padrão de 1/8 polegada. A largura de uma porta é normalmente distribuída, com uma média de 23 e 7/8 polegadas e um desvio-padrão de 1/16 polegadas. Considere independência.
   a. Determine a média e o desvio-padrão da diferença entre a largura do portal e a largura da porta. *R.: 1/8; 0,1398.*
   b. Qual é a probabilidade de a largura do portal menos a largura da porta exceder ¼ polegada? *R.: 0,187.*
   c. Qual é a probabilidade de a porta não se ajustar ao portal? *R.:* 0,187.

3. (Montgomery e Runger[2] – Exercício 5-82, pág. 125) Os tempos de vida de seis componentes principais em uma copiadora são variáveis aleatórias exponenciais e independentes, com médias 8.000, 10.000, 10.000, 20.000, 20.000 e 25.000 horas, respectivamente.
   a. Qual é a probabilidade de os tempos de vida de todos os componentes excederem 5.000 horas? *R.: 0,0978.*
   b. Qual é a probabilidade de no mínimo o tempo de vida de um componente exceder 25.000 horas? *R.: 0,7408.*

4. (Montgomery et al.[1] – Exercício 3-109, pág. 74). Dois vendedores independentes fornecem cimento para um construtor de auto-estradas. Através de experiência prévia, é sabido que a resistência à compressão de amostras de cimento pode ser modelada por uma distribuição normal, com média μ_1 = 6.000 quilogramas por centímetro quadrado e σ_1 = 100 quilogramas por centímetro quadrado, para o vendedor 1 e μ_2 = 5.825 quilogramas por centímetro quadrado e σ_2 = 90 quilogramas por centímetro quadrado, para o vendedor 2. Qual é a probabilidade de ambos os vendedores fornecerem uma amostra com resistência à compressão:
   a. Menor do que 6.100 kg/cm^2? *R.: 0,840.*
   b. Entre 5.800 e 6.050? *R.: 0,403.*
   c. Em excesso de 6.200? *R.: 0.*

5. (Montgomery e Runger[2] – Exercício 5.65, pág. 123). Pesos de peças são normalmente distribuídos com variância igual a σ^2. Erro de medida é normalmente distribuído com média zero e variância 0,5σ^2, independentemente

dos pesos das peças, sendo adicionados ao peso da peça. Especificações inferior e superior são centralizadas em 3 σ em torno da média do processo.

a. Sem erro de medida, qual é a probabilidade de uma peça exceder as especificações? *R.: 0,0027*.
b. Com erro de medida, qual é a probabilidade de uma peça ser medida como além das especificações? Isso implica que ela realmente esteja além das especificações? *R.: 0,0143.*
c. Qual será a probabilidade de uma peça ser medida além das especificações se o peso verdadeiro da peça estiver um σ abaixo do limite superior de especificação? *R.: 0,0709.*

6. (Montgomery et al.(1) – Exercício 3-119, pág. 80). Uma capa de plástico para um disco magnético é composta de duas metades. A espessura de cada metade é distribuída normalmente, com uma média de 1,5 milímetro e um desvio-padrão de 0,1 milímetro. As metades são independentes.

   a. Determine a média e o desvio-padrão da espessura total das duas metades. *R.: 3 mm e 0,141 mm.*
   b. Qual é a probabilidade de a espessura total exceder 3,3 milímetros? *R.: 0,0169.*

7. (Montgomery et al.(1) – Exercício 3-123, pág. 80). A espessura da camada fotorresistente usada na fabricação de semicondutores tem uma média de 10 micrômetros e um desvio-padrão de 1 micrômetro. Considere que a espessura seja distribuída normalmente e que as espessuras de pastilhas diferentes sejam independentes.

   a. Determine a probabilidade de a espessura média de 10 pastilhas ser maior do que 11 ou menor do que 9 micrômetros. *R.: 0,002.*
   b. Determine o número de pastilhas que necessitam ser medidas, de modo que a probabilidade de a espessura média exceder 11 micrômetros seja igual a 0,01. *R.: 6.*

8. (Montgomery et al.(1) – Exercício 3-127, pág. 81). A quantidade de tempo que um consumidor gasta esperando no balcão de check-in de um aeroporto é uma variável aleatória, com média de 8,2 minutos e desvio-padrão de 1,5 minuto. Suponha que uma amostra aleatória de $n = 49$ consumidores seja observada. Encontre a probabilidade de que o tempo médio de espera na fila para esses consumidores seja:

   a. Menor que 8 minutos. *R.: 0,176.*
   b. Entre 8 e 9 minutos. *R.: 0,824.*
   c. Menor que 7,5 minutos. *R.: 0,0005.*

9. (Montgomery et al.(1) – Exercício 3-145, pág. 82). De compromissos contratuais e extensivos testes passados de laboratório, sabemos que as medidas de resistência à compressão são normalmente distribuídas, com resistência média verdadeira à compressão $\mu = 5.500$ psi e desvio-padrão $\sigma = 100$ psi. Uma amostra aleatória de elementos estruturais é testada para resistência à compressão no local de recepção dos consumidores.

   a. Qual é o desvio-padrão da distribuição amostral da média da amostra para esse problema, se $n = 9$? *R.: 33,3 psi.*

b. Qual é o desvio-padrão da distribuição amostral da média da amostra para esse problema, se n = 20? *R.: 22,36 psi.*
c. Compare seus resultados dos itens (a) e (b) e comente porque eles são iguais ou diferentes.

10. (Montgomery et al.(1) – Exercício 3-149, pág. 82). Um arranjo mecânico usado em um motor de automóvel contém quatro componentes importantes. Os pesos dos componentes são distribuídos normal e independentemente, com as seguintes médias e desvios-padrão (em onças):

Componente	Média	Desvio padrão
Capa esquerda	4,0	0,4
Capa direita	5,5	0,5
Arranjo do mancal	10,0	0,2
Arranjo de parafusos	8,0	0,5

a. Qual é a probabilidade de o peso de um arranjo exceder 29,5 onças? *R.: 0,008.*
b. Qual é a probabilidade de o peso médio de oito arranjos independentes exceder 29 onças? *R.: 0.*

11. Na fabricação de lâmpadas de eletroluminescência, várias camadas diferentes de tinta são depositadas em um substrato plástico. A espessura dessas camadas é crítica e especificações relativas à cor final e à intensidade de luz devem ser obedecidas. Sabe-se que X é normalmente distribuída, com uma média de 0,1 mm e um desvio-padrão de 0,00031 mm e Y é normalmente distribuída, com uma média de 0,23 mm e um desvio-padrão de 0,00017 mm. O valor de ρ para essas variáveis é igual a zero.

a. (Montgomery e Runger (2) – Exercício 5.49, pág. 112) As especificações exigem que uma lâmpada tenha uma espessura de tinta correspondendo a X na faixa de 0,099535 a 0,100465 mm e Y na faixa de 0,22966 a 0,23034 mm. Qual é a probabilidade de uma lâmpada selecionada aleatoriamente atender às especificações? *R.: 0,8270.*
b. (Montgomery e Runger (2) – Exercício 5.59, pág. 114) Se uma determinada lâmpada for composta somente por essas duas tintas, qual será a probabilidade da espessura total da tinta ser menor que 0,2337 mm? *R.: 0.*
c. Uma lâmpada com uma espessura total excedendo 0,2405 mm não tem uma uniformidade de cor requerida pelo consumidor. Encontre a probabilidade de uma lâmpada selecionada aleatoriamente não satisfazer as especificações do consumidor. *R.: 1.*

12. (Montgomery e Runger (2) – Exercício 5.87, pág. 117) O tempo para um sistema automatizado em um depósito localizar uma peça é distribuído normalmente, com uma média de 45 segundos e um desvio-padrão de 30 segundos. Suponha que sejam efetuados pedidos independentes para 10 peças.

a. Qual é a probabilidade de que o tempo médio para localizar 10 peças exceda 60 segundos? *R.: 0,057.*
b. Qual é a probabilidade de que o tempo total para localizar 10 peças exceda 600 segundos? *R.: 0,057.*

13. Deve-se montar um eixo em um mancal. O diâmetro interno do mancal (X_1) é uma variável aleatória normal com média μ_1 = 1,500 in e desvio padrão σ_1 = 0,0020 in. O diâmetro externo do eixo (X_2) tem distribuição normal com média μ_2 = 1,4800 in e desvio padrão σ_1 = 0,0040 in.

    a. Quando as duas partes são montadas, ocorrerá interferência se o diâmetro do eixo for maior do que o diâmetro do mancal ($X_1 - X_2 < 0$). Qual a probabilidade de interferência? *Resp.: $\Phi(-4,47)$ = 4 ppm.*
    b. Defina uma folga mínima (C), tal que P{folga < C} = α. Dessa maneira, C se torna a tolerância natural para a montagem e pode ser comparada com a especificação do planejamento. Determine C se estabelecermos α = 0,0001 (i.é, apenas 1 em 10.000 montagens ou 100 ppm terá folga inferior ou igual a C). *R.: 0,034 in.*

14. Forma-se uma montagem de duas peças adaptando-se um eixo em um mancal. Sabe-se que os diâmetros internos dos mancais são distribuídos normalmente com média 2,010 cm e desvio-padrão 0,002 cm, e que os diâmetros externos dos eixos têm distribuição normal com média 2,004 cm e desvio-padrão 0,001 cm.

    a. Determine a distribuição da folga entre as peças se a montagem é aleatória. *R.:* Normal com média 0,006 e desvio-padrão $5x10^{-6}$.
    b. Qual a probabilidade de a folga ser positiva? *R.: 0,9963548.*

15. Duas unidades geradoras A e B operam em paralelo para atender as necessidades de uma pequena cidade. A demanda de energia elétrica está sujeita a uma considerável flutuação e sabe-se que cada unidade tem capacidade em 75% dos casos de poder atender sozinha a necessidade total de energia da cidade caso a outra unidade falhe. As falhas em cada unidade ocorrem segundo uma distribuição exponencial com taxa de 0,005 falhas por dia. Supondo independência na ocorrência de falhas nas duas unidades geradoras, qual a confiabilidade do sistema para os próximos 30 dias? *R.: 0,92065.*

16. Qual é a confiabilidade (probabilidade de o sistema ter pelo menos um caminho disponível) dos circuitos da Figura 1? Supõe-se que todos os componentes funcionam independentemente, com probabilidade igual a 2/3. *R.: 0,7572.*

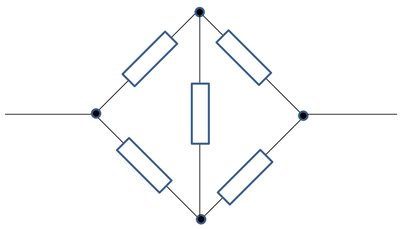

Figura 1

17. (Meyer[3] – Exercício 11.1, pág. 279) Suponha que T, a duração até falhar de uma peça, seja normalmente distribuída com E(T) = 90 horas e desvio-padrão 5 horas. Quantas horas de operação deverão ser consideradas, a fim de achar uma confiabilidade de 0,90; 0,95; 0,99? *R.: 83,59 h; 81,78 h; 78,37 h.*

18. Certo tipo de componente eletrônico tem uma taxa de falhas constante $\lambda = 5 \times 10^{-8}$ falhas por hora.
    a. Qual o tempo médio de ocorrência de uma falha? *R.: 2×10^{7} horas.*

   b. Qual é a probabilidade de este componente falhar após o tempo de uso determinado no item anterior? *R.: 0,36788.*
   c. Qual o tempo para o qual a confiabilidade é de 50%? *R.: 13.862.944 horas.*

19. (Meyer[3] – Exercício 11.7, pág. 280) Cada um de seis componentes de um equipamento eletrônico tem uma duração de vida (em anos) que pode ser considerada uma variável aleatória. Suponha que esses componentes funcionem independentemente um do outro. Qual será a probabilidade de que nenhum componente tenha de ser substituído, durante os dois primeiros meses de serviço. Sabe-se que a função de densidade de probabilidade da duração até falhar é $f(t) = 50t\,\mathrm{e}^{-25t^2}$, $t > 0$ e $0, t \leq 0$. *R.: 0,0155.*
20. (Meyer[3] – Exercício 11.10, pág. 280) Três componentes, que funcionem independentemente, são ligados em um sistema único, como indicado na Figura 2. Suponha que a confiabilidade de cada um dos componentes, para um período de operação de t horas, seja dada por $R(t) = \mathrm{e}^{-0{,}03t}$, $t > 0$.
   a. Se T for a duração até falhar do sistema completo (em horas), qual será a função de densidade de probabilidade de T? *R.:* $f(t) = 0,12\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} - 0,09\,\mathrm{e}^{-0{,}09t}$.
   b. Qual será a confiabilidade do sistema? *R.:* $R(t) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}06t} - \mathrm{e}^{-0{,}09t}$.
   c. Como ela se compara a $\mathrm{e}^{-0{,}03t}$?

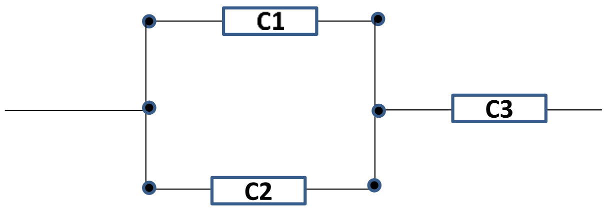

Figura 2

21. (Meyer[3] – Exercício 11.11, pág. 281) Suponha que n componentes, que funcionam independentemente, sejam ligados em série. Admita que a duração até falhar, de cada componente, seja normalmente distribuída, com esperança de 50 horas e desvio-padrão 5 horas.
   a. Se n = 4, qual será a probabilidade de que o sistema ainda esteja funcionando depois de 52 horas de operação? *R.: 0,0141.*
   b. Se n componentes forem instalados em paralelo, qual deverá ser o valor de n, para que a probabilidade de falhar durante as primeiras 55 horas seja aproximadamente igual a 0,01? *R.: n = 27.*
22. (Meyer[3] – Exercício 11.15, pág. 282) Suponha que n componentes sejam ligados em série. A seguir, k dessas conexões em série são ligadas em paralelo para formar um sistema completo (Veja a Figura 3).
   a. Se todos os componentes tiverem a mesma confiabilidade, R, para um dado período de operação, determine a expressão da confiabilidade do sistema completo (para o mesmo período de operação). *R.:* $R_S = [1 - (1 - R)^k]^n$
   b. Suponha que cada um dos componentes acima obedeça a um modelo de falhas exponencial, com taxa de falhas 0,05. Suponha também, que o tempo de operação seja 10 horas e que n = 5. Determine qual o valor de

k, de maneira que a confiabilidade do sistema completo seja igual a 0,99. *R.: k = 54.*

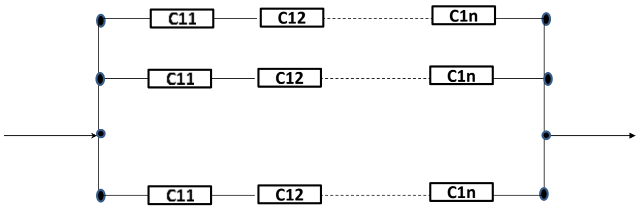

Figura 3

23. (Meyer[3] – Exercício 11.18, pág. 282) O sistema de propulsão de uma aeronave é constituído de três motores. Suponha que a taxa de falhas constante (modelo exponencial) de cada motor seja $\lambda = 0{,}0005$ e que cada motor falhe independentemente dos demais. Os motores são montados em paralelo.
    a. Qual será a confiabilidade deste sistema de propulsão, para uma missão que exija 10 horas, quando ao menos dois motores devam sobreviver (não devem falhar)? *R.: 0,999926.*
    b. Responda o item anterior, para uma missão que exija 100 horas; 1.000 horas. *R.: 0,9931; 0,6574.*
24. (Devore[4] – 62, pág. 212) A fabricação de um componente requer três operações diferentes de usinagem. O tempo de usinagem de cada operação possui distribuição normal e os três tempos são independentes um do outro. Os valores médios são 15, 30 e 20 minutos, respectivamente e os desvios padrão são 1, 2 e 1,5 minutos, respectivamente. Qual é a probabilidade de a usinagem levar no máximo uma hora para produzir um componente selecionado aleatoriamente? *R.: 0,314.*
25. (Devore[4] – 73, pág. 213) Suponha que a resistência à tração esperada do aço tipo A seja 105 ksi e que o desvio-padrão da resistência à tração seja 8 ksi. Para o aço B, suponha que a resistência à tração esperada e o desvio-padrão da resistência à tração sejam 100 ksi e 6 ksi, respectivamente. Considere $\bar{X}$= a resistência à tração média de uma amostra aleatória de 40 espécimes tipo A e $\bar{Y}$ = a resistência à tração média de uma amostra aleatória de 35 espécimes tipo B.
    a. Qual é a distribuição aproximada de $\bar{X}$? De $\bar{Y}$? *R.: Aproximadamente normais.*
    b. Qual é a distribuição aproximada de $\bar{X} - \bar{Y}$? Justifique sua resposta. *R.:* aproximadamente normal, com média 5 e desvio-padrão 1,621.
    c. Calcule (aproximadamente) $\mathrm{P}\{|\bar{X} - \bar{Y}| \leq 1\}$. *R: 0,0068.*
    d. Calcule $\mathrm{P}\{\bar{X} - \bar{Y} \geq 10\}$. Se você observou realmente que $\{\bar{x}_{\text{obs}} - \bar{y}_{\text{obs}} \geq 10\}$, você duvidaria que $\mu_1 - \mu_2 = 5$? *R.:* 0,0010. Sim (justifique!)

Referências:

(1) MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. *Estatística aplicada à engenharia*. 2ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
(2) MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros*. 5ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
(3) MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. 2ª. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

(4) DEVORE, J. L. *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências*. 8ª. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.