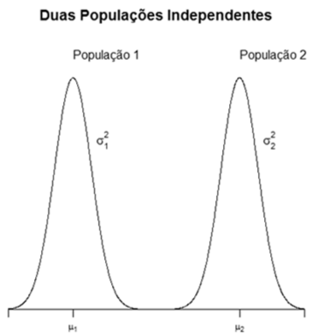
Inferência Estatística para Duas Amostras

Roteiro

Introdução

Situação Geral

- População 1:
  - √ Média μ_1 e variância σ_1^2.
  - √ Amostra de tamanho n_1.
    - $X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n1}$.
- População 2:
  - √ Média μ_2 e variância σ_2^2.
  - √ Amostra de tamanho n_2.
    - $X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n2}$.



- Suposições:
  - √ As duas populações (X_1 e X_2) são independentes
  - √ Ambas as populações são normais
    - Se elas não forem normais, há condições para a aplicação do Teorema Central do Limite
- Objetivo:
  - √ Estudar a diferenças em parâmetros das 2 populações

- Aplicação – Experimento planejado:
  - √ Comparar condições diferentes (deliberadas e propositais), verificando se elas produzem efeitos estatísticos na resposta
  - √ Condições são chamadas **tratamentos**.
- Experimento comparativo:
  - √ Controlam-se os tratamentos e observa-se a variação na variável resposta.
- Relação de causa-e-efeito
  - √ Verifica-se significância estatística em resposta de experimento aleatório
  - √ Conclusão:
    - Diferença nos tratamentos resultou na diferença na resposta

Exemplo

- Experimento completamente aleatorizado:
  - √ Duas formulações de tintas
  - √ Resposta: tempo de secagem
  - √ Objetivo do estudo:
    - Nova formulação resulta em efeito significativo?
  - √ Amostras
    - 10 espécimes de teste a cada uma das formulações
  - √ Procedimento:
    - Aplicação aleatória das formulações nos 20 espécimes

- Aplicação – Estudo observacional:
  - √ Avaliam se há associação entre um determinado fator e uma resposta, sem, entretanto, intervir diretamente na relação analisada.
  - √ Indivíduos da amostra não foram designados aos grupos por processo aleatório, mas já estavam classificados nos respectivos grupos, no início da pesquisa.

Exemplo

- Níveis de ferro no corpo e risco cardíaco
  - √ Amostra de 1931 homens
  - √ Rastreamento ao longo de 5 anos
  - √ Verificação de efeito significativo de níveis crescentes de ferro na incidência de ataques cardíacos
  - √ Comparada incidência de ataques cardíacos nos grupos (tratamentos): "nível baixo de ferro" e "nível alto de ferro"
  - √ Os indivíduos não foram alocados aleatoriamente em cada grupo
- Diferença no risco cardíaco pode ser atribuída a outro fator fundamental (colesterol, por exemplo)

- Relação de causa-e-efeito
  - √ Difícil identificar causalidade
    - – Diferença estatisticamente observada na resposta pode ser devida a algum outro fator (ou grupo de fatores) não devido aos tratamentos que não foi equalizado pela aleatorização.

Inferência na Diferença de Médias – População Normal com Variâncias Conhecidas

Suposições

- Amostras:
  - √ População 1: $X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n1}$.
  - √ População 2: $X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n2}$.
- Populações (X_1 e X_2) independentes
- Populações normais
- Variâncias conhecidas (σ_1^2 e σ_2^2)
- Objetivo
  - √ Inferência estatística para diferença de médias $\mu_1 – \mu_2$.

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Estimador natural: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$
- Esperança: $\mathrm{E}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$
- Variância: $\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- A grandeza: $Z = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

  tem distribuição normal padrão

Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z_0 < -z_{\alpha}$.

Exemplo 5-1

- Tempo de secagem de uma tinta:
  - √ Deseja-se reduzir tempo de secagem de um zarcão
  - √ Formulações testadas:
    1. Química-padrão
    2. Acrescentado novo ingrediente para secagem
  - √ σ = 8 min. (dados históricos)
    - Variabilidade não deve ser afetada por novo ingrediente
  - √ Amostras:
    - Formulação 1: 10 espécimes
    - Formulação 2: 10 espécimes
  - √ Os 20 espécimes são pintados em ordem aleatória

- Dados amostrais:
  - √ Tempos médios de secagem:

Química-padrão		Formulação nova	
n_1	$\bar{x}_1$	n_2	$\bar{x}_2$
10	121 min.	10	112 min.

- Quais conclusões sobre a eficiência do novo ingrediente?
  - √ Nível de significância do teste (α): 5%

- Procedimento de teste:
  1. Grandeza de interesse: diferença nos tempos médios de secagem ($\mu_1 - \mu_2$) e $\Delta_0 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 > \mu_2$. Rejeição H_0 se fórmula 2 reduzir tempo
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$
  6. Rejeite H_0 se $z_0 > z_{0,05} = 1{,}645$
  7. Estatística de teste observada: $$z_0 = \frac{121 - 112}{\sqrt{\frac{(8)^2}{10} + \frac{(8)^2}{10}}} = 2{,}52$$
  8. Conclusão:
     - $z_0 = 2{,}52 > 1{,}645$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Concluímos, com $\alpha = 5\%$, que a adição do novo ingrediente à tinta reduz significativamente o tempo de secagem.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 > \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 2{,}52$

```
MTB > CDF 2,52;
SUBC> Normal.

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

   x   P( X <= x )
2,52      0,994132
```

  - √ $p = P\{Z > 2{,}52\} = 1 - \Phi(2{,}52) = 1 - 0{,}9941 = 0{,}0059$
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0059$

- Saída:

Limite inferior com 95% de confiança

Estatística z_0

```
One-San
Test of mu = 0 vs > 0
The assumed standard deviation = 11,3137

                     95%
                    Lower
 N  Mean  SE Mean   Bound     Z      P
10  9,00     3,58    3,12  2,52  0,006
```

  - √ Limite inferior com 95% de confiança excede 0
    - Rejeita-se H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, concluindo-se que H_1: $\mu_1 > \mu_2$ é verdadeira
    - Valor-p confirma conclusão

Erro Tipo II e Tamanho de Amostra

- Suposições:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ é falsa
  - √ Diferença verdadeira é $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$. $\Delta > \Delta_0$.
- Interesse:
  - √ Obter tamanho de amostra que leve a um valor específico de probabilidade de erro tipo II, β, para uma dada diferença de médias Δ, com um nível de significância α.

- Expressão para o erro β para a alternativa bilateral

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$

√ Cálculo de tamanho de amostra é similar ao caso de uma única amostra

- Tamanho de amostra para um teste bilateral para a diferença de médias, com $n_1 = n_2$ e variâncias conhecidas

√ Diferença verdadeira nas médias: Δ.

√ Poder de no mínimo 1 – β.

$$n \approx \frac{(z_\beta + z_{\alpha/2})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\Delta - \Delta_0)^2}$$

√ A expressão de β pode ser obtida para o caso em que $n = n_1 = n_2$.

Exemplo 5-2

- Tempo de secagem de uma tinta

√ Diferença verdadeira nos tempos de secagem tão grande quanto 10 minutos

(Δ = 10)

√ Poder do teste de no mínimo 0,9, com α = 5%

√ Determinação tamanho amostra:

$$n \approx \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\Delta - \Delta_0)^2} = \frac{(1,645 + 1,28)^2[(8)^2 + (8)^2]}{(10 - 0)^2} = 11$$

- $z_\alpha = z_{0,05} = 1{,}645$ e $z_\beta = z_{0,10} = 1{,}28$

- Saída – Minitab

√ Dados:

- Diferença: 10
- Poder: 0,90
- Nível de significância (α): 5%

Power and Sample Size

```
1-Sample Z Test

Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 11,3137

            Sample  Target
Difference    Size   Power  Actual Power
        10      11     0,9      0,900893
```

Teste para Amostras Grandes

- Na maioria das situações práticas:
  - √ σ_1^2 σ_2^2 são desconhecidas.
  - √ Não podemos estar certo que a população seja bem modelada por uma distribuição normal
- Se as amostras forem grandes (n_1 e n_2 > 40):
  - √ Pode-se substituir σ_1 e σ_2 pelos desvios-padrão amostrais s_1 e s_2.
  - √ Usa-se a estatística Z_0 para teste de hipótese sobre média da população
    - Baseado no Teorema Central do Limite (TCL)

- Determinação intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$
  - √ Para amostras provenientes de populações normais com variâncias conhecidas:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ então:

$$\mathrm{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left\{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Conhecidas

- Seja $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas.
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com α/2(100)% da normal padrão

Exemplo 5-3

- Resistência à tensão no alumínio:
  - √ Testes de resistência à tensão em dois tipos diferentes de estruturas de alumínio usadas na fabricação de asas de avião
  - √ Desvios-padrão considerados conhecidos:
    - Experiências passadas com processo de fabricação e testes
    - $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 1,5$
  - √ Dados amostrais obtidos:

Estrutura 1		**Estrutura 2**	
n_1	$\bar{x}_1$	n_2	$\bar{x}_2$
10	87,6	12	74,5

√ Intervalo de 90% de confiança para a diferença da resistência média $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$87,6 - 74,5 \pm 1,645\sqrt{\frac{(1)^2}{10} + \frac{(1,5)^2}{12}} = 13,1 \pm 0,882$$

√ Intervalo com 90% de confiança para a resistência média à tensão (kgf/mm²)

$$[12,128 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 13,982$$

- Conclusões:
  - √ O intervalo de confiança não inclui o zero
    - É significativa a diferença entre a resistência média das estruturas 1 e 2.
  - √ Estamos 90% confiantes que a resistência média da estrutura 1 excede a resistência média da estrutura 2 por um valor entre 12,22 e 13,98 kgf/mm².

Escolha do Tamanho da Amostra

- Se os desvios-padrão σ_1 e σ_2 forem conhecidos e os dois tamanhos das amostras n_1 e n_2 forem iguais ($n_1 = n_2 = n$)
  - √ Determinação do tamanho das amostras de modo que o erro em estimar $\mu_1 - \mu_2$ seja menor que E com uma confiança $100(1 - \alpha)\%$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\mathrm{E}}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- Deve ser arredondado para mais se *n* não for um inteiro

Limites Unilaterais de Confiança

- Limites unilaterais com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para $\mu_1 - \mu_2$, com variâncias conhecidas
  - √ Estabelecer $l = -\infty$ ou $u = \infty$
  - √ Trocar $z_{\alpha/2}$ por z_α.
- Limite superior de confiança:

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Limite inferior de confiança:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2$$

Inferência na Diferença de Médias – Populações Normais com Variâncias Desconhecidas

Inferência na Diferença de Médias de Populações com Variâncias Desconhecidas

- Variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas
  - √ Se n_1 e n_2 > 40 utilizam-se procedimentos anteriores
  - √ Se são retiradas **pequenas amostras** de populações **normais**:
    - Caso 1: Homocedasticidade
      Variâncias iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)
    - Caso 2: Heterocedasticidade
      Variâncias diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)
    - Testes e intervalos de confiança baseados na distribuição t.

Caso 1 – Variâncias Iguais

- Suponha 2 populações **normais** independentes com médias desconhecidas μ_1 e μ_2 e variâncias **desconhecidas**, porém iguais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
- Hipóteses:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

  H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$
- Nível de significância do teste: α.

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Estimador natural: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$
- Esperança: $\mathrm{E}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$
- Variância:

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

- Como estimar a variância desconhecida σ^2?
  - √ Há duas amostras de populações diferentes, porém com mesma variância

Estimador Combinado de σ^2

- Parece razoável combinar as duas variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2.
  - √ Como?
- Estimador combinado de σ^2:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

  - √ S_p^2 pode ser escrito como uma média ponderada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)}{n_1+n_2-2}S_1^2 + \frac{(n_2-1)}{n_1+n_2-2}S_2^2 = w\,S_1^2 + (1-w)\,S_2^2$$

    - Os pesos dependem do tamanho das amostras
    - Se $n_1 = n_2$, então w = 0,5 e S_p^2 será a média aritmética entre S_1^2 e S_2^2.

- Sabemos que:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ Substituindo σ por S_p, temos:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

Teste t Combinado para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$\lvert t_0\rvert > t_{\alpha/2,\ (n1+n2-2)}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,\ (n1+n2-2)}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,\ (n1+n2-2)}$.

Exemplo 5-4

- Rendimento de catalisador
  - √ Análise de influência de dois catalisadores no rendimento médio de processo químico
    - Catalisador 1: em uso
    - Catalisador 2: aceitável e mais barato
      (deve ser usado se não mudar rendimento do processo)
  - √ Há alguma diferença entre os rendimentos médios?
    - Nível de confiança (α): 5%

- Dados amostrais:
  - √ Rendimento de catalisadores

Catalisador 1			Catalisador 2		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$	s_2
8	92,255	2,39	8	92,733	2,98

  - √ Cálculo do desvio-padrão combinado

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(7)(2,39)^2+(7)(2,98)^2}{8+8-2}}$$
$$= \sqrt{7,30} = 2,70$$

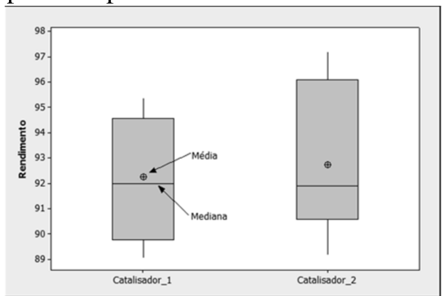
- Procedimento de teste:
  1. Grandeza de interesse: diferença nos rendimentos médios de processo $(\mu_1 - \mu_2)$ e $\Delta_0 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Rejeição H_0 se catalizador 2 alterar rendimento
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$
  6. Rejeite H_0 se $|t_0| > t_{0,025;\,14} = 2,145$
  7. Estatística de teste observada: $t_0 = \dfrac{92,255 - 92,733}{2,70\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = -0,35$
  8. Conclusão:
     - $|t_0| = 0,35 < 2,145$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0
     - Concluímos, com $\alpha = 5\%$, que não temos evidência forte pra concluir que o catalisador 2 altera rendimento do processo.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $t_0 = 0,35$

```
MTB > CDF 0,35;
SUBC>
SUBC> t 14.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 14 DF

   x  P( X <= x )
0,35     0,634226
```

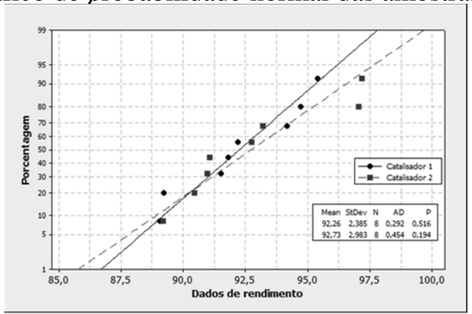
  - √ $p = 2\,P\{t_{14} > 0,35\} = 2(1 - 0,6342) = 0,7316$
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ não pode ser rejeita a um nível $\alpha = 5\%$

- Análise gráfica:
  - √ Box-plot comparando resultados dos catalisadores



  - √ Não aparenta haver diferença entre os catalisadores.
  - √ Catalisador 2 tem variabilidade ligeiramente maior

√ Gráfico de probabilidade normal das amostras



- Os gráficos de probabilidade normal (e p-valor) indicam que não há problema com a suposição de normalidade
- Indicação de homocedasticidade.
  (Ambas as linhas têm inclinações similares)
- Como verificar formalmente a homocedasticidade?

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste t combinado

Two-Sample T-Test and CI: catalisador_1; catalisador_2

```
Two-sample T for catalisador_1 vs catalisador_2

                N   Mean  StDev  SE Mean
catalisador_1   8  92,26   2,39     0,84
catalisador_2   8  92,73   2,98      1,1

Difference = mu (catalisador_1) - mu (catalisador_2)
Estimate for difference:  -0,48
95% CI for difference:  (-3,37; 2,42)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -0,35  P-Value = 0,729  DF = 14
Both use Pooled StDev = 2,7009
```

IC 95%

S_p

√ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.

√ zero pertence ao intervalo com 95% de confiança.

- Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Caso 2 – Variâncias Diferentes

- Suponha duas populações **normais** independentes com médias desconhecidas μ_1 e μ_2 e variâncias **desconhecidas**, porém diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Não existe um valor exato da estatística t
  - √ Pode-se aplicar um resultado aproximado
  - √ Estatística T*
    - Teste T similar àquele do caso de homocedasticidade
    - Graus de liberdade da t são trocados
      (υ ao invés de $n_1 + n_2 - 2$)

Teste t – Variâncias Desconhecidas e Desiguais

- Supondo H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ verdadeira:

√ Estatística de teste: $T_0^* = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

√ Distribuição amostral: $T_0^* \sim \mathrm{t}_\nu$

- Graus de liberdade: $\nu = \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$
- Para υ não inteiro, arredonde para menor inteiro mais próximo (mais conservativo para rejeitar H_0)
  (pacotes estatísticos calculam com valores não inteiros)

Exemplo 5-4

- Fabricante de unidades de vídeos desenvolve dois projetos de microcircuitos.
  - √ Amostras:
    - 15 unidades do microcircuito 1
    - 10 unidades do microcircuito 2
  - √ Interesse:
    - Verificar se os dois projetos de microcircuitos produzem correntes médias equivalentes, a um nível de significância α=10%

- Dados amostrais:
  - √ Concentração de arsênio em água potável

Projeto 1			Projeto 2		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1^2	n_2	$\bar{x}_2$	s_2^2
15	24,2	10	10	23,9	20

  - √ Gráfico de probabilidade normal dos dados
  - √ Suposições:
    - Ambas as populações são normais
    - As variâncias desconhecidas não são iguais
    (O fabricante não está disposto a admitir homocedasticidade)

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: correntes médias dos 2 projetos de microcircuitos, μ_1 e μ_2. Interesse: determinar se $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  4. $\alpha = 0{,}10$
  5. Estatística de teste: $T_0^* = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$
  6. Rejeite H_0 se $|t_0^*| > t_{0,05;\,14} = 1{,}761$ $\quad \nu = 14,93 \approx 14$
  7. Estatística de teste observada: $t_0^* = \dfrac{24,2 - 23,9}{\sqrt{\frac{10}{15} + \frac{20}{10}}} = 0,18$
  8. Conclusão:
     - $|t_0^*| = 0{,}18 < 1{,}761$ ➔ Somos incapazes de rejeitar H_0, com $\alpha = 10\%$
     - Ou seja, não há forte evidência indicando que a corrente média seja diferente nos dois projetos de microcircuitos.

- Cálculo dos graus de liberdade desvio-padrão combinado

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{10}{15} + \frac{20}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{10}{15}\right)^2}{14} + \frac{\left(\frac{20}{10}\right)^2}{9}}$$

$$= 14,933 \approx 14$$

- Valor crítico para teste bilateral com $\alpha = 5\%$
  - √ Graus de liberdade aproximados: $t_{0,05;\,14} = 1{,}76131$
  - √ Graus de liberdade conforme cálculo: $t_{0,05;\,14,93} = 1{,}75359$

- Cálculo do p-valor:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $|t_0| = 0{,}18$
  - √ $p = 2\,P\{t_{14} > 0{,}18\}$
    - Tabela: $2(0{,}40) < p < 2(0{,}50) \Rightarrow 0{,}8 < p < 1{,}0$
    - Minitab: p = 0,859732
  - √ $p = 2\,P\{t_{14,933} > 0{,}18\} = 0{,}8595724$ (R)
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ não é rejeitada a qualquer nível $\alpha < 85\%$

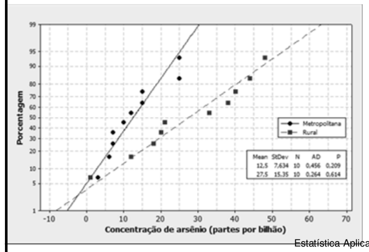
Exemplo 10-6

- Arsênio em água
  - √ Concentração de arsênio em suprimentos públicos de água é risco potencial à saúde
  - √ Amostras:
    - 10 comunidades metropolitanas
    - 10 comunidades rurais
  - √ Interesse:
    - Determinar se há alguma diferença nas concentrações (ppb) médias de arsênio entre os dois grupos de comunidades

- Dados amostrais:
  - √ Concentração de arsênio em água potável

Região metropolitana			Região rural		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$	s_2
10	12,5	7,63	10	27,5	15,3

  - √ Gráfico de probabilidade normal dos dados



- Suposição de normalidade aparenta estar atendida
- Improvável que variâncias da população sejam iguais
  - √ Inclinações muito diferentes

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: concentrações médias de arsênio, μ_1 e μ_2. Interesse: determinar se $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  4. $\alpha = 0{,}05$ (digamos) $T_0^* = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$
  5. Estatística de teste:
  6. Rejeite H_0 se $|t_0^*| > t_{0{,}025;\,13} = 2{,}160$ $\nu = 13{,}2 \approx 13$
  7. Estatística de teste observada: $t_0^* = \dfrac{12{,}5 - 27{,}5}{\sqrt{\frac{(7{,}63)^2}{10} + \frac{(15{,}3)^2}{10}}} = -2{,}77$
  8. Conclusão:
     - $|t_0^*| = 2{,}77 > 2{,}160 \Rightarrow$ Rejeitamos H_0
     - Há evidência para concluir, com $\alpha = 5\%$, que a concentração média de arsênio na água potável na zona rural do Arizona é diferente daquela da área metropolitana.

- Cálculo dos graus de liberdade desvio-padrão combinado

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{(7,63)^2}{10} + \frac{(15,3)^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(7,63)^2}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{(15,3)^2}{10}\right)^2}{9}}$$

$$= 13,2 \approx 13$$

- Valor crítico para teste bilateral com $\alpha = 5\%$
  - √ Graus de liberdade aproximados: $t_{0,025;\,13} = 2,160$
  - √ Graus de liberdade conforme cálculo: $t_{0,025;\,13,2} = 2,157$

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $|t_0| = 2,77$

```
MTB > CDF 2,77;
SUBC> t 13,2.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 13,2 DF

   x  P( X <= x )
2,77     0,992135
```

  - √ p = 2 P{$t_{13,2}$ > 2,77} = 2(1 – 0,9921) = 0,0158
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ é rejeitada a um nível $\alpha = 5\%$
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ não é rejeitada a um nível $\alpha = 1\%$

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste t combinado

```
Two-Sample T-Test and CI: concentracao_met; concentracao_rur

Two-sample T for concentracao_met vs concentracao_rur

                  N   Mean  StDev  SE Mean
concentracao_met  10  12,50   7,63      2,4
concentracao_rur  10   27,5   15,3      4,9


Difference = mu (concentracao_met) - mu (concentracao_rur)
Estimate for difference:  -15,00
95% CI for difference:  (-26,71; -3,29)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -2,77  P-Value = 0,016  DF = 13
```

IC 95%

p-valor aproximado similar ao calculado

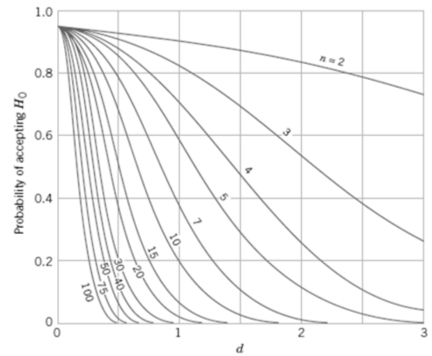
  - √ Valor-p confirma conclusão de rejeitar H_0 a um nível $\alpha = 5\%$.
  - √ zero não pertence ao intervalo com 95% de confiança.
    - Limite superior bem abaixo de zero
    - Há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Erro Tipo II e Tamanho da Amostra

- Curvas Características de Operação:
  - √ Gráficos VII*e*, VII*f*, VII*g* e VII*h* – Apêndice
  - √ Curvas para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$
  - √ Usadas quando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$.
    - Quando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ a distribuição de T_0^* será desconhecida para H_0 falsa.
  - √ Parâmetro d: $d = \frac{|\Delta - \Delta_0|}{2\sigma}$
    - Δ: diferença verdadeira entre as médias populacionais.
  - √ Tamanho da amostra (n*): $n^* = 2n - 1$
    - Para utilizar curvas CO, considerar $n = n^*$.

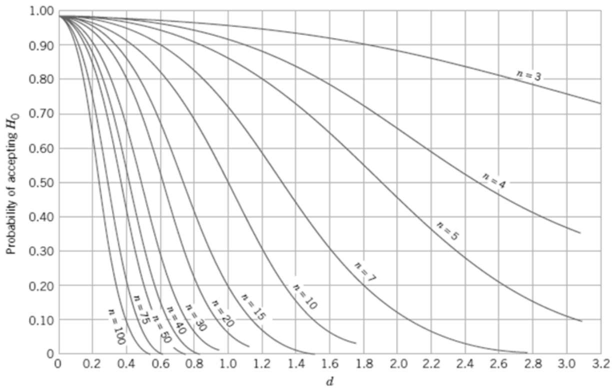
- Como no teste *t* para uma única amostra, podemos:
  - √ Utilizar de estimativa prévia de σ^2 através de experimento piloto
  - √ Usar da variância amostral s^2 para estimar σ^2.
    - Para avaliar desempenho do teste após coleta dos dados
  - √ Definir a diferença que ser quer detectar relativa a σ.
    - Caso não haja experiência prévia que possa ser usada

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



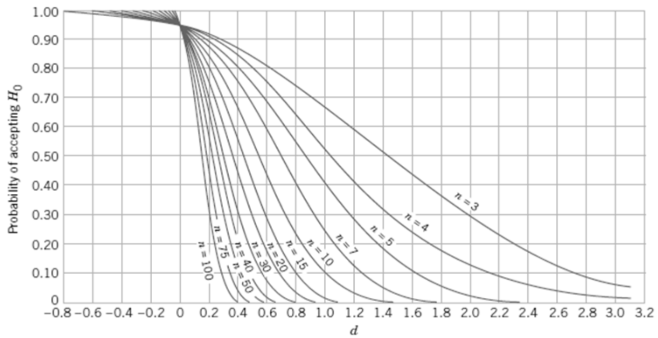
(*e*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,01$



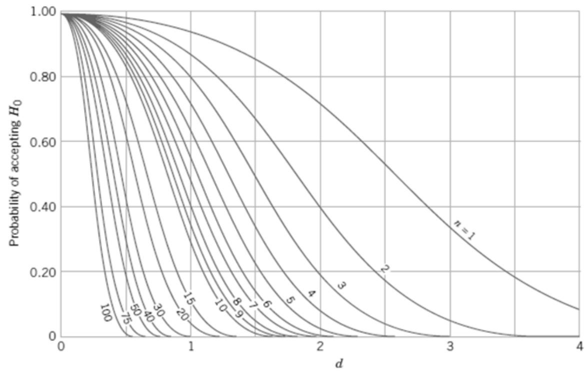
(*f*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



(*g*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0{,}01$



(b) O.C. curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

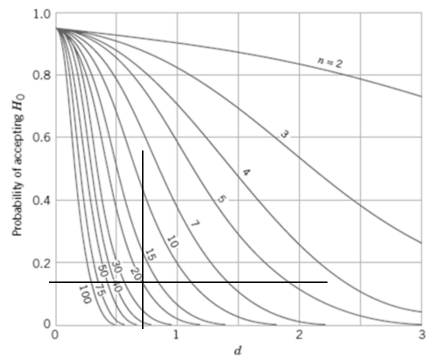
Exemplo 5-6

- Rendimento de catalisador
  - √ Influência de dois catalisadores no rendimento médio de processo químico
    - Catalisador 1: em uso
    - Catalisador 2: aceitável e mais barato
      (deve ser usado se não mudar rendimento do processo)
  - √ Nível de confiança do teste (α): 5%
  - √ Qual tamanho de amostra para rejeição de H_0 se catalisador 2 produzir rendimento médio que difira 4% do rendimento médio do catalisador 1, com probabilidade de no mínimo 85%

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ vs. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
- Estimativa grosseira de σ(comum): $s_p = 2{,}70$
- Distância padronizada:

$$d = \frac{|\Delta|}{2\sigma} = \frac{4}{(2)(2,70)} = 0,74$$

- Probabilidade de erro tipo II: $\beta = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$



(e) O.C. curves for different values of n for the two-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- √ Determinação do tamanho das amostras:
  - $n^* = 20$ (leitura gráfica)
  - Tamanho das amostras: $n_1 = n_2 = n$

$$n = \frac{n^*+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10,5 \approx 11$$

- Saída – Minitab
  - √ Suposição de homocedasticidade.
  - √ Dados:
    - Diferença: 4
    - Poder: 0,85

```
Power and Sample Size

2-Sample t Test

Testing mean 1 = mean 2 (versus not =)
Calculating power for mean 1 = mean 2 + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 2,7

             Sample  Target
Difference     Size   Power  Actual Power
         4       10    0,85      0,879312

The sample size is for each group.
```

  - √ Tamanho amostras: $n = 10$.
- Os resultados concordam razoavelmente com aqueles obtidos por meio da curva CO.

Intervalo de Confiança para Diferença de Médias – Variâncias Desconhecidas

- Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
  - √ Distribuição da estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

  - √ então:

$$P\left\{-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \leq T \leq t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\right\} = 1 - \alpha$$

  - √ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para μ_1 e μ_2.

- Seja $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas, porém iguais
  - √ Intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Sendo:

- $t_{\alpha/2;\ n1+n2-2}$: percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade
- S_p: estimativa combinada de σ, desvio-padrão comum

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Exemplo 10-8

- Hidratação de cimento:
  - √ Análise do peso de cálcio em cimento-padrão e em cimento contendo chumbo
    - Níveis reduzidos de cálcio indicam bloqueio no mecanismo de hidratação no cimento
  - √ Grupos
    - 1: cimento-padrão ($n_1 = 10$)
    - 2: cimento com chumbo ($n_2 = 15$)
  - √ Parâmetros de interesse:
    - Teor médio percentual em peso de cálcio

- Dados amostrais:
  - √ Teor percentual em peso de cálcio

Cimento-padrão			Cimento c/ chumbo		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$	s_2
10	90,0	5,0	15	87,0	4,0

  - √ Suposições:
    - Teor percentual em peso é normalmente distribuído
    - Ambas as populações têm a mesma variância
  - √ Estimativa combinado do desvio-padrão

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(9)(5,0)^2+(14)(4,0)^2}{10+15-2}} = 4,42$$

- Intervalo de 95% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:
  - √ $t_{0,025;\,23} = 2,069$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{0,025;23}\, s_p\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{0,025;23}\, s_p\sqrt{\tfrac{1}{n_1}+\tfrac{1}{n_2}} =$$

$$90,0-87,0-2,069(4,42)\sqrt{\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}} \le \mu_1-\mu_2 \le 90,0-87,0+2,069(4,42)\sqrt{\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{15}} = -0,72 \le \mu_1-\mu_2 \le 6,72$$

  - √ Não podemos afirmar, com um nível de confiança de 95%, que a presença de chumbo afete esse mecanismo de hidratação
    - Nesse nível de confiança não podemos concluir que haja diferença entre as médias (intervalo inclui o zero)

Intervalo de Confiança para Diferença de Médias – Variâncias Desconhecidas

- Caso 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  - √ Distribuição da estatística de teste:

$$T^* = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

    - υ: graus de liberdade da distribuição t

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$$

  - √ Então:

$$\mathrm{P}\left\{-t_{\alpha/2,\nu} \le T^* \le t_{\alpha/2,\nu}\right\} = 1-\alpha$$

- Seja $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas e desiguais.
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le \bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

Sendo:

- $t_{\alpha/2;\,\upsilon}$: percentil superior com α/2(100)% da distribuição t com υ graus de liberdade (correção)

Teste *t* para Amostras Pareadas

Teste *t* Emparelhado

- As observações nas duas populações de interesse são coletadas em pares
  - √ Toma-se cada par (X_{1j}, X_{2j}) em condições homogêneas, mas elas podem mudar de um par para outro

Exemplo

- Dois tipos de ponteiras para teste de dureza
  - √ Máquina pressiona ponteira em corpo-de-prova metálico
  - √ Dureza está relacionada com profundidade de depressão
  - √ Teste t emparelhado:
    - mede-se dureza das duas ponteiras em mesmo corpo-de-prova
  - √ Qual a vantagem do procedimento em relação à comparação com amostras independentes?

- Importante:
  - √ Os espécimes metálicos muito provavelmente não serão homogêneos!
- Teste *t* combinado:
  - √ Diferença observada entre as leituras de dureza média para os dois tipos de ponteiras também inclui as diferenças de dureza entre os espécimes
- Teste t emparelhado:
  - √ Analisa diferença entre as leituras de dureza em cada espécime
  - √ Se não houver diferença entre as ponteiras, a média da diferença deveria ser zero

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Sejam (X_{11}, X_{21}), (X_{11}, X_{21}), ... (X_{1n}, X_{2n}) observações emparelhadas.
  - √ X_1: população normal com média μ_1 e variância σ_1^2.
  - √ X_2: população normal com média μ_2 e variância σ_2^2.
  - √ Diferença entre cada par de observações:
    - $D_j = X_{1j} - X_{2j}$, j = 1, 2, ..., n.
    - São normalmente distribuídas
    - Esperança de D_j: $\mu_D = \mathrm{E}[X_1 - X_2] = \mu_1 - \mu_2$
    - Variância de D_j: σ_D^2.

Teste t Pareado para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$
  - √ $\bar{D}$, S_D e n, são, respectivamente, média amostral e desvio-padrão amostral das n diferenças
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_D \neq \Delta_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\, n-1}$.
H_1: $\mu_D > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,\, n-1}$.
H_1: $\mu_D < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,\, n-1}$.

Exemplo 5-8

- Resistência para vigas de aço
  - √ Comparação de métodos de previsão de resistência ao cisalhamento em traves planas metálicas
  - √ Métodos: Karlruhe e Lehigh
  - √ Há diferença (na média) entre os dois métodos?

- Dados amostrais
  - √ Previsões de resistência para nove traves planas de aço
  - √ (carga prevista/carga observada)
    - Dados: *BD_producao.xlsx/ guia: cisalhamento*

Trave	Método		Diferença
	Karlsruhe	Lehigh	
S1/1	1,186	1,061	0,125
S2/1	1,151	0,992	0,159
S3/1	1,322	1,063	0,259
S4/1	1,339	1,062	0,277
S5/1	1,200	1,065	0,135
S2/1	1,402	1,178	0,224
S2/2	1,365	1,037	0,328
S2/3	1,537	1,086	0,451
S2/4	1,559	1,052	0,507

Estatísticas amostrais

$$\bar{d} = 0,2739$$
$$s_D = 0,1351$$

Correlations: Karlsruhe; Lehigh

```
Pearson correlation = 0,382
P-Value = 0,310
```

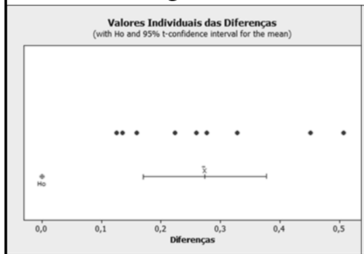
- Procedimento de teste:
  1. Parâmetro de interesse: diferença na resistência média a cisalhamento entre métodos: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$.
  2. H_0: $\mu_D = 0$.
  3. H_1: $\mu_D \neq 0$.
  4. $\alpha = 0{,}05$ (digamos)
  5. Estatística de teste: $$T_0 = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$
  6. Rejeite H_0 se $|t_0| > t_{0,025;\,8} = 2{,}306$
  7. Estatística de teste observada: $$t_0 = \frac{0,2739}{\frac{0,1351}{\sqrt{9}}} = 6,08$$
  8. Conclusão:
     - $|t_0| = 6{,}08 > 2{,}306$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Há evidência para concluir, com $\alpha = 5\%$, que os métodos de previsão da resistência fornecem resultados diferentes.

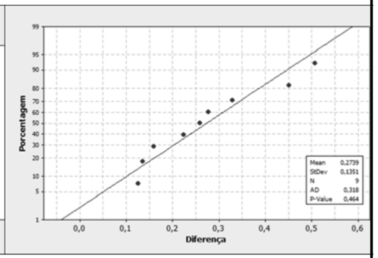
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_D \neq 0$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $|t_0| = 6{,}08$

```
MTB > CDF 6,08;
SUBC> t 8.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 8 DF

   x   P( X <= x )
6,08     0,999852
```

  - √ $p = 2\,P\{t_8 > 6{,}08\} = 2(1 - 0{,}99985) = 0{,}0003$
- Rejeita-se H_0: $\mu_D = 0$ em favor de H_1: $\mu_D \neq 0$, a um nível $\alpha = 5\%$

- Análise gráfica:





  - √ Gráfico de valores individuais indica existir diferença entre métodos.
    - Método 1 produz previsões maiores para a resistência
  - √ Não há evidência amostral para rejeitar a hipótese de normalidade das diferenças

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste t pareado

```
Paired T-Test and CI: Karlsruhe; Lehigh

Paired T for Karlsruhe - Lehigh

             N    Mean   StDev  SE Mean
Karlsruhe    9  1,3401  0,1460   0,0487
Lehigh       9  1,0662  0,0494   0,0165
Difference   9  0,2739  0,1351   0,0450

95% CI for mean difference: (0,1700; 0,3777)
T-Test of mean difference = 0 (vs not = 0): T-Value = 6,08  P-Value = 0,000
```

IC 95%

  - √ Valor-p confirma conclusão de rejeitar H_0.
  - √ Zero não pertence ao intervalo de confiança.
    - Há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  - √ Estimação intervalar da diferença:
    - Método de Karlsruhe produz, em média, previsões maiores para a a resistência que o método de Lehigh

Comparações Emparelhadas vs Independentes

- Comparações de duas médias populacionais:

	Independentes	Pareadas
Estatística de teste	$T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}$	$T_0 = \dfrac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$
Distribuição amostral	t_{2n-2}	t_{n-1}

√ Numeradores são idênticos

√ Denominadores:

- Estatística combinada: supõe amostras independentes
- Estatística pareada: há correlação (ρ) entre X_1 e X_2.

√ Teste t pareado perde (n – 1) graus de liberdade em relação ao teste t independente

- Variância de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ (mesmo tamanho amostral)

√ Amostras independentes:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] &= \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2\,\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

√ Amostras pareadas:

- Em geral, ρ > 0.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] &= \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] - 2\,\mathrm{Cov}[\bar{X}_1, \bar{X}_2] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} - 2\rho\frac{\sigma^2}{n} = \frac{2\,\sigma^2}{n}(1-\rho)\end{aligned}$$

√ Denominador estatística teste t emparelhado é menor que a do teste t independente

- Se houver correlação positiva entre pares e mesma variância em ambas populações

- Consequências:

√ Teste t independente pode subestimar significância dos dados se for aplicado com amostras pareadas

- Valor da estatística do teste t independente menor que a do teste t pareado.

√ Teste t independente tem mais poder contra quaisquer valores alternativos fixados do parâmetro

- Teste t pareado conduz a uma perda de n – 1 graus de liberdade em comparação ao teste t independente.

√ Devemos ou não emparelhar as observações?

- Considerações para escolha entre amostras independentes e emparelhadas:

√ Unidades experimentais relativamente homogêneas (σ pequeno) e correlação intrapares pequena:

- Ganho na precisão atribuído ao emparelhamento será compensado pela perda de graus de liberdade
- Deve ser usado experimento com amostras independentes

√ Unidades experimentais relativamente heterogêneas (σ grande) e correlação intrapares grande:

- Deve ser usado experimento emparelhado
- Este caso ocorre tipicamente quando as unidades experimentais forem as mesmas para ambos os casos

- Considerar também:
  - √ σ e ρ nunca são previamente conhecidos;
  - √ Quantidade grande de graus de liberdade (40 ou 50):
    - Perda de n – 1 graus de liberdade com emparelhamento pode não ser séria
  - √ Quantidade pequena de graus de liberdade (10 ou 20)
    - Perda de metade dos graus de liberdade será potencialmente séria se não for compensada por um aumento na precisão devido ao emparelhamento.

Intervalo de Confiança para μ_D

√ $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$, média de diferenças normalmente distribuídas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$$

Então $\mathrm{P}\left\{-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}\right\} = 1 - \alpha$

sendo $t_{\alpha/2,\,(n-1)}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da t com n–1 graus de liberdade

√ Intervalo para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança

$$\bar{d} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

√ $\bar{d}$ e s_D são, respectivamente, a média e o desvio-padrão da diferença de n pares aleatórios de medidas

- Comentários:
  - √ Esse intervalo de confiança é válido para o caso em que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
    - S_D^2 estima $\sigma_D^2 = \mathrm{Var}(X_1 - X_2)$
  - √ Suposição de normalidade é desnecessária para amostras grandes ($n \geq 30$ pares)
    - Aplica-se o Teorema Central do Limite

Exemplo 5-9

- Carros estacionados paralelamente
  - √ Estacionamento de dois carros de forma paralela, com barras de direção e raios de giro diferentes
  - √ Resposta:
    - Tempo em segundos para cada pessoa
  - √ Amostragem:
    - 14 pessoas estacionando dos dois carros

- Dados amostrais
  - √ Tempo para estacionamento de 2 carros em paralelo (s)
    - Dados: *BD_producao.xlsx/ guia: estacionamento*

Pessoa	Automóvel 1	Automóvel 2	Diferença
1	37,0	17,8	19,2
2	25,8	20,2	5,6
3	16,2	16,8	–0,6
4	24,2	41,4	–17,2
5	22,0	21,4	0,6
6	33,4	38,4	–5,0
7	23,8	16,8	7,0

Pessoa	Automóvel 1	Automóvel 2	Diferença
8	58,2	32,2	26,0
9	33,6	27,8	5,8
10	24,4	23,2	1,2
11	23,4	29,6	–6,2
12	21,2	20,6	0,6
13	36,2	32,2	4,0
14	29,8	53,8	–24,0

Estatísticas amostrais: $\boxed{\begin{array}{l}\bar{d} = 1,21 \\ s_D = 12,68\end{array}}$

- Intervalo de 90% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:
  - √ $t_{0,05;\,13} = 1,771$

$$\bar{d} - t_{0,05;13}\frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{0,05;13}\frac{s_D}{\sqrt{n}} =$$
$$1,21 - 1,771\frac{12,68}{\sqrt{14}} \leq \mu_D \leq 1,21 + 1,771\frac{12,68}{\sqrt{14}} =$$
$$-4,79 \leq \mu_D \leq 7,21$$

  - √ Com um nível de confiança de 90%, não podemos afirmar de que os dois carros têm diferentes tempos médios para estacionar
    (intervalo não inclui o zero)
    - Valor $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$ é consistente com os dados observados

Inferência para as Variâncias de Duas Distribuições Normais

Teste de Hipóteses para a Razão de Variâncias

- Suponha:
  - √ Duas populações normais independentes
  - √ μ_1 e μ_2: médias desconhecidas das populações
  - √ σ_1^2 e σ_2^2 : variâncias desconhecidas das populações
- Interesse:
  - √ Testar hipóteses relativas à igualdade das variâncias
- Hipóteses:
  - √ $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
  - √ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Distribuição F

- A variável aleatória F é definida como:

$$F = \frac{\frac{W}{u}}{\frac{Y}{v}}$$

√ W e Y são variáveis aleatórias qui-quadrado **independentes** com, respectivamente, *u* e *v* graus de liberdade

√ Essa variável aleatória segue a distribuição F com *u* graus de liberdade no denominador e *v* graus de liberdade.

√ Notação: F ~ $F_{u,\,v}$.

Distribuição F*t* – Função de Densidade

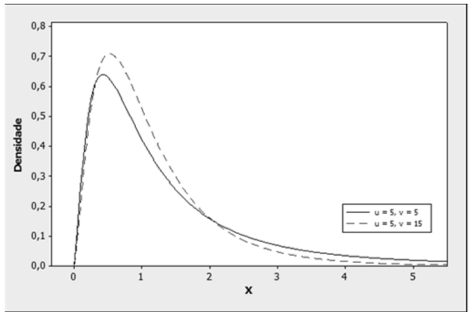
- Seja *X* uma variável aleatória com distribuição F com *u* graus de liberdade no numerado e *v* , no denominador:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)x+1\right]^{(u+v)/2}},\ 0 < x < \infty; u, v \in \mathbb{N}$$

√ Média da distribuição F: $\mathrm{E}[X] = \dfrac{v}{v-2}, v > 2$

√ Variância da distribuição F:

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, v > 4$$



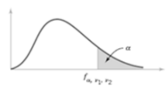
√ Distribuição F é assimétrica à direita

√ Distribuição F é similar à χ^2

- Os dois parâmetros u e v oferecem flexibilidade extra quanto à forma

- $f_{\alpha,\,u,\,v}$: Percentis da F com u e v graus de liberdade
  - √ Seja a variável aleatória F ~ $F_{u,\,v}$ então $\mathrm{P}\{F > f_{\alpha,u,v}\} = \alpha$
- Exemplo – Unilateral Superior
  - √ α = 0,05; u = 5 e v =10

$\mathrm{P}\{F_{5,10} > 3,33\} = 0,05$



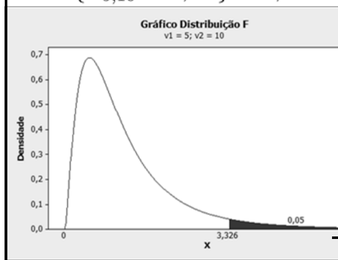


Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

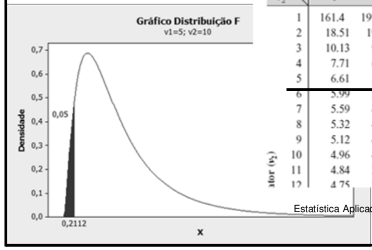
v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85

- Exemplo – Unilateral Inferior:
  - √ $\alpha = 0{,}95$; u = 5 e v = 10
  - √ Tabela contém somente percentis superiores
  - √ Pontos percentuais inferiores: $f_{1-\alpha,u,v} = \dfrac{1}{f_{\alpha,v,u}}$

Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

$f_{0.05,\nu_1,\nu_2}$

ν_2 \ ν_1	Degrees of freedom for the									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	$\boxed{4.74}$
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.								
12	4.75	3.								



$$f_{0,95;5;10} = \frac{1}{f_{0,05,10,5}} = \frac{1}{4,74} = 0,211$$

$$\mathrm{P}\{F_{5;10} \le 0,211\} = 0,05$$

- Exemplo – Bilateral:
  - √ $\alpha = 0{,}05$, u = 5 e v = 10

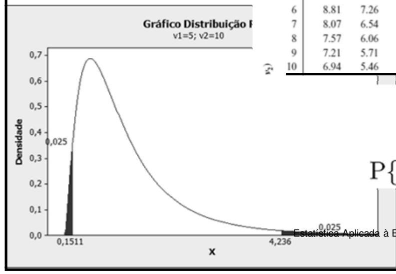
$$f_{0,025;5;10} = 4,24$$

$$f_{0,975;5;10} = \frac{1}{f_{0,025;10;5}} = \frac{1}{6,62} = 0,151$$

Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

$f_{0.025,\nu_1,\nu_2}$

ν_2 \ ν_1	Degrees of freedom for the numer										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	$\boxed{6.62}$	6.52
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87
10	6.94	5.46	4.83	4.47	$\boxed{4.24}$	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62



$$\mathrm{P}\{F_{5;10} > 4,24\} = 0,025$$

$$\mathrm{P}\{F_{5;10} < 0,151\} = 0,025$$

$$\mathrm{P}\{0,151 \le F_{5;10} \le 4,24\} = 0,95$$

Teste de Hipóteses para a Razão de Variâncias

- Suponha:
  - √ Duas populações normais independentes
  - √ μ_1 e μ_2: médias desconhecidas das populações
  - √ σ_1^2 e σ_2^2 : variâncias desconhecidas das populações
- Interesse:
  - √ Testar hipóteses relativas à igualdade das variâncias
- Hipóteses:
  - √ H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
  - √ H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Variâncias Amostrais

- Amostra de tamanho n_1 de população normal com média μ_1 e variância σ_1^2 desconhecidas
  - √ S_1^2: variância da amostra 1
- Amostra de tamanho n_2 de população normal com média μ_2 e variância σ_2^2 desconhecidas
  - √ S_2^2: variância da amostra 2
- Populações independentes

Razão das Variâncias Amostrais

- Razão das variâncias amostrais:

$$F = \frac{\frac{W}{n_1-1}}{\frac{Y}{n_2-1}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{(n_1-1),(n_2-1)}$$

√ Quociente de variáveis aleatória independentes

√ Numerador: $W = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$

√ Denominador: $Y = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$

Teste para a Razão de Variâncias de Duas Populações Normais

- Hipótese nula:
  √ H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
- Estatística de teste: $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$ ou $f_0 < f_{1-\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$
H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha,\, n1-1,\, n2-1}$.
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f_0 < f_{1-\alpha,\, n1-1,\, n2-1}$.

Exemplo 5-10

- Variabilidade em pastilhas de semicondutores
  √ Espessura obtida por meio de mistura de gases
  √ Variabilidade da espessura é característica crítica
  - Deseja-se baixa variabilidade

  √ Estudadas duas misturas diferentes de gases
  - Interesse em determinar se uma delas é superior na redução da variabilidade de espessura

  √ Há qualquer evidência que indique ser um gás preferível em relação ao outro?
  - Use $\alpha = 5\%$.

- Dados Amostrais:
  √ Espessura da camada de óxido (ângstrom)

Mistura 1		Mistura 2	
n_1	s_1	n_2	s_2
20	1,96	20	2,13

√ Consideraremos que a espessura de óxido seja uma variável aleatória normal para ambas as misturas de gases
- Os valores amostrais não estão disponíveis para se conduzir testes de normalidades para verificar esta suposição

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: variâncias σ_1^2 e σ_2^2, da espessura das camadas de óxido.
  2. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
  3. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $f_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0}{\sim} \mathrm{F}_{n_1-1,n_2-1}$
  6. Rejeite H_0 se:

     $f_0 > f_{0{,}025;\ 19;\ 19} = 2{,}53$ ou $f_0 < f_{0{,}975;\ 19;\ 19} = 1/2{,}53 = 0{,}40$
  7. Estatística de teste observada: $f_0 = \dfrac{(1,96)^2}{(2,13)^2} = \dfrac{3,84}{4,54} = 0,85$
  8. Conclusão:
     - $0{,}40 < f_0 = 0{,}85 < 2{,}53$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0
     - Não há evidência forte para indicar um gás que resulte em variância menor na espessura de óxido, com $\alpha = 5\%$.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $f_0 = 0{,}85$
    - $1/f_0 = 1{,}18$

```
MTB > CDF C1;
SUBC> F 19 19.

Cumulative Distribution Function

F distribution with 19 DF in numerator and 19 DF in denominator

   x  P( X <= x )
0,85     0,363400
1,18     0,639011
```

  - √ Cálculo de p:
    - $P\{F_{19,\ 19} < 0{,}85\} = 0{,}3640$ (f_0 está mais à esquerda!)
    - $P\ \{F_{19,\ 19} > 1{,}18\} = 1 - 0{,}6390 = 0{,}3610$
    - $p = 0{,}3640 + 0{,}3610 = 0{,}7244$
- H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ não pode ser rejeitada em favor de H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, a um nível $\alpha = 5\%$

- Saída:

Estatísticas descritivas

Estatística de teste

IC 95%

1 não pertence ao IC

Teste F

```
Test and CI for Two Variances

Method

Null hypothesis         Sigma(1) / Sigma(2) = 1
Alternative hypothesis  Sigma(1) / Sigma(2) not = 1
Significance level      Alpha = 0,05


Statistics

Sample   N  StDev  Variance
1       20  1,960     3,842
2       20  2,130     4,537

Ratio of standard deviations = 0,920
Ratio of variances = 0,847


95% Confidence Intervals

                                   CI for
Distribution   CI for StDev      Variance
of Data           Ratio            Ratio
Normal       (0,579; 1,463)  (0,335; 2,139)


Tests

                                  Test
Method           DF1  DF2  Statistic  P-Value
F Test (normal)   19   19       0,85    0,721
```


- Conclusões:
  - √ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.
  - √ Um não pertence ao intervalo de confiança.
    - Há evidência amostral para não rejeitar H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Intervalo de Confiança para para a Razão de Duas Variâncias

- Distribuição da estatística F:

$$F = \frac{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}} \sim \mathrm{F}_{n_2-1,n_1-1}$$

√ então:

$$\mathrm{P}\left\{f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} \leq F \leq f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}\right\} = 1-\alpha$$

√ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de 100(1 – α)% de confiança para σ_1^2 e σ_2^2.

- Sejam s_1^2 e s_2^2 as variâncias de amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, provenientes de populações normais com variâncias desconhecidas σ_1^2 e σ_2^2

√ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para σ_1^2/σ_2^2:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$$

Sendo:

- $f_{\alpha/2;\ n2-1;\ n1-1}$: percentil superior com α/2(100)% da distribuição F com n_2 – 1 graus de liberdade no numerador e n_1 – 1 graus de liberdade no denominador

- Comentário:

√ Intervalo de confiança para a razão entre dois desvios-padrão pode ser obtida extraindo a raiz quadrada do intervalo de confiança para a razão de variâncias

Exemplo 5-11

- Acabamento de superfície de liga de titânio

√ Fabricação de propulsores para uso em turbinas

√ Podem ser usados dois processos para esmerilhar determinada superfície

– Podem produzir peças com iguais rugosidades médias nas superfícies

√ Construir um intervalo de 90% de confiança para a razão dos desvios-padrão dos dois processos (σ_1/σ_2)

– Considerar os dois processo independentes e que a rugosidade na superfície seja normalmente distribuída

- Dados Amostrais:
  - √ Rugosidade em superfície (micropolegada)

Processo 1		Processo 2	
n_1	s_1	n_2	s_2
11	5,1	16	4,7

  - √ Consideraremos que os dois processo são independentes e que a rugosidade na superfície seja normalmente distribuída
    - Os valores amostrais não estão disponíveis para se conduzir testes de normalidades para verificar esta suposição

- Intervalo de 90% de confiança para σ_1/σ_2:
  - √ $f_{0,05;\,15,\,10} = 2,85$
  - √ $f_{0,95;\,15,\,10} = 0,39$

$$f_{0,95,15,10} = \frac{1}{f_{0,05,10,15}} = \frac{1}{2,54} = 0,39$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,95;15;10} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,05;15;10}$$

$$\frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 0,39 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 2,85$$

$$0,459 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 3,356$$

$$\sqrt{0,459} \le \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \le \sqrt{3,356}$$

$$0,678 \le \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \le 1,832$$

  - √ Com um nível de confiança de 90%, não podemos afirmar que os desvios-padrão da rugosidade da superfície para os dois processos sejam diferentes

(intervalo inclui o um)

- Saída:

Estatísticas descritivas

Estatística de teste

1 pertence ao IC

IC 95%

Teste F

```
Test and CI for Two Variances

Method

Null hypothesis         Sigma(1) / Sigma(2) = 1
Alternative hypothesis  Sigma(1) / Sigma(2) not = 1
Significance level      Alpha = 0,1


Statistics

Sample   N  StDev  Variance
1       11  5,100    26,010
2       16  4,700    22,090

Ratio of standard deviations = 1,085
Ratio of variances = 1,177


90% Confidence Intervals

                                  CI for
Distribution   CI for StDev      Variance
of Data           Ratio            Ratio
Normal        (0,680; 1,830)  (0,463; 3,350)


Tests

                                Test
Method           DF1  DF2  Statistic  P-Value
F Test (normal)   10   15       1,18    0,751
```


- Comentário:
  - √ A um nível de confiança de 90%, não se rejeita a hipótese de igualdade das variâncias em favor de H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Inferência para as Proporções de Duas Populações

Inferência para Proporções de Duas Populações

- Parâmetros de interesse:
  - √ Proporções binomiais p_1 e p_2.
- Inferência para amostras grandes:
  - √ Teste de hipóteses e intervalos de confiança baseados na aproximação binomial pela normal.

Testes para Diferenças na Proporções de uma População

- Suponha duas amostras aleatórias independentes, retiradas de duas populações:
  - √ Tamanhos amostrais: n_1 e n_2.
  - √ Número de observações que pertencem à categoria de interesse: X_1 e X_2.
- Estimadores das proporções populacionais:

$$\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1} \qquad \hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$$

- Hipóteses de interesse:

  H_0: $p_1 = p_2$

  H_1: $p_1 \neq p_2$

Estatística de Teste para $p_1 – p_2$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

para n_1 e n_2 grandes

- Se $p_1 = p_2$ (H_0 verdadeira)
  - √ p é desconhecido!

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- Estimador do parâmetro p (comum):

$$\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$$

- Estatística de teste para H_0: $p_1 = p_2$:

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Testes Aproximados para $p_1 – p_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $p_1 = p_2$.
- Estatística de teste: $$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$.
H_1: $p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$.
H_1: $p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$.

Exemplo 5-12

- Lentes intra-oculares usadas após operação de catarata
  - √ Dois tipos de solução para polimento
  - √ Solução 1:
    - 300 lentes polidas e 253 (X_1) não tiveram defeitos induzidos pelo polimento
  - √ Solução 2:
    - 300 lentes polidas, com 196 (X_2) satisfatórias
  - √ Há razão para acreditar que as duas soluções de polimento difiram?
    - Use $\alpha = 1\%$

- Dados Amostrais:
  - √ Lentes que não tiveram defeitos induzidos pelo polimento

Solução 1		Solução 2	
n_1	x_1	n_2	x_2
300	253	300	196

- Proporções amostrais: $$\hat{p}_1 = \frac{253}{300} = 0,8433$$ $$\hat{p}_2 = \frac{196}{300} = 0,6533$$
- Estimador do parâmetro comum p (sob H_0) $$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{253+196}{300+300} = 0,7483$$

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: p_1 e p_2, proporção de lentes satisfatórias após polimento com fluídos 1 e 2.
  2. H_0: $p_1 = p_2$.
  3. H_1: $p_1 \neq p_2$.
  4. $\alpha = 0,01$
  5. Estatística de teste: $$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - 0}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$
  6. Rejeite H_0 se $\lvert z_0 \rvert > z_{0,005} = 2,58$
  7. Estatística de teste observada: $$z_0 = \frac{0,8433 - 0,6533}{\sqrt{0,7483(1-0,7483)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{300}\right)}} = 5,36$$
  8. Conclusão:
     - $\lvert z_0 \rvert = 5,36 > 2,58$ ➔ Rejeitamos H_0

- Conclusão:
  - √ Há uma forte evidência para justificar a afirmação de que os dois fluidos sejam diferentes. O fluido 1 apresenta uma maior fração de lentes não defeituosas.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $p_1 \neq p_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 5{,}36$
  - √ $p = 2 \times P\{Z > 5{,}36\}$
  - √ Tabela
  - √ $P\{Z > 5{,}36\} = [1 - \Phi(5{,}36)] = 0{,}000$

    $p = 2\ (0{,}000) = 0{,}000$
- H_0: $p_1 = p_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}000$

- Saída:

Test and CI for Two Proportions

Estatísticas descritivas

```
Sample    X    N  Sample p
1       253  300  0,843333
2       196  300  0,653333

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference:  0,19
99% CI for difference:  (0,100943; 0,279057)
Test for difference = 0 (vs not = 0):  Z = 5,50  P-Value = 0,000

Fisher's exact test: P-Value = 0,000
```

Teste Z

IC 95%

  - √ Valor-p confirma conclusão de rejeitar H_0.
  - √ Zero não pertence ao intervalo de confiança.
    - Há forte evidência amostral para rejeitar H_0: $p_1 = p_2$.
  - √ Teste exato de Fisher:
    - Usado com qualquer tamanho amostral
    - Não usa aproximação pela normal

      (p-valor pode ser maior!)

Exemplo 10-14

- Erva-de-são-joão
  - √ Extratos utilizados para tratar depressão
  - √ Teste para comparar eficácia de extrato-padrão de erva-de-são-joão com placebo
  - √ Amostra: 200 pacientes com depressão unipolar
    - Alocação aleatória em dois grupos (extrato-1 e placebo-2)
    - Após oito semanas, melhoraram: 27 (X_1) pacientes tratados com a erva-de-são-joão e 19 (X_2), tratados com placebo.
  - √ Há alguma razão para acreditar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão?
    - Use $\alpha = 5\%$

- Dados Amostrais:
  - √ Pacientes com melhora no quadro de depressão unipolar (após 8 semanas)

Erva-de-são-joão		**Placebo**	
n_1	x_1	n_2	x_2
100	27	100	19

- Proporções amostrais: $\hat{p}_1 = \dfrac{27}{100} = 0,27$

$$\hat{p}_2 = \frac{19}{100} = 0,19$$

- Estimador do parâmetro comum p (sob H_0)

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{19 + 27}{100 + 100} = 0,23$$

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: p_1 e p_2, proporções de pacientes que melhoraram após 8 semanas.
  2. H_0: $p_1 = p_2$.
  3. H_1: $p_1 \neq p_2$.
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - 0}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$
  6. Rejeite H_0 se $|z_0| > z_{0,025} = 1,96$
  7. Estatística de teste observada:
  8. Conclusão: $z_0 = \dfrac{0,27 - 0,19}{\sqrt{0,23(1-0,23)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1,34$

  - $|z_0| = 1,34 < 1,96$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0

- Conclusão:
  - √ Não há evidência suficiente para confirmar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão unipolar.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $p_1 \neq p_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 1,34$

Cumulative Distribution Function

```
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

   x  P( X <= x )
1,34     0,909877
```

  - √ $P\{Z > 1,34\} = 1 - \Phi(1,34) = 1 - 0,9099 = 0,0901$

    $p = 2\,(0,0901) = 0,180$

- H_0: $p_1 = p_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0,180$

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste Z

IC 95%

```
Test and CI for Two Proportions

Sample    X    N  Sample p
1        27  100  0,270000
2        19  100  0,190000

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference:  0,08
95% CI for difference:  (-0,0361186; 0,196119)
Test for difference = 0 (vs not = 0):  Z = 1,34  P-Value = 0,179

Fisher's exact test: P-Value = 0,239
```

√ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.

√ Zero pertence ao intervalo de confiança.

- Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $p_1 = p_2$.

√ Teste exato de Fisher:

- Usado com qualquer tamanho amostral
- Não usa aproximação pela normal (p-valor maior!)

Erro Tipo II e Tamanho da Amostra

- Cálculo de β é complicado no caso de 2 amostras

√ Denominador de Z_0 usa estimador combinado de p (sob H_0: $p_1 = p_2$)

√ Quando H_0 for falsa ($p_1 \neq p_2$)

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

- Erro tipo II aproximado de teste **bilateral** para a diferença de proporções de 2 populações:

$$\beta = \Phi\left[\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{p}\overline{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1-p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right] - \Phi\left[\frac{-z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{p}\overline{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1-p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

√ em que:

$$\overline{p} = \frac{n_1p_1 + n_2p_2}{n_1+n_2}$$

$$\overline{q} = \frac{n_1(1-p_1) + n_2(1-p_2)}{n_1+n_2}$$

- Erro tipo II aproximado de teste **unilateral** para a diferença de proporções de 2 populações:

√ H_1: $p_1 > p_2$.

$$\beta = \Phi\left[\frac{z_{\alpha}\sqrt{\overline{p}\overline{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1-p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

√ H_1: $p_1 < p_2$:

$$\beta = 1 - \Phi\left[\frac{-z_{\alpha}\sqrt{\overline{p}\overline{q}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1-p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

Cálculo Tamanho Amostral

- Teste de hipóteses da diferença de proporções:
  - √ H_1: $p_1 = p_2$.
  - √ Valores especificados de p_1 e p_2.
  - √ Mesmos tamanhos amostrais: $n = n_1 = n_2$.
  - √ Tamanho aproximado da amostra

$$n \approx \frac{\left[z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(p_1+p_2)(q_1+q_2)}{2}} + z_\beta\sqrt{p_1q_1 + p_2q_2}\right]^2}{(p_1 - p_2)^2}$$

sendo: $q_1 = 1 - p_1$ e $q_2 = 1 - p_2$

  - √ Para alternativa unilateral troque $z_{\alpha/2}$ por z_α.

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções de Populações

- Distribuição da estatística Z:
  - √ Para amostras grandes:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ então:

$$\mathrm{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

  - √ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para p_1 e p_2.

Intervalo de Confiança Aproximado para a Diferença de Proporções de Populações

- Se $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ forem as proporções amostrais em duas amostras aleatórias e independentes, de tamanhos n_1 e n_2, que pertençam a uma categoria de interesse.
  - √ Intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para $p_1 - p_2$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da normal padrão

Exemplo 10-15

- Mancais de eixos de manivelas de motores
  - √ Característica de interesse:
    - Não-conformidade de acabamento da superfície
  - √ Amostras:
    - Grupo 1: Processo em uso
      - $n_1 = 85$ mancais, dos quais 10 (X_1) são não-conformes
    - Grupo 2: Processo modificado
      - $n_2 = 85$ mancais, dos quais 8 (X_2) são não-conformes
  - √ Obter estimativa intervalar, com 95% de confiança, para a diferença de proporção de mancais defeituosos produzidos pelos dois processos

- Dados Amostrais:
  - √ Pacientes com melhora no quadro de depressão unipolar (após 8 semanas)

Processo em uso		Processo modificado	
n_1	x_1	n_2	x_2
85	10	85	8

- Proporções amostrais: $\hat{p}_1 = \dfrac{10}{85} = 0,12$ $\quad \hat{p}_2 = \dfrac{8}{85} = 0,09$

- Intervalo com 95% de confiança para $p_1 - p_2$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le$$
$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$
$$0,12 - 0,09 - 1,96\sqrt{\frac{0,12(0,88)}{85} + \frac{0,09(0,91)}{85}} \le p_1 - p_2 \le$$
$$0,12 - 0,09 + 1,96\sqrt{\frac{0,12(0,88)}{85} + \frac{0,09(0,91)}{85}}$$
$$-0,06 \le p_1 - p_2 \le 0,12$$

- √ Baseado nos dados amostrais, parece improvável que modificação no processo de acabamento tenha reduzido a proporção de mancais defeituosos:
  - Intervalo de confiança inclui o zero.

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste Z

IC 95%

Test and CI for Two Proportions

```
Sample    X   N  Sample p
1        10  85  0,117647
2         8  85  0,094118

Difference = p (1) - p (2)
Estimate for difference:  0,0235294
95% CI for difference:  (-0,0689074; 0,115966)
Test for difference = 0 (vs not = 0):  Z = 0,50  P-Value = 0,618

Fisher's exact test: P-Value = 0,804
```

- √ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.
- √ Zero pertence ao intervalo de confiança.
  - Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $p_1 = p_2$.
- √ Teste exato de Fisher:
  - p-valor maior! (não usa aproximação pela normal)

Resumo dos Procedimentos de Inferência para Duas Amostras

Experimento Completamente Aleatorizado e Análise de Variância

Como Fazer com Mais de Duas Amostras

- Exemplo:
  - √ Investigação sobre o efeito de diferentes métodos de cura sobre a resistência média à compressão de concreto
    - Fabricar vários corpos de prova de concreto usando cada um dos métodos de cura
    - Testar a resistência à compressão de cada espécime

- Que método de cura deveria ser usado para fornecer a máxima resistência média à compressão?
  - √ Se houvesse apenas dois métodos:
    - Teste t para 2 amostras
    - Fator de interesse: método de cura
    - Níveis do fator: 2
  - √ E se houver 5 métodos diferentes de cura?

- Técnica para comparação de médias de mais de várias amostras:
  - √ Análise de variância (ANOVA)
  - √ Aleatorização

Experimento Completamente Aleatorizado e Análise de Variância

- Exemplo: Fabricação de sacos de papel
  - √ Experimento para melhorar resistência à tração
  - √ Engenharia aponta que a resistência à tração depende da concentração de madeira de lei na polpa
  - √ Faixa de interesse:
    - concentrações de 5 a 20%

- Experimento:
  - √ Níveis de concentração:
    - 5%, 10%, 15% e 20%
  - √ 6 corpos de prova para cada nível de concentração
  - √ Corpos de prova testados em ordem aleatória
  - √ Experimento completamente aleatorizado, com um único fator a 4 níveis (tratamentos)
- Cada tratamento tem 6 réplicas
- São efetuadas 24 corridas

- Aleatorização da ordem das 24 corridas:
  - √ Balanceamento do efeito de qualquer variável de perturbação que possa influenciar a resistência à tração
  - √ Ex.:
    - Aquecimento da máquina de teste
    - (quanto mais tempo a máquina estiver ligada, maior a resistência observada)

- Dados observados:
  - √ Resistência do papel à tração (psi)

Concentração	Observações						Totais	Média
	1	2	3	4	5	6		
5%	7	8	15	11	9	10	60	10,00
10%	12	17	13	18	19	15	94	15,67
15%	14	18	19	17	16	18	102	17,00
20%	19	25	22	23	18	20	127	21,17
							383	15,96

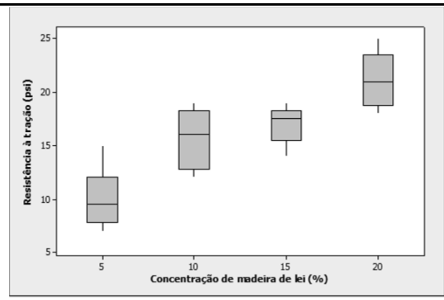
Tratamentos

Réplicas

Análise Gráfica

- É importante em experimentos planejados
- Gráficos:
  - √ Box-plot
    - Análise bivariada entre uma variável contínua e uma variável categórica (fator)
  - √ Histograma
    - Forma da distribuição da resposta em cada nível do fator

- Box-plot:

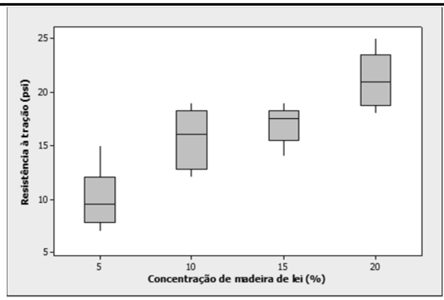


√ Concentração de madeira de lei exerce efeito sobre a resistência

- Maiores concentrações de madeira produzem maiores resistências observadas

√ Variabilidade não varia dramaticamente à medida que concentração aumenta

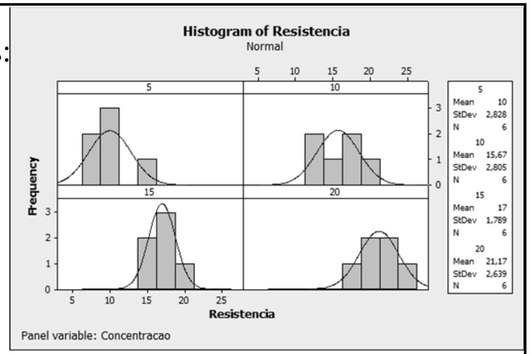
- Box-plot:



√ Variabilidade dentro de um tratamento (Within)

√ Variabilidade entre tratamentos (Between)

- Histogramas:



√ Distribuição da resistência à tensão é razoavelmente simétrica, por nível de concentração

Análise de Variância

- Suponha a níveis (tratamentos) de um único fator, cujas médias desejamos comparar
  - √ A resposta para cada um dos tratamentos é uma variável aleatória

Dados Típicos para um Experimento com um Único Fator

Tratamento	Observações 1	2	...	n	Totais	Média
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
a	y_{a1}	y_{a2}	...	y_{an}	$y_{a\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
					$y_{\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

y_{ij} : j-ésima observação sujeita ao i-ésimo tratamento

$y_{i\cdot}$: total das observações sujeitas ao i-ésimo tratamento

$y_{\cdot\cdot}$: total global

Modelo Linear Estatístico

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, a \\ j = & 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

- √ Y_{ij}: variável aleatória denotando a resposta da j-ésima observação submetida ao i-ésimo tratamento.
- √ μ: média global
  (comum a todos os tratamentos)
- √ τ_i: efeito do i-ésimo tratamento
  (parâmetro associado ao tratamento)
- √ ε_{ij}: componente do erro aleatório
  (normal com média zero e variância σ^2)

Forma Alternativa do Modelo

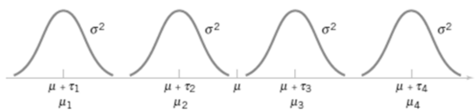
$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, a \\ j = & 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\mu_i = \mu + \tau_i$$

- √ μ_ι: média do i-ésimo tratamento
- Consequência do modelo:
  - √ Cada tratamento define uma população que tem média μ_i
    (média global mais um efeito)

- População de cada tratamento:

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma^2)$$



Modelo para Experimento com um Único Fator

- Experimento completamente aleatorizado:
  - √ Observações em ordem aleatória
  - √ Ambientes onde os tratamentos são usados tão uniformes quanto possível.

Análise de Variância

- Pode ser usada para testar a igualdade dos efeitos dos tratamentos
  - √ É uma técnica muito mais geral
- Modelo de efeitos fixos:
  - √ Efeitos definidos como desvios da média global μ

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

Dados Típicos para um Experimento com um Único Fator

Tratamento	Observações				Totais	Média
	1	2	...	n		
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}	$y_{1\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}	$y_{2\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
a	y_{a1}	y_{a2}	...	y_{an}	$y_{a\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot}$
					$y_{\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot\cdot}$

y_{ij} : j-ésima observação sujeita ao i-ésimo tratamento

$y_{i\cdot}$: total das observações sujeitas ao i-ésimo tratamento

$y_{\cdot\cdot}$: total global

$$y_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad y_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=n}^{n} y_{ij}$$

$$\bar{y}_{i\cdot} = \frac{y_{i\cdot}}{n},\ i = 1, 2, \ldots, a. \qquad \bar{y}_{\cdot\cdot} = \frac{y_{\cdot\cdot}}{N}$$

y_{ij} : j-ésima observação sujeita ao i-ésimo tratamento

$y_{i.}$: total das observações sujeitas ao i-ésimo tratamento

$\bar{y}_{i.}$: média das observações sujeitas ao i-ésimo tratamento

N: total de réplicas

N = an

$y_{..}$: total global

$\bar{y}_{..}$: média global

Teste de Hipóteses

- Interesse:
  - √ Testar a igualdade das médias dos a tratamentos
- Hipóteses:
  - √ H_0: $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$
  - √ H_1: $\tau_i \neq 0$ para pelo menos um i

- Se H_0 for verdadeiro:

$$Y_{ij} = \mu + \epsilon_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma^2)$$

  - √ Todas as N observações são tomadas de uma distribuição normal com média μ e variância σ^2.
  - √ As mudanças nos níveis do fator não tem efeito na resposta média

Componentes da Variabilidade dos Dados

$$\mathrm{SQ_T} = \mathrm{SQ_{Tratamentos}} + \mathrm{SQ_E}$$

- √ SQ_T: soma quadrática total
- √ $SQ_{Tratamentos}$: soma quadrática das diferenças entre as médias dos tratamentos e a média global
  - Mede a diferença entre tratamentos
  - (Between)
- √ SQ_E: soma quadrática das diferenças das observações dentro de um tratamento em relação à média do tratamento
  - Podem ser devidas ao erro aleatório
  - (Within)

Identidade da Soma Quadrática

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2 = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

√ Soma quadrática total: $$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2$$

√ Soma quadrática dos tratamentos $$SQ_{Tratamentos} = n\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2$$

√ Soma quadrática do erro: $$SQ_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2$$

Valores Esperados

$$E\left(\frac{SQ_{Tratamentos}}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1}$$

$$MQ_{Tratamentos} = \frac{SQ_{Tratamentos}}{a-1}$$

$MQ_{Tratamentos}$: média quadrática dos tratamentos

- Se H_0 for verdadeira:
  - √ Nenhuma diferença entre as médias ($\tau_i = 0$)
  - √ $MQ_{Tratamentos}$ é estimador não viciado de σ^2.
- Se H_1 for verdadeira:
  - √ $MQ_{Tratamentos}$ é estimará σ^2 mais um termo positivo
    - Incorpora variação devido à diferença sistemática nas médias dos tratamentos

$$E(SQ_E) = a(n-1)\sigma^2$$

$$MQ_E = \frac{SQ_E}{a(n-1)}$$

MQ_E: média quadrática do erro

- MQ_E é estimador não enviesado de σ^2.
  - √ Independente de H_0 ser verdadeira ou não

Graus de Liberdade

- SQ_T: an – 1 = N – 1 graus de liberdade
- $SQ_{Tratamentos}$: a -1 graus de liberdade
- SQ_E: a(n – 1) graus de liberdade
  - √ Dentro de cada um dos a tratamentos existem réplicas fornecendo n – 1 graus de liberdade, com os quais se estima o erro experimental.

$$an-1 = a-1+a(n-1)$$

Estatística de Teste

- Suponha que cada uma das populações possa ser modelada como uma distribuição normal
- Se H_0 for verdadeira

$$F_0 = \frac{\frac{SQ_{\text{Tratamentos}}}{a-1}}{\frac{SQ_E}{a(n-1)}} = \frac{MQ_{\text{Tratamentos}}}{MQ_E} \sim F_{(a-1),a(n-1)}$$

√ $MQ_{\text{Tratamentos}}$ é estimador não viciado de σ^2.

- Se H_0 for falsa

√ $MQ_{\text{Tratamentos}} > \sigma^2$.

- Rejeita-se H_0 se a estatística F_0 for grande

Teste de Hipóteses

- Hipóteses:

√ H_0: $\tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0$

√ H_1: $\tau_i \neq 0$ para pelo menos um i

- Estatística de teste: $F_0 = \frac{MQ_{\text{Tratamentos}}}{MQ_E} \sim F_{(a-1),a(n-1)}$
- Critério de rejeição:

√ $f_0 > f_{\alpha,\, a-1,\, a(n-1)}$

Fórmulas de Cálculo

- Experimento completamente aleatorizado, com amostras de tamanhos iguais em cada tratamento

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SQ_{\text{Tratamentos}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SQ_E = SQ_T - SQ_{\text{Tratamentos}} =$$

Tabela ANOVA – Experimento com um Único Fator

Fonte de Variação	Soma Quadrática	Graus de Liberdade	Média Quadrática	F_0
Tratamentos	$SQ_{\text{Tratamentos}}$	a – 1	$MQ_{\text{Tratamentos}}$	$\frac{MQ_{\text{Tratamentos}}}{MQ_E}$
Erro	SQ_E	a(n – 1)	MQ_E	
Total	SQ_T	an – 1		

- Rejeita-se H_0 (médias de tratamentos iguais) se:

√ $f_0 > f_{\alpha,\, a-1,\, a(n-1)}$

Exemplo 5-14

- Fabricação de sacos de papel
  - √ Experimento para melhorar resistência à tração
  - √ Fator: concentração de madeira de lei na polpa:
    - Níveis: 5, 10, 15 e 20%
  - √ Objetivo:
    - Verificar associação entre concentração de madeira de lei na polpa e resistência à tração

- Experimento:
  - √ Níveis de concentração:
    - 5%, 10%, 15% e 20%
  - √ 6 corpos de prova para cada nível de concentração
  - √ Corpos de prova testados em ordem aleatória
  - √ Experimento completamente aleatorizado, com um único fator a 4 níveis (tratamentos)
- Cada tratamento tem 6 réplicas
- São efetuadas 24 corridas

- Resistência do papel à tração (psi):
  - √ 6 réplicas por tratamento
  - √ Corpos de prova testados em ordem aleatória
  - √ Dados observados:

Concentração	Observações						Totais	Média
	1	2	3	4	5	6		
5%	7	8	15	11	9	10	60	10,00
10%	12	17	13	18	19	15	94	15,67
15%	14	18	19	17	16	18	102	17,00
20%	19	25	22	23	18	20	127	21,17
							383	15,96

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a = 0$
  - √ H_1: $\tau_i \neq 0$ para pelo menos um i
- Nível de significância:
  - √ $\alpha = 0,01$

- Cálculo das somas dos quadrados:

$$\mathrm{SQ_T} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{6} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = (7)^2 + (8)^2 + \cdots + (20)^2 - \frac{(383)^2}{24}$$
$$= 512,96$$
$$\mathrm{SQ_{Tratamentos}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N} = \frac{(60)^2 + (94)^2 + (102)^2 + (127)^2}{6} - \frac{(383)^2}{24}$$
$$= 382,79$$
$$\mathrm{SQ_E} = \mathrm{SQ_T} - \mathrm{SQ_{Tratamentos}} = 512,96 - 382,79 = 130,17$$

- Tabela ANOVA:

Fonte de Variação	Soma Quadrática	Graus de Liberdade	Média Quadrática	F_0
Tratamentos	382,79	3	127,60	19,61
Erro	130,17	20	6,51	
Total	512,96	23		

√ $f_0 = 19,61 > f_{0,01;\,3;\,20} = 4,94$. Rejeita-se H_0

√ Conclusão:

– Concentração de madeira de lei na polpa afeta significativamente a resistência à tração do papel

- Saída Minitab:

One-way ANOVA: Resistência versus Concentração

```
Source        DF      SS      MS      F      P
Concentração   3  382,79  127,60  19,61  0,000
Error         20  130,17    6,51
Total         23  512,96

S = 2,551   R-Sq = 74,62%   R-Sq(adj) = 70,82%


                            Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev
Level  N    Mean  StDev     +---------+---------+---------+---------
 5     6  10,000  2,828     (----*----)
10     6  15,667  2,805                  (----*-----)
15     6  17,000  1,789                     (----*-----)
20     6  21,167  2,639                               (-----*----)
                            +---------+---------+---------+---------
                          8,0      12,0      16,0      20,0

Pooled StDev = 2,551
```

Teste F

IC para as médias

$$\sqrt{\frac{130,17}{20}} = 2,551$$

√ P-valor real: $3,59\mathrm{x}10^{-6}$

√ Informações sobre cada nível de concentração de madeira de lei

Experimento Completamente Aleatorizado Desbalanceado

- Planejamento desbalanceado:
  - √ Número de observações sujeitas a cada tratamento é diferente
  - √ n_i: observações sujeitas ao tratamento i, i = 1, 2,..., a
  - √ N: número total de observações

$$N = \sum_{i=1}^{a} n_i$$

Planejamento Desbalanceado – Somas Quadráticas

- Experimento completamente aleatorizado, com amostras de tamanhos diferentes

$$SQ_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SQ_{\text{Tratamentos}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SQ_E = SQ_T - SQ_{\text{Tratamentos}}\,.$$

Quais Médias Diferem?

- Quando rejeitamos H_0: $\tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_a$.
  - √ Análise de variância indica se há uma diferença entre as médias
  - √ Ela não indica quais médias diferem

Procedimento Gráfico

- Suponha
  - √ Médias observadas para os níveis dos fatores: $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_a$.
  - √ Desvio-padrão de uma observação individual: σ.
  - √ Erro padrão de cada média: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Se $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$
  - √ As médias observadas se comportariam como se fossem observações retiradas ao acaso de uma distribuição normal, com média μ e desvio-padrão $\sigma/\sqrt{n}$.

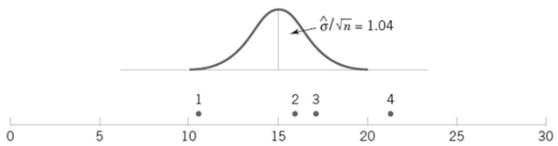
- S é desconhecido estimado por $\sqrt{MQ_E}$.
  - √ Esquematizar uma curva normal com largura $6\sqrt{\frac{MQ_E}{n}}$.
- Tentar ajustar a locação da curva de modo a sugerir que todas as médias observadas sejam típicos valores aleatórias daquela distribuição normal
- Esse procedimento é uma técnica grosseira
  - √ Embora ilustrativo

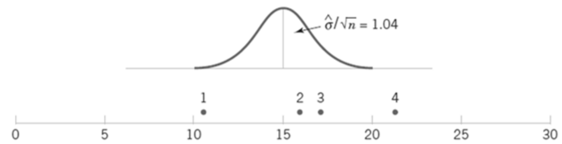
Exemplo

- Resistência à tração de sacos de papel:
  - √ Desvio-padrão da distribuição normal:

$$\sqrt{\frac{\mathrm{MQ_E}}{n}} = \sqrt{\frac{6,51}{6}} = 1,04.$$

  - √ Médias da resistência à tração, em relação à distribuição normal





- √ Não há localização para a normal que sugira que todas as 4 médias sejam típicas
- √ Tratamento 4 (concentração 20%)
  - Resistência média à tração mais alta que demais tratamentos
- √ Tratamento 1 (concentração 5%)
  - Resistência média á tração menor que demais tratamentos
- √ As médias dos tratamentos 2 e 3 (concentrações de 10% e 15%) não diferem

Intervalo de Confiança para a Média do Tratamento

$$\mu_i = \mu + \tau_i,\ i = 1, 2, \ldots, a.$$

- Considerando os erros normalmente distribuídos

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i \sim \mathrm{N}\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

  - √ Como σ^2 é desconhecido

$$T = \frac{\bar{Y}_{i\cdot} - \mu_i}{\sqrt{\frac{\mathrm{MQ_E}}{n}}} \sim \mathrm{t}_{a(n-1)}$$

- Intervalo com $(1 - \alpha)$ 100% de confiança para a média do i-ésimo tratamento

$$\bar{y}_{i\cdot} - t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{\mathrm{MQ_E}}{n}} \le \mu_i \le \bar{y}_{i\cdot} + t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{\mathrm{MQ_E}}{n}}$$

Exemplo

- Intervalo de confiança de 95% para o tratamento de concentração de madeira de lei a 20%

$$\bar{y}_{4\cdot} = 21,167$$
$$\mathrm{MQ_E} = 6,51$$
$$t_{0,025,20} = 2,086$$

$$\left[\bar{y}_{4\cdot} \pm t_{0,025,20}\sqrt{\frac{\mathrm{MQ_E}}{n}}\right] = \left[21,167 \pm 2,086\sqrt{\frac{6,51}{6}}\right]$$

$$19,00 \text{ psi} \leq \mu_4 \leq 23,24 \text{ psi}$$

Comparações Múltiplas

√ Encontrar resultado significante quando, em realidade, as duas amostras vêm de populações com mesma média.

√ Um teste univariado, com $\alpha = 5\%$

- 95% de resultado não significante quando as médias populacionais são iguais

√ p: quantidade de comparações de pares de médias:

$$p = \binom{a}{2}$$

√ p testes univariados (supostos independentes):

- $0,95^p$: probabilidade de se obter nenhum resultado significante quando as médias populacionais são iguais.
- $1 - 0,95^p$: probabilidade de pelo menos um teste significante quando as médias populacionais são iguais.
- Se p = 6, então $1 - 0,95^5 = 0,27$ (se os testes forem independentes)

Métodos de Comparações Múltiplas

- Método de Fisher da mínima diferença significante
- Teste de Tukey
  - √ Estatística da amplitude studentizada
- Teste da amplitude múltipla de Duncan
- Teste de Newman-Keuls

Método de Fisher da Mínima Diferença Significativa

- Compara todos os pares de médias:
  - √ H_0: $\mu_i = \mu_j$ vs. H_1: $\mu_i \neq \mu_j$
  - √ Estatística de teste: $t_0 = \dfrac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\sqrt{\frac{2\,\mathrm{MQ_E}}{n}}}$
- Regra de rejeição:
  - √ O par de médias será declarado significativamente diferente se: $|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > \mathrm{MDS}$
  - √ MDS: mínima diferença significativa (experimento desbalanceado): $\mathrm{MDS} = t_{\alpha/2,N-a}\sqrt{\mathrm{MQ_E}\left(\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_j}\right)}$

Exemplo

- Comparação dos pares de médias dos tratamentos:
  - √ Mínima diferença significativa:

$$a = 4 \text{ médias} \qquad n = 6 \qquad \mathrm{MQ_E} = 6,51 \qquad t_{0,025,20} = 2,086$$

$$\mathrm{MDS} = t_{0,025,20}\sqrt{\frac{2\mathrm{MQ_E}}{n}} = 2,086\sqrt{\frac{(2)(6,51)}{6}} = 3,07$$

  - √ Diferença entre médias observadas maiores que 3,07:
    - Diferença significativa entre as médias dos tratamentos correspondente.

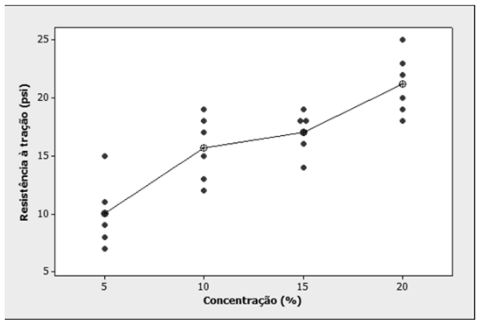
√ Médias observadas dos tratamentos:

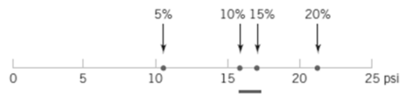
$$\bar{y}_{1\cdot} = 10,00 \text{ psi}$$
$$\bar{y}_{2\cdot} = 15,67 \text{ psi}$$
$$\bar{y}_{3\cdot} = 17,00 \text{ psi}$$
$$\bar{y}_{4\cdot} = 21,17 \text{ psi}$$

√ Comparações dos pares de médias:

$$4 \text{ vs. } 1 = 21,17 - 10,00 = 11,17 \text{ psi} > 3,07$$
$$4 \text{ vs. } 2 = 21,17 - 15,67 = 5,50 \text{ psi} > 3,07$$
$$4 \text{ vs. } 3 = 21,17 - 10,00 = 4,17 \text{ psi} > 3,07$$
$$3 \text{ vs. } 1 = 17,00 - 10,00 = 7,00 \text{ psi} > 3,07$$
$$\mathbf{3 \text{ vs. } 2 = 17,00 - 15,67 = 1,33 \text{ psi} < 3,07}$$
$$2 \text{ vs. } 1 = 15,67 - 10,00 = 5,67 \text{ psi} > 3,07$$

- Valores observados de resistência à tração e médias por nível de concentração de madeira





- Conclusão:
  - √ Existem diferenças significativas entre todos os pares, exceto entre os tratamentos 2 e 3
  - √ 10 e 15% de concentração de madeira de lei produzem aproximadamente a mesma resistência à tração
  - √ Todos os outros níveis de concentração testados produzem diferentes resistências à tração.

- Saída Minitab – MDS de Fisher

```
Grouping Information Using Fisher Method

Concentração  N    Mean  Grouping
20            6  21,167  A
15            6  17,000    B
10            6  15,667    B
 5            6  10,000      C

Means that do not share a letter are significantly different.
```

  - √ Informação de agrupamento das médias
    - B: diferença não significativa entre médias dos tratamentos de 10 e de 15%

Intervalo de Confiança para a Diferença nas Médias de Dois Tratamentos

- Estimador pontual de $\mu_i - \mu_j$: $\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot}$
- Erro padrão:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot}\right)} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}$$

  - √ Se usarmos MQE para estimarmos σ^2:

$$T = \frac{\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{j\cdot} - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\frac{2\,\mathrm{MQ_E}}{n}}} \sim \mathrm{t}_{a(n-1)}$$

- Intervalo com $(1 - \alpha)$ 100% de confiança para a a diferença nas médias de dois tratamentos (μ_1 e μ_2)

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} - t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{2\,\mathrm{MQ_E}}{n}} \leq \mu_i - \mu_j \leq \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} + t_{\alpha/2,a(n-1)}\sqrt{\frac{2\,\mathrm{MQ_E}}{n}}$$

Exemplo

- Intervalo de confiança de 95% para a diferença nas médias μ_1 e μ_2:

$$\left[\bar{y}_{3\cdot} - \bar{y}_{2\cdot} \pm t_{0,025,20}\sqrt{\frac{2\,\mathrm{MQ_E}}{n}}\right] = \left[17,00 - 15,67 \pm (2,086)\sqrt{\frac{2(6,51)}{6}}\right]$$

$$-1,74 \text{ psi} \leq \mu_3 - \mu_2 \leq 4,40 \text{ psi}$$

$$0 \in [-1,74;\, 4,40]$$

√ Não há diferença na resistência média à tração nos tratamentos 2 e 3.

- Saída Minitab: Comparações de Fisher para os pares

```
Fisher 95% Individual Confidence Intervals
All Pairwise Comparisons among Levels of Concentração

Simultaneous confidence level = 80,83%

Concentração =  5 subtracted from:

Concentração  Lower  Center   Upper  ----+---------+---------+---------+-----
10            2,594   5,667   8,739                  (----*-----)
15            3,928   7,000  10,072                     (----*----)
20            8,094  11,167  14,239                           (-----*----)
                                     ----+---------+---------+---------+-----
                                      -6,0       0,0       6,0      12,0

Concentração = 10 subtracted from:

Concentração   Lower  Center  Upper  ----+---------+---------+---------+-----
15            -1,739   1,333  4,406            (----*----)
20             2,428   5,500  8,572                  (----*----)
                                     ----+---------+---------+---------+-----
                                      -6,0       0,0       6,0      12,0

Concentração = 15 subtracted from:

Concentração  Lower  Center  Upper  ----+---------+---------+---------+-----
20            1,094   4,167  7,239               (----*----)
                                    ----+---------+---------+---------+-----
                                     -6,0       0,0       6,0      12,0
```

Taxa de erro da família: 0,192

$0 \in [-1,739; 4,406]$

√ Intervalos de confiança para todos os pares de médias de tratamento

- Taxa de erro da família: 0,192
  - √ P{não haver erro tipo I nas 6 comparações} = 0,808
  - √ Minitab permite especificar uma taxa de erro da família e então calcular uma taxa individual de erro para cada comparação

Análise Residual e Verificação do Modelo

- Suposições do modelo devem ser verificadas:
  - √ Observações independentes e normalmente distribuídas
  - √ Mesma variância para cada tratamento
- Verificação por meio de exame dos resíduos

Resíduo

- Diferença entre uma uma observação y_{ij} e seu valor estimado ou ajustado a partir do modelo estatístico

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, a \\ j = & 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

√ para o experimento completamente aleatorizado

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i\cdot}$$

√ e cada resíduo é:

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$$

- Exemplo: Resíduos $e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$

Concentração	Observações						Média
	1	2	3	4	5	6	
5%	–3,00	–2,00	5,00	1,00	–1,00	0,00	10,00
10%	–3,67	1,33	–2,67	2,33	3,33	–0,67	15,67
15%	–3,00	1,00	2,00	0,00	–1,00	1,00	17,00
20%	–2,17	3,83	0,83	1,83	–3,17	–1,17	21,17

√ O uso da média observada do tratamento i remove dos dados o efeito da concentração de madeira de lei

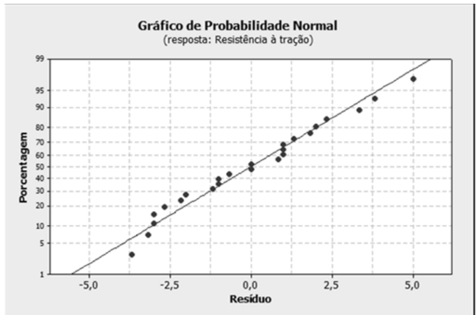
√ Os resíduos contém informação sobre a variabilidade não explicada

Verificação de Suposições

- Suposição de normalidade:

√ Verificada pela construção de gráfico de probabilidade normal

- Exemplo: verificação normalidade dos resíduos



√ Resíduos aparentam ser normalmente distribuídos

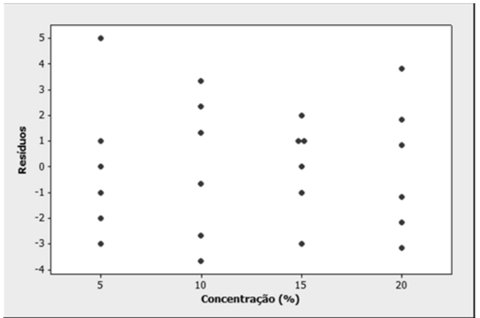
Suposição de Independência

- Plotar os resíduos contra o tempo ou a ordem da corrida na qual o experimento tenha sido feito
  - √ Padrão de comportamento pode indicar a não independência das observações
    - Ex.: sequência de resíduos positivos
  - √ Indicação que o tempo (ou a ordem das corridas é importante
    - Variáveis que variam com o tempo são importantes e não foram incluídas no planejamento
- Informações nem sempre disponíveis

Suposição de Homocedasticidade

- Plotar e comparar dispersão dos resíduos contra os níveis do fator
- Variabilidade dos resíduos não deve depender de maneira alguma do valor de $\bar{y}_{i\bullet}$
  - √ Aparecimento de padrão de comportamento sugere necessidade de transformação dos dados
    - Analisar os dados sob uma métrica diferente (transformação log y ou $\sqrt{y}$)

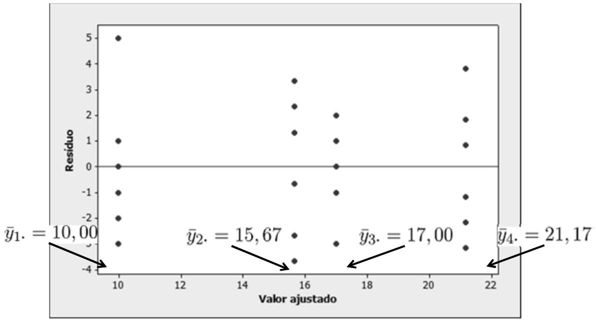
- Exemplo: resíduos vs. níveis do fator:



  - √ Gráfico não revela qualquer inadequação do modelo ou problema não usual com as suposições

- Plotar os resíduos contra a média observada de cada tratamento (valor ajustado):
  - √ É importante a dependência da dispersão dos resíduos com o valor ajustado (média observada $\bar{y}_{i\bullet}$)
    - Pode ser desejável selecionar o nível do fator que resulta na resposta máxima, no entanto, esse nível pode também causar mais variabilidade na resposta

- Exemplo: resíduos vs. valor ajustado:



√ Gráfico não revela qualquer inadequação do modelo ou problema não usual com as suposições

Referências

Bibliografia Recomendada

- Montgomery, D. C. (LTC)

  Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros

- Pinheiro, J. I. D et al. (Campus)

  Probabilidade e Estatística: Quantificando a Incerteza