Lista nº 2 – Distribuições Amostrais e Estimação Pontual

1. (Montgomery – Exercício 7.13, pág. 154). Uma amostra aleatória de tamanho $n_1 = 16$ é selecionada de uma população normal, com uma média de 75 e um desvio-padrão de 8. Uma segunda amostra aleatória de tamanho $n_2 = 9$ é retirada de outra população normal, com média 70 e desvio-padrão 12. Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ duas médias amostrais. Encontre:
   a. A probabilidade de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ exceder 4.
   R.: 0,5885.
   b. A probabilidade de $3,5 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 5,5$.
   R.: 0,1759.
2. (Montgomery – Exercício 7.15, pág. 155). A elasticidade de um polímero é afetada pela concentração de um reagente. Quando baixa concentração é usada, a média verdadeira da elasticidade é 55, e quando é usada alta concentração, a elasticidade média é 60. O desvio-padrão da elasticidade é 4, independente da concentração. Se duas amostras aleatórias de tamanho 16, forem retiradas, encontre a probabilidade de $\bar{X}_{\text{alta}} - \bar{X}_{\text{baixa}} \geq 2$.
   R.: 0,983.
3. (Montgomery – Exercício 7.23, pág. 158) Suponha que $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ sejam estimadores do parâmetro θ. Sabemos que $\mathrm{E}[\hat{\theta}_1] = \theta$, $\mathrm{E}[\hat{\theta}_2] = \theta/2$, $\mathrm{Var}[\hat{\theta}_1] = 10$ e $\mathrm{Var}[\hat{\theta}_2] = 4$.
   a. Qual é o melhor estimador?
   b. Em que sentido ele é melhor?
4. (Montgomery – Exercício 7.29, pág. 159) Dados sobre a espessura de óxido de semicondutores são os seguintes: 425, 431, 416, 419, 421 436, 418, 410, 431, 433, 423, 426, 410, 435, 436, 428, 411, 426, 409, 437, 422, 428, 413, 416.
   a. Calcule a estimativa pontual da média da espessura do óxido para todas as pastilhas na população. *R.:* 423,33
   b. Calcule a estimativa pontual do desvio-padrão da espessura do óxido para todas as pastilhas na população. *R.:* 9,08
   c. Calcule o erro-padrão da estimativa pontual do item (a). *R.:* 1,85
   d. Calcule a estimativa pontual da mediana da espessura do óxido para todas as pastilhas na população. *R.:* 424
   e. Calcule a estimativa pontual da proporção de pastilhas na população que tem uma espessura de óxido maior do que 430 angstroms. *R.:* 0,2917
5. (Montgomery – Exercício 7.39, pág. 165) Sejam X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo 0 a a.
   a. Mostre que o estimador de momentos de a é $\hat{a} = 2\bar{X}$.
   b. Ele é tendencioso?
   c. Discuta quão razoável é esse estimador.
6. (Montgomery – Exercício 7.60, pág. 166) Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. São dadas duas amostras aleatórias independentes de tamanhos n_1 e n_2, com médias amostrais $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$,
   a. Mostre que $\bar{X} = a\bar{X}_1 + (1-a)\bar{X}_2$, $0 < a < 1$, é um estimador não tendencioso para μ.
   b. Se $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ forem independentes, encontre o valor de a que minimiza o erro padrão de $\bar{X}$.

7. (Montgomery – Exercício 7.41, pág. 165) A distribuição de Rayleigh tem função de densidade de probabilidade:
$$f(x;\theta) = \frac{x}{\theta}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\theta}}\,,\ x > 0,\ 0 < \theta < \infty.$$
   a. Pode ser mostrado que $E[X^2] = 2\theta$. Use essa informação para construir um estimador não tendencioso para θ.
   b. Encontre um estimador de máxima verossimilhança de q. Compare sua resposta com o item (a).
   c. Use a propriedade de invariância do estimador de máxima verossimilhança para encontrar o estimador de máxima verossimilhança da mediana da distribuição de Rayleigh.
8. (Montgomery – Exercício 7.61, pág. 166) Uma variável aleatória X tem uma função densidade de probabilidade:
$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta^3}x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\,,\ 0 < x < \infty,\ 0 < \theta < \infty.$$

Encontre o estimador de máxima verossimilhança para θ.