Tomada de Decisão para uma Única Amostra

Roteiro

Testes de Hipóteses

Teste de Hipóteses

- Procedimento de tomada de decisão sobre hipóteses envolvendo a população
- Aspecto bastante útil da Inferência Estatística:
  - √ Problemas de tomada de decisão, teste ou experimentos podem ser formulados em termos de teste hipóteses

Hipótese Estatística

- Afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações
  - √ A hipótese geralmente envolve um ou mais parâmetros da distribuição de probabilidades que modela a população

Exemplo

- Taxa de queima de propelente sólido, usado para fornecer energia aos sistemas de escapamento de aeronaves
  - √ Taxa de queima é uma variável aleatória descrita por distribuição de probabilidades
  - √ Interesse:
    - – Taxa média de queima (parâmetro da distribuição)
    - – Taxa média de queima é ou não 50 cm/s?

- √ Hipóteses:
  - H_0: $\mu = 50$ cm/s
  - H_1: $\mu \neq 50$ cm/s
- √ Denominação:
  - H_0: hipótese nula
  - H_1: hipótese alternativa
- √ No exemplo a hipótese alternativa é bilateral
- √ Pode-se formular hipótese alternativa unilateral
  - H_0: $\mu = 50$ cm/s
  - H_1: $\mu > 50$ cm/s

  ou
  - H_0: $\mu = 50$ cm/s
  - H_1: $\mu < 50$ cm/s

- Importante:
  - √ Hipóteses são sempre afirmações sobre a população ou distribuição sobre estudo
    - – Não são afirmações sobre a amostra!

Teste de Hipóteses

- Procedimento que leva a uma decisão acerca de uma hipótese particular
  - √ Apoiam-se no uso de informações de amostras aleatórias da população de interesse
  - √ Se a informação amostral for consistente com a hipótese, essa não será rejeitada
  - √ Se a informação amostral for inconsistente com a hipótese, conclui-se que a hipótese é falsa

- Não sabemos com certeza sobre a verdade ou falsidade de uma hipótese
  - √ Só se pudermos examinar toda a população!
- O procedimento de teste de hipóteses deve ser desenvolvido considerando a probabilidade de alcançar uma conclusão errada!

Teste de Hipóteses

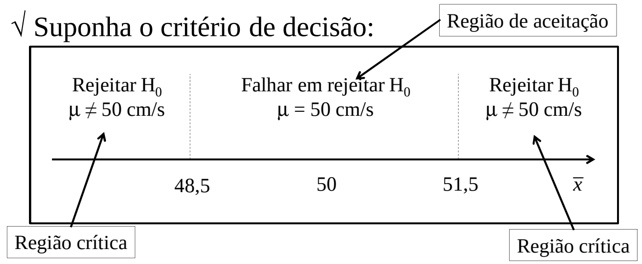
- Estruturação:
  - √ Estabelecer H_0 de modo que ela especifique um valor exato do parâmetro
    - $\mu = 50$ cm/s
  - √ Selecionar uma amostra aleatória
  - √ Calcular uma estatística de teste a partir dos dados amostrais
  - √ Tomar uma decisão a respeito de H_0.

Exemplo

- Taxa de queima de propelente
- Hipóteses:
  - √ H_0: $\mu = 50$ cm/s vs. H_1: $\mu \neq 50$ cm/s
- Amostra de tamanho $n = 10$
- Estatística de teste: $\bar{x}$
  - √ Estimativa da média verdadeira

- Critério para decisão:
  - √ Se a estimativa cair próxima ao valor da hipótese (μ=50) é evidência que a média verdadeira é realmente 50 cm/s.
  - √ Estimativa consideravelmente diferente de 50 cm/s é uma evidência que H_1 é válida.

- A média amostral pode assumir muito valores diferentes
  - √ Suponha o critério de decisão:



- Não rejeitaremos H_0 se:

$$48,5 \leq \bar{x} \leq 51,5$$

- Rejeitaremos H_0 em favor de da hipótese alternativa H_1 se:

$$\bar{x} < 48,5 \text{ ou } \bar{x} >\leq 51,5$$

- Valores críticos:
  - √ Limites entre as regiões críticas e de aceitação
  - √ No exemplo:
    - 48,5 e 51,5
- Conclusões referem-se à H_0:
  - √ Rejeição de H_0 em favor de H_1.
    - Estatística de teste cai na região crítica
  - √ Falha em rejeitar H_0:
    - Estatística de teste cai na região de aceitação

- Conclusões erradas:
  - √ Taxa média de queima do propelente é 50 cm/s e média amostral cai na região crítica
    - – A decisão de rejeitar H_0 está errada
  - √ Taxa média de queima do propelente não é 50 cm/s e média amostral cai na região de aceitação
    - – A decisão de não rejeitar H_0 está errada

Decisões no Teste de Hipóteses

- Erro tipo I:
  - √ Rejeitar H_0 quando ela for realmente verdadeira
- Erro tipo II:
  - √ Falhar em rejeitar H_0 quando ela for realmente falsa

Decisão	**Situação Real**	
	H_0 é Verdadeira	H_0 é Falsa
Falhar em rejeitar H_0	Nenhum erro	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Nenhum erro

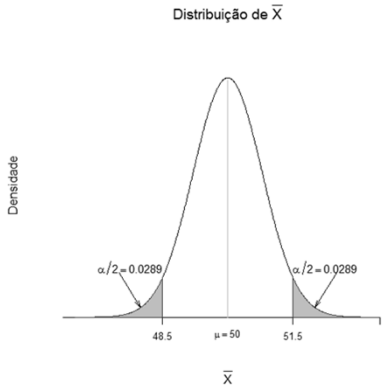
- Decisão está baseada em variáveis aleatórias
  - √ Podem-se associar probabilidade com os erros
- Probabilidade de erro tipo I:
  - √ α = P{erro tipo I} = P{rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira}
  - √ Nível de significância do teste ou erro α ou tamanho do teste

- No exemplo:
  - √ Taxa de queima com média verdadeira μ = 50 cm/s e desvio-padrão σ = 2,5 cm/s
  - √ Taxa de queima tem distribuição para a qual se aplicam as condições do TCL

$$\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\mu = 50, \sigma = \frac{2,5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{P}\{\bar{X} < 48,5 | \mu = 50\} + \mathrm{P}\{\bar{X} > 51,5 | \mu = 50\} \\
&= \mathrm{P}\left\{Z < \frac{48,5 - 50}{0,79}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z > \frac{51,5 - 50}{0,79}\right\} \\
&= \mathrm{P}\{Z < -1,90\} + \mathrm{P}\{Z > 1,90\} \\
&= 0,0287 + 0,0287 = 0,0574
\end{aligned}$$

  - √ 5,74% de todas as amostras aleatórias conduziriam à rejeição de H_0. (se μ verdadeiro for 5 cm/s)



- É possível reduzir α.
  - √ Como?

- Alargamento da região de aceitação
  - √ Valores críticos: 48 e 52

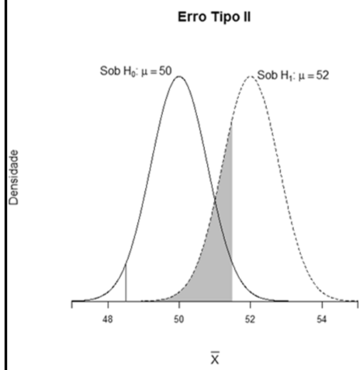
$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{P}\{\bar{X} < 48|\mu = 50\} + \mathrm{P}\{\bar{X} > 52|\mu = 50\}\\ &= \mathrm{P}\left\{Z < \frac{48-50}{0,79}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z > \frac{52-50}{0,79}\right\}\\ &= \mathrm{P}\{Z < -2,53\} + \mathrm{P}\{Z > 2,53\}\\ &= 0,0057 + 0,0057 = 0,0114\end{aligned}$$

- Aumento no tamanho amostral
  - √ n = 16

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{P}\{\bar{X} < 48,5|\mu = 50\} + \mathrm{P}\{\bar{X} > 51,5|\mu = 50\}\\ &= \mathrm{P}\left\{Z < \frac{48,5-50}{0,625}\right\} + \mathrm{P}\left\{Z > \frac{51,5-50}{0,625}\right\}\\ &= \mathrm{P}\{Z < -2,40\} + \mathrm{P}\{Z > 2,40\}\\ &= 0,0082 + 0,0082 = 0,0164\end{aligned}$$

- Probabilidade de erro tipo II:
  - √ β=P{erro tipo II}=P{falhar em rejeitar H_0 | H_0 é falsa}
  - √ Erro β.
  - √ Para calcular β temos de ter uma hipótese alternativa específica

- Erro tipo II quando μ = 52 e n = 10

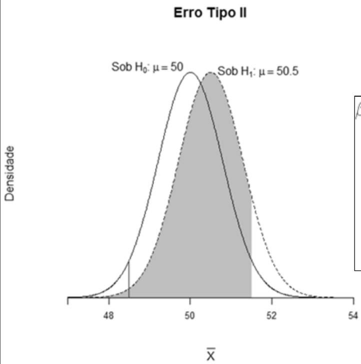


$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}\{48,5 \le \bar{X} \le 51,5|\mu = 52\}\\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{48,5-52}{0,79} \le Z \le \frac{51,5-52}{0,79}\right\}\\ &= \mathrm{P}\{-4,43 \le Z \le -0,63\}\\ &= \Phi(-0,63) - \Phi(-4,43)\\ &= 0,2643 - 0,0000 = 0,2643\end{aligned}$$

P{Rejeitar H_0 | H_0 Falsa (μ=52)}

- √ β será também 0,264 se a média verdadeira for μ=48

- Erro tipo II quando μ = 50,5 e n = 10

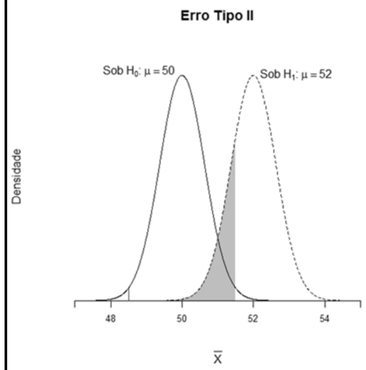


$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}\{48,5 \le \bar{X} \le 51,5 \mid \mu = 50,5\}\\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{48,5-50,5}{0,79} \le Z \le \frac{51,5-50,5}{0,79}\right\}\\ &= \mathrm{P}\{-2,53 \le Z \le 1,27\}\\ &= \Phi(1,27) - \Phi(-2,53)\\ &= 0,8980 - 0,0057 = 0,8923\end{aligned}$$

β é muito maior para μ = 50,5

√ β aumenta rapidamente à medida que a média verdadeira μ se aproxima do valor de H_0.

- Erro tipo II quando μ = 52 e n = 16



$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}\{48,5 \le \bar{X} \le 51,5 \mid \mu = 52\}\\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{48,5-52}{0,625} \le Z \le \frac{51,5-52}{0,625}\right\}\\ &= \mathrm{P}\{-5,60 \le Z \le -0,80\}\\ &= \Phi(-0,80) - \Phi(-5,60)\\ &= 0,2119 - 0,000 = 0,2119\end{aligned}$$

√ β depende também do tamanho da amostra
- Aumentar a amostra, implica diminuição de β.

- Tabela comparativa

Região de Aceitação	Tamanho amostral	α	β em μ=52	β em μ=50,5
$48,5 < \bar{x} < 51,5$	10	0,0576	0,2643	0,8923
$48 < \bar{x} < 52$	10	0,0114	0,5000	0,9705
$48,5 < \bar{x} < 51,5$	16	0,0164	0,2119	0,9445
$48 < \bar{x} < 52$	16	0,0014	0,5000	0,9918

√ Escolha de pontos críticos controla α.

√ Erros tipo I e tipo II estão relacionados
- Diminuir um deles implicar aumentar o outro

√ Aumento amostral reduz β (c/ α constante)

√ β aumenta quando m se aproxima de H_0.
(se H_0 for falsa)

- Tabela comparativa

Região de Aceitação	Tamanho amostral	α	β em μ=52	β em μ=50,5
$48,5 < \bar{x} < 51,5$	10	0,0576	0,2643	0,8923
$48,81 < \bar{x} < 51,19$	16	0,0576	0,0966	0,8606
$48 < \bar{x} < 52$	10	0,0114	0,5000	0,9705
$48,42 < \bar{x} < 51,58$	16	0,0114	0,2515	0,9578

√ Erro tipo II para tamanhos amostrais diferentes
- Mantido mesmo nível de significância.

Comentários

- α, em geral, é controlada com escolha de pontos críticos
- β depende do verdadeiro valor do parâmetro
  - √ Não é constante
  - √ Depende do tamanho da amostra
  - √ Depende da extensão com que H_0 é falsa

- Rejeitar H_0 é uma conclusão forte
  - √ O erro de rejeitar H_0 equivocadamente é controlado.
- Aceitar H_0 é uma conclusão fraca
  - √ Pode indicar a necessidade de mais dados para se obter uma conclusão forte
  - √ Deve-se dizer “Falha em rejeitar H_0”.

Poder

- É a probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

$$P_d = 1 - \beta$$

  - √ É a probabilidade de rejeitar corretamente H_0.
  - √ Em geral, testes estatísticos são comparados através de seu poder
  - √ Se o poder for julgado muito baixo, o analista poderá tanto α como o tamanho da amostra

- Poder é uma medida muito descritiva e concisa da **sensibilidade** de um teste estatístico
  - √ Sensibilidade é a habilidade em perceber diferenças
  - √ Exemplo:

    Se a média verdadeira for realmente 52 cm/s, o teste rejeitará H_0 corretamente (perceberá a diferença) em 73,57% das vezes.

Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

- H_0 é estabelecida sempre como uma igualdade
  - √ Deseja-se controlar α em um valor especificado
- H_1 pode ser bilateral ou unilateral

Exemplo 9-1

- Taxa de queima de propelente
  - √ Deseja-se que a conclusão forte seja quando a taxa de queima for menor do que 50 cm/s
  - √ Hipóteses:
    - H_0: $\mu = 50$
    - H_1: $\mu < 50$
  - √ Falhar em rejeitar H_0 não significa que $\mu = 50$
    - Significa que não temos forte evidência para suportar H_0.

- Exemplo – Situação difícil de ser formulada
  - √ Engarrafador compra garrafas mas quer estar certo de que elas atendem especificação de resistência à explosão
    - Resistência mínima é 200 psi
  - √ Formulações possíveis:
    - H_0: $\mu = 200$ psi; H_1: $\mu > 200$ psi — Rejeitar H_0 ➔ garrafas são satisfatórias; Fabricante deve demonstrar conformidade
    - Há probabilidade de não rejeitar H_0 mesmo que $\mu > 200$
    - H_0: $\mu = 200$ psi; H_1: $\mu < 200$ psi — Rejeitar H_0 ➔ garrafas não conformes; Pequenos desvios são aceitáveis
    - Há probabilidade de aceitar H_0 mesmo que $\mu < 200$

- Rejeitar H_0 é sempre uma conclusão forte
  - √ O que é importante para fazer uma conclusão forte em H_1?
    - Depende do ponto de vista e da experiência na situação

Resultado do Teste

- Conclusão sobre resultado do teste
  - √ H_0 foi ou não rejeitado a um nível de significância α.
  - √ Não dá ideia a respeito da posição da estatística de teste na região de rejeição

Probabilidade de Significância (Valor-p)

- Expressa a conclusão final de um teste
- É a probabilidade de se obter resultados mais extremos do observado, sob H_0.
  - √ p = P{estatísticas iguais ou superiores | H_0 V}
  - √ Qual a probabilidade de outra amostra apresentar resultados mais favoráveis (estatísticas de teste maiores) para rejeitar H_0?

- Se o p-valor é pequeno há duas conjecturas:
  - √ H_0 é verdadeira e ocorreu um evento extremamente raro
  - √ H_0 não deve ser verdadeira, pois a conjectura inicial não parece ser plausível
- Quanto menor o p-valor, maior a evidência para se rejeitar H_0
  - √ De maneira geral $p \leq 0{,}05$ indica que há diferenças significativas entre grupos

- p-valor carrega muita informação sobre o peso da evidência contra H_0.
- p-valor é o menor nível de significância que conduz à rejeição de H_0, com os dados amostrais
- Estatística de teste significante:
  - √ H_0 é rejeitado
  - √ p-valor é o menor nível α em que os dados são significantes

    (ponto crítico é a estatística de teste)

Exemplo – Lançamento Moeda

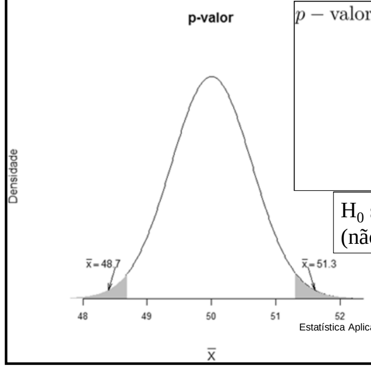
- Você lança uma moeda 20 vezes e obtém 16 caras e 4 coroas.
  - √ H_0: a moeda é honesta ($p_c = p_k = 0{,}50$)
  - √ Qual é a chance de obter 16 ou mais caras (ou 4 ou menos caras) lançando uma moeda honesta?
  - √ Resp.: 2 x 0,59 % = 1,18%
    - É o mesmo que obter 4 coroas ou menos

- 200 alunos lançarão uma moeda 20 vezes e anotarão a quantidade de caras
  - √ Espera-se obter pelo menos 16 caras (ou coroas) em 1,18% dos experimentos.
  - √ Não seria surpresa encontrar um mais experimento com pelo menos 16 caras (ou coroas)
  - √ Esse é um caso de comparação múltipla!

Exemplo

- H_0: $\mu = 50$ vs. H_1: $\mu \neq 50$
  - √ População com $\sigma = 2{,}5$ cm/s

$$\bar{x} = 51{,}3\text{cm/s}$$
$$n = 16$$



$$\begin{aligned} p - \text{valor} &= 1 - \mathrm{P}\{48{,}7 \leq \bar{X} \leq 51{,}3 | H_0 \text{ V}\} \\ &= 1 - \mathrm{P}\left\{\frac{48{,}7 - 50}{\frac{2{,}5}{\sqrt{16}}} \leq \bar{X} \leq \frac{51{,}3 - 50}{0{,}625}\right\} \\ &= \mathrm{P}\{-2{,}08 \leq Z \leq 2{,}08\} \\ &= 1 - 0{,}962 \\ &= 0{,}038 \end{aligned}$$

H_0 seria rejeitado para qualquer $\alpha > 0{,}038$
(não seria rejeitada para $\alpha = 1\%$)

- Não é sempre fácil calcular o valor exato de *p* para um teste
  - √ Pacotes estatísticos reportam o p-valor

Procedimento Geral para Teste de Hipóteses

1. A partir do contexto do problema, identifique o parâmetro de interesse
2. Estabeleça a hipótese nula H_0.
3. Estabeleça uma hipótese alternativa adequada, H_1.
4. Escolha um nível de significância, α.
5. Determine uma estatística de teste apropriada
6. Estabeleça a região de rejeição para a estatística
7. Calcule a estatística de teste observada
8. Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada e conclua no contexto do problema

- Uma vez que o experimento tenha sido planejado (passos de 1 a 4), são requeridas as seguintes etapas:
  1. Especificar a estatística de teste a ser usada
  2. Especificar a localização da região crítica
     (bilateral, unilateral inferior, unilateral superior)
  3. Especificar os critérios de rejeição
     (o valor de a ou o p-valor no qual a região deveria ocorrer)

Testes para a Média – População Normal com Variância Conhecida

Média Amostral

- Considere uma amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n proveniente de uma população qualquer, com média m e variância σ^2.
  - √ Média amostral é estimador não-viciado de μ.
  - √ Distribuição amostral da média amostral:
    - Para amostras pequenas dependerá da distribuição da população, suas esperança e variância serão:

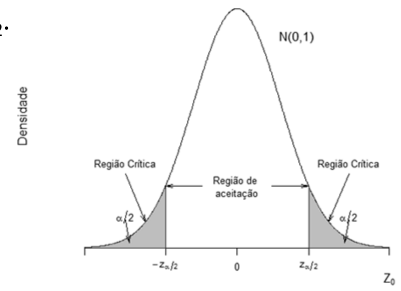
$$\mathrm{E}[\bar{X}] = \mu$$

$$\mathrm{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teste de Hipóteses para a Média

- Seja uma amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n proveniente de uma única população **normal** com variância σ^2 conhecida.
- Hipóteses:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Nível de significância do teste: α.
- Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu \neq \mu_0$. (alternativa bilateral)
  - √ $z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.



  - √ Pontos críticos: $-z_{\alpha/2}$ e $z_{\alpha/2}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.

- Região crítica expressa em termos do valor observado da média amostral:
  - √ Rejeite H_0: $\mu = \mu_0$ se: $\bar{x} > a$ ou $\bar{x} < b$

  em que:

$$a = \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ e}$$
$$b = \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplo 9-2

- Taxa de queima de propelente é característica importante do produto
  - √ Especificações exigem que taxa de queima seja 50 cm/s
  - √ Sabe-se que desvio-padrão taxa de queima é σ = 2 cm/s
  - √ Analista especifica nível de significância a = 5%
  - √ Seleciona-se amostra aleatória de n = 25
  - √ Média amostral observada: $\bar{x}$ = 51,3
  - √ Que conclusão o analista toma?

- Aplicação de Procedimento:
  1. Parâmetro de interesse:
     - √ μ: taxa média de queima
  2. H_0: $\mu = 50$ cm/s
  3. H_1: $\mu \neq 50$ cm/s
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$
  6. Rejeite H_0 se $z_0 > 1,96$ ou $z_0 < -1,96$
     - √ Valores críticos para $\alpha = 5\%$: $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $-z_{\alpha/2} = -1,96$
  7. Cálculo estatística de teste observada

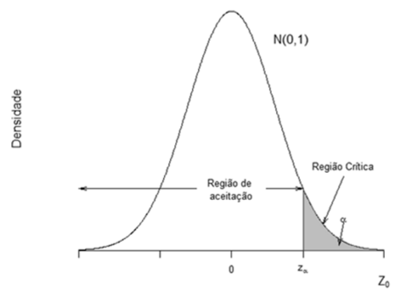
$$z_0 = \frac{51,3 - 50}{\frac{2}{\sqrt{25}}} = 3,25$$

8. Conclusão:
   - √ $z_0 = 3,25 > 1,96$, logo rejeitamos H_0: $\mu = 50$ cm/s, com nível de significância de 5%
   - √ Concluímos que a taxa média de queima difere de 50 cm/s, baseados em uma amostra de 25 medidas
   - √ Há forte evidência de que a taxa média de queima exceda 50 cm/s.

Hipótese Alternativa Unilateral Superior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
  - √ H_1: $\mu > \mu_0$.
- Comentários:
  - √ Valor negativo de Z_0 não conduz à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade superior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $z_0 > z_\alpha$.

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu > \mu_0$. (alternativa unilateral superior)
  - √ $z_0 > z_\alpha$.

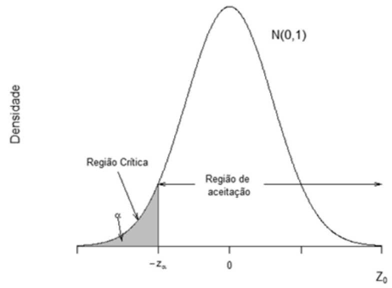


  - √ Pontos crítico: z_α.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $z_0 > z_\alpha$.

Hipótese Alternativa Unilateral Inferior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
  - √ H_1: $\mu < \mu_0$.
- Comentários:
  - √ Valores pequenos de Z_0 conduzem à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade inferior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $z_0 < -z_\alpha$.

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu < \mu_0$. (alternativa unilateral inferior)
  - √ $z_0 < z_\alpha$.



  - √ Pontos crítico: z_α.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $z_0 < -z_\alpha$.

Testes para Média (Variância Conhecida)

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
- Estatística de teste:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.
H_1: $\mu > \mu_0$	$z_0 > z_\alpha$.
H_1: $\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_\alpha$.

Valor-p

- Para testes com a estatística Z_0:
  - √ Cálculo do valor-p:

p	Teste	Hipóteses	
$2[1 - \Phi(\lvert z_0 \rvert)]$	Bilateral	H_1: $\mu = \mu_0$	H_1: $\mu \neq \mu_0$
$1 - \Phi(z_0)$	Bilateral superior	H_1: $\mu = \mu_0$	H_1: $\mu > \mu_0$
$\Phi(z_0)$	Bilateral inferior	H_1: $\mu = \mu_0$	H_1: $\mu < \mu_0$

  - √ $\Phi(z)$: função de distribuição acumulada da N(0, 1)

$$\Phi(z) = \Pr(Z \leq z)$$

- No exemplo:
  - √ Hipótese alternativa bilateral
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 3{,}25$
  - √ Valor-p:

$$p = 2[1 - \Phi(z_0)] = 2[1 - \Phi(3,25)] = 0,0012$$

  - √ H_0: $\mu = 50$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0012$
    - – H_0 seria rejeitada se $\alpha = 0{,}01$
    - – H_0 não seria rejeitada se $\alpha = 0{,}001$

Erro Tipo II

- Em um teste de hipóteses:
  - √ Analista seleciona diretamente α.
  - √ Probabilidade de erro tipo II (β) depende da escolha do tamanho da amostra

- Considere a hipótese bilateral:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$
  - √ H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Suponha que o verdadeira valor da média seja
  - √ $\mu = \mu_0 + \delta$, $\delta > 0$ (H_0 é falsa!)
- Estatística de teste Z_0 é:

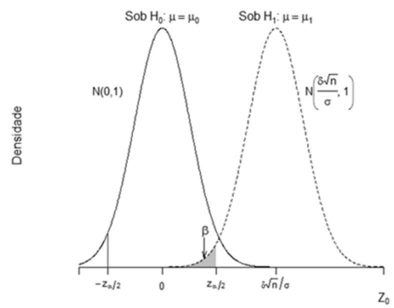
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

  - √ Quando H_1 for verdadeira ($\delta>0$):

$$Z_0 \sim \mathrm{N}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$$

- Comete-se erro tipo II quando H_1 é verdadeira e:
  - √ $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$.

$$Z_0 \sim \mathrm{N}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$$



√ Probabilidade de erro tipo II para teste bilateral para a média (variância conhecida)

$$\beta = \Pr\left[-z_{\alpha/2} \le Z_0 \le z_{\alpha/2} | Z_0 \sim \mathrm{N}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)\right]$$
$$= \Pr\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \le Z_0 - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} \le z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

√ A equação se mantém se $\delta < 0$

√ Se $\delta = 0$, tem-se a probabilidade de não rejeitar H_0 quando ela for verdadeira $(1 - \alpha)$

- Considere a hipótese unilateral superior:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$
  - √ H_1: $\mu > \mu_0$
- Suponha que o verdadeira valor da média seja
  - √ $\mu = \mu_0 + \delta$, $\delta > 0$ (H_0 é falsa!)
- Estatística de teste Z_0 é:

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

√ Quando H_1 for verdadeira ($\delta>0$):

$$Z_0 \sim \mathrm{N}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$$

Escolha do Tamanho da Amostra

- Tamanho da amostra para se obter um valor particular de β, para um dado δ e α.
  - √ Hipótese alternativa bilateral (H_1: $\mu \neq \mu_0$)
- Probabilidade de erro tipo II:

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

√ Se $\delta > 0$ $\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx 0$, então: $\beta \approx \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

√ Seja z_β o percentil 100β superior da normal padrão

$\beta = \Phi(-z_\beta)$

$$-z_\beta \approx z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$-z_\beta \approx z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

- Tamanho da amostra para um teste bilateral para a média (variância conhecida)

$$n \approx \frac{(z_\beta + z_{\alpha/2})^2}{d^2}, \text{ em que } d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma}$$

√ Convenciona-se arredondar o tamanho da amostra para o maior inteiro mais próximo

√ Essa aproximação é boa quando $\Phi(-z_{\alpha/2} - \delta\sqrt{n}/\sigma)$ é pequena comparada a β.

- Tamanho da amostra para se obter um valor particular de β, para um dado δ e α.
  - √ Teste unilateral superior (H_1: $\mu > \mu_0$, $\delta > 0$)
- Probabilidade de erro tipo II:

$$\beta = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$\beta = \Phi(-z_\beta)$ e $\quad -z_\beta = z_\alpha - \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$

- √ Tamanho da amostra para um teste unilateral superior para a média (variância conhecida)

$$n = \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2}{d^2}$$

- Tamanho da amostra para se obter um valor particular de β, para um dado δ e α.
  - √ Teste unilateral inferior (H_1: $\mu < \mu_0$, $\delta > 0$)
- Probabilidade de erro tipo II:

$$\beta = 1 - \Phi\left(-z_\alpha - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$\beta = \Phi(z_\beta)$ e $\quad z_\beta = -z_\alpha - \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$

- √ Tamanho da amostra para um teste unilateral inferior para a média (variância conhecida)

$$n = \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2}{d^2}$$

- Para **qualquer** hipótese unilateral:
  - √ Tamanho da amostra para produzir um erro especificado do tipo II, com probabilidade β, dados δ e α:

$$n = \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2}{d^2}, \text{ em que } \delta = \mu - \mu_0$$

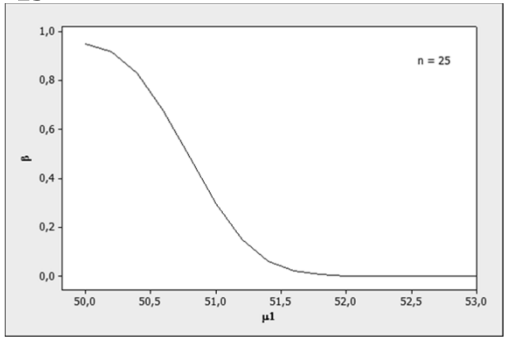
Exemplo 9-3

- Taxa de queima de propelente
  - √ Taxa verdadeira de queima é 49 cm/s ($\delta = 1$)
  - √ $n = 25$
  - √ $\sigma = 2$ cm/s
  - √ Valor de β para teste bilateral

$$\begin{aligned}\beta &= \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\ &= \Phi\left(1,96 - \frac{\sqrt{25}}{2}\right) - \left(-1,96 - \frac{\sqrt{25}}{2}\right)\\ &= \Phi(-0,54) - \Phi(-4,46) = 0,295\end{aligned}$$

- Probabilidade de cerca de 30% de que essa diferença não seja percebida

- Probabilidade não rejeitar H_0 vs. média verdadeira
  - √ n = 25



  - √ A curva é simétrica com relação às médias verdadeiras menores que 50

√ Planejamento do teste de maneira que teste detectará, com alta probabilidade (90%), diferenças entre a média verdadeira e $\mu_0 = 50$ de não mais que $\delta = 1$ cm/s

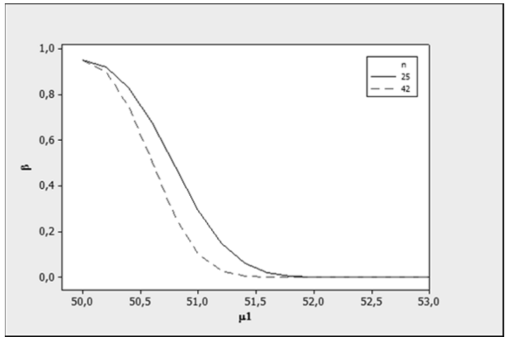
$$n \approx \frac{(z_\beta + z_{\alpha/2})^2\sigma^2}{\delta^2}$$
$$\approx \frac{(1,28 + 1,96)^2 2^2}{(1)^2} \approx 42$$

– A aproximação é boa.

$$\Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(-1,96 - \frac{(1)\sqrt{42}}{2}\right) = \Phi(-5,20) \approx 0$$

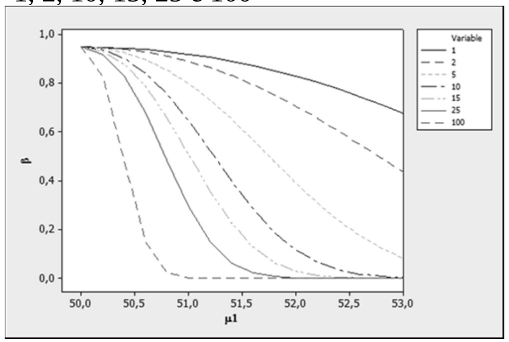
é pequena em relação a β.

- Probabilidade não rejeitar H_0 vs. média verdadeira
  - √ n = 42



  - √ Aumento do tamanho amostral melhora poder do teste

- Probabilidade não rejeitar H_0 vs. média verdadeira
  - √ n = 1, 2, 10, 15, 25 e 100



  - √ β é calculado em uma escala de σ!

- Probabilidade de erro tipo II:

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

√ Considerando uma escala σ:

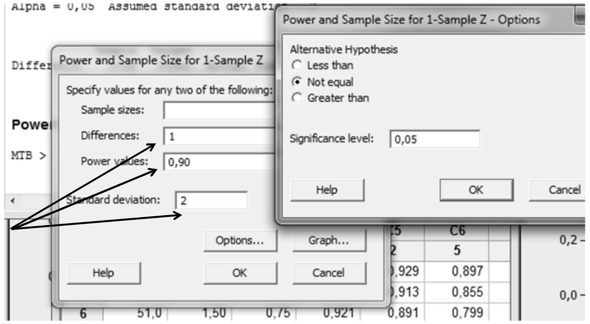
$$d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma} = \frac{\delta}{\sigma}$$

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - d\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - d\sqrt{n}\right)$$

√ Teremos β calculado para qualquer μ_1.

- Cálculo tamanho da amostra - Minitab

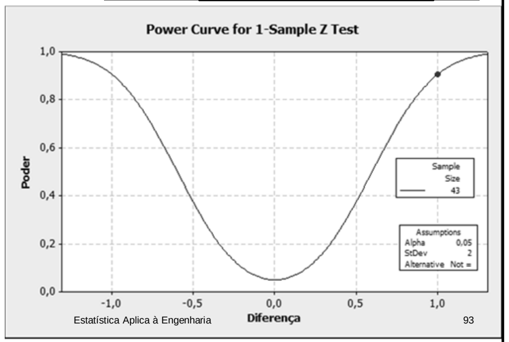
Stat > Power and Sample Size > 1-Sample Z



- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 1
    - Poder: 0,90

Power and Sample Size

```
1-Sample Z Test

Testing mean = null (versus not = null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 2

            Sample  Target
Difference    Size   Power  Actual Power
         1      43     0,9      0,906375
```



- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 1
    - Poder: 0,75

Power and Sample Size

```
1-Sample Z Test

Testing mean = null (versus not = null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 2

            Sample  Target
Difference    Size   Power  Actual Power
         1      28    0,75      0,753578
```

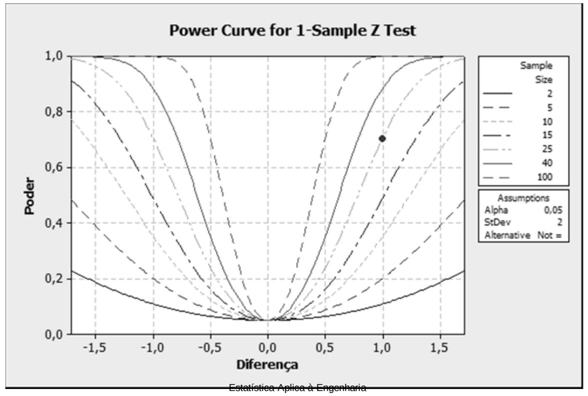
√ Tamanho amostral diminuiu para n = 28

- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 1
    - Tamanho amostra: 25

```
Power and Sample Size

1-Sample Z Test

Testing mean = null (versus not = null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 2

             Sample
Difference     Size     Power
         1       25  0,705418
```

  - √ Poder = 0,7054 ➔ β = 0,2946
- Os cálculos do computador são mais acurados que os valores da leitura visualizada a partir da curva CO.

- Taxa de queima de propelente
  - √ Curvas de poder vs. distância entre média verdadeira e H_0.



Teste para Amostras Grandes

- Na maioria das situações práticas:
  - √ σ^2 é desconhecida.
  - √ Não podemos estar certo que a população seja bem modelada por uma distribuição normal
- Se a amostra for grande (n > 40):
  - √ Pode-se substituir σ pelo desvio-padrão amostral
  - √ Usa-se a estatística Z_0 para teste de hipótese sobre média da população
    - – Baseado no TCL

Procedimento Geral para Teste de Hipóteses

1. A partir do contexto do problema, identifique o parâmetro de interesse
2. Estabeleça a hipótese nula H_0.
3. Estabeleça uma hipótese alternativa adequada, H_1.
4. Escolha um nível de significância, α.
5. Determine uma estatística de teste apropriada
6. Estabeleça a região de rejeição para a estatística
7. Calcule a estatística de teste observada
8. Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada e conclua no contexto do problema

- Se o experimento está planejado:
  - √ Procedimento para coleta dos dados
  - √ Procedimento para medição dos dados
  - √ Tamanho amostral
- Etapas para condução do teste de hipóteses:
  1. Especificar a estatística de teste a ser usada
  2. Especificar a localização da região crítica
     (bilateral, unilateral inferior, unilateral superior)
  3. Especificar os critérios de rejeição
     (o valor de a ou o p-valor no qual a região deveria ocorrer)

Significância Estatística vs. Significância Prática

- Valor-p pequeno indica estatisticamente significativo
  - √ H_0 deve ser rejeitado em favor de H_1.
  - √ O desvio real de H_0 detectado pode ter pouca significância prática
    (isto é particularmente verdade quando *n* é grande)

Exemplo

- Valor-p para testar H_0: $\mu = 50$
  - √ Para valor observado: $\bar{x} = 50,5\text{cm/s}$

Tamanho amostral (*n*)	***p*-valor**	**Poder[1]**
10	0,527	0,097
25	0,317	0,170
50	0,157	0.293
100	0,046	0,516
400	$6{,}3\text{x}10^{-5}$	0,979
1000	$2{,}5\text{x}10^{-10}$	1,000

- [1]Quando μ verdadeiro = 50,5 (α = 5%)

- Para n grandes, o valor observado 50,5 sugere que H_0: $\mu = 50$ seja rejeitada
  - √ Mesmo que do ponto de vista prático, μ não difira muito do valor usado na hipótese ($\mu_0 = 50$)
- Amostra grande quase sempre conduzirá à rejeição de H_0 (a um nível fixo de significância)
  - √ Mesmo se houver pouca diferença prática entre a média verdadeira e o valor usado na hipótese

- "Seja cuidadoso ao interpretar os resultados do teste de hipóteses quando a amostra tiver tamanho grande, visto que qualquer pequeno desvio do valor usado em H_0 (μ_0) será provavelmente detectado, mesmo quando a diferença for de pouca ou nenhuma significância prática"

Intervalo de Confiança para a Média – População Normal com Variância Conhecida

Estimação Intervalar

- Exemplo:
  - √ Estimativa da viscosidade média de produto químico
  - √ $\bar{x}$ = 1000
  - √ Dificilmente $\mu = \bar{x}$
- Quão próximo x está de μ?
  - √ Entre 900 e 1100?
  - √ Entre 990 e 1010?
  - √ Qual intervalo é mais informativo?

- Estimação intervalar:
  - √ Limites que representam um intervalo de valores plausíveis para um parâmetro
- Intervalo de confiança:
  - √ Estimativa de intervalo para um parâmetro de uma população
  - √ Não podemos estar certos de que o intervalo contém o parâmetro verdadeiro (desconhecido) da população
  - √ Usamos somente uma amostra para estimar intervalo
  - √ Intervalo de confiança é construído de modo que tenhamos alta confiança de que ele contém parâmetro

Intervalo de Confiança para a média

- Intervalo de confiança bilateral: $l \leq \mu \leq u$
  - √ Extremos l e u calculados a partir dos dados amostrais
  - √ Diferentes valores de l e u para diferentes amostras
  - √ Extremos são variáveis aleatórias L e U
- Suponha ser possível determinar os valores de L e U tal que:

$$\mathrm{P}\{L \leq \mu \leq U\} = 1 - \alpha, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

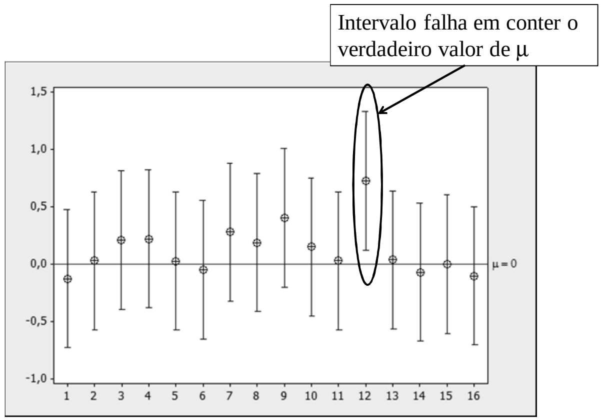
  - √ Há uma probabilidade $1–\alpha$ de selecionar uma amostra para a qual o IC conterá o valor verdadeiro de μ.

- Com uma particular amostra com:

$$X_1=x_1,\ X_2=x_2,\ \ldots,\ X_n=x_n.$$

  - √ Calcula-se o intervalo resultante de confiança para m
  - √ $l \leq \mu \leq u$
  - √ l e u: limites inferior e superior de confiança
  - √ $\gamma = 1 – a$: coeficiente de confiança

√ Construção repetida de um intervalo de confiança para μ



- Na prática:
  - √ O IC é construído a partir de uma única amostra aleatória
  - √ Esse intervalo poderá conter ou não o verdadeiro valor de μ.
  - √ Não é razoável vincular um nível de probabilidade a esse evento específico

- Afirmação apropriadas:
  - √ O intervalo observado [*l*, *u*] envolve o valor verdadeiro de μ, com confiança de $(1 - \alpha)$ 100%
  - √ Essa afirmação tem uma interpretação de frequência
  - √ Não sabemos se a afirmação é verdadeira para essa amostra específica
  - √ O **método** usado para obter [*l*, *u*] resulta em afirmações corretas $(1 - \alpha)$ 100% das vezes

Estatística Aplica à Engenharia 112

Intervalo de Confiança Unilateral para a Média

- Intervalo de confiança unilateral inferior de $100(1-\alpha)\%$ para μ:

$$l \leq \mu$$

  - √ Limite inferior *l* é escolhido de modo que:

$$\mathrm{P}\{L \leq \mu\} = 1 - \alpha, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

  - √ Há uma probabilidade $1-\alpha$ de selecionar uma amostra para a qual o IC conterá o valor verdadeiro de μ.

Estatística Aplica à Engenharia 113

- Intervalo de confiança unilateral superior de $100(1-\alpha)\%$ para μ:

$$\mu \leq u$$

  - √ Limite inferior *u* é escolhido de modo que:

$$\mathrm{P}\{\mu \leq U\} = 1 - \alpha, \text{ com } 0 \leq \alpha \leq 1$$

  - √ Há uma probabilidade $1-\alpha$ de selecionar uma amostra para a qual o IC conterá o valor verdadeiro de μ.

Estatística Aplica à Engenharia 114

Precisão do Intervalo de Confiança

- √ $l - u$ é medida de **precisão** da estimação:
  - $l - u$: comprimento do intervalo de confiança
  - Precisão é inversamente proporcional ao comprimento

Estatística Aplica à Engenharia 115

- Quanto maior for o IC:
  - √ Maior confiança de que o intervalo conterá o verdadeiro valor de μ.
  - √ Menos informação acerca do verdadeiro valor de μ.
- Desejável:
  - √ IC curto o suficiente (preciso) para tomada de decisão e com confiança adequada

Média Amostral de População Normal, com Variância Conhecida

- Distribuição amostral: $\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- Média amostral padronizada:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \text{N}(0,1)$$

- Determinação intervalo de confiança para μ:
  - √ População normal e variância conhecida

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \text{N}(0,1)$$

  - – Não depende do parâmetro desconhecido μ!

Então

$$\text{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da normal padrão

logo

$$\text{P}\left\{\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confiança para a Média, Variância Conhecida

- Seja $\bar{x}$ a média de amostra aleatória, de tamanho *n*, oriunda de população normal com variância σ^2 conhecida
  - √ Intervalo com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para μ:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Para amostras de tamanho $n \geq 30$, a expressão fornecerá bons resultados, independente da forma da população

Exemplo

- Taxa de queima de propelente (σ = 2,5 cm/s)
  - √ Dados amostrais: $\boxed{\bar{x} = 51,3 \text{cm/s e } n = 16}$
  - √ Intervalo bilateral com 95% de confiança para μ.

$$51,3 - 1,96\frac{2,5}{\sqrt{16}} \leq \mu \leq 51,3 + 1,96\frac{2,5}{\sqrt{16}}$$
$$50,075 \leq \mu \leq 52,525$$

Intervalo de valores razoáveis para a taxa média de queima com 95% de confiança

Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

- Há relação entre Teste de Hipóteses sobre um parâmetro θ e o Intervalo de Confiança para θ
  - √ Intervalo de $(1 - \alpha)$x100% de confiança para θ:
  - √ [*l*, *u*]
  - √ Teste de Hipóteses com nível de significância a para θ
    - H_0: $\theta = \theta_0$.
    - H_1: $\theta \neq \theta_0$.
  - √ O Teste de Hipóteses conduzirá à rejeição de H_0 se, e somente se, θ_0 não pertencer ao IC [*l*, *u*].

Exemplo

- Taxa de queima de propelente (σ = 2,5 cm/s)
  - √ H_0: $\mu = 50$ vs. H_1: $\mu \neq 50$
  - √ Dados amostrais: $\boxed{\bar{x} = 51,3 \text{cm/s e } n = 16}$
  - √ p-valor: 0,038
  - √ H_0 é rejeitada ao nível α = 5%
  - √ Intervalo bilateral com 95% de confiança para μ.

$$51,3 - 1,96\frac{2,5}{\sqrt{16}} \leq \mu \leq 51,3 + 1,96\frac{2,5}{\sqrt{16}}$$
$$50,075 \leq \mu \leq 52,525$$
$$50 \notin [50,075; 52,525]$$

H_0 é rejeitada

- Embora equivalentes, o Teste de Hipóteses e o Intervalo de Confiança fornecem conhecimento diferentes.
  - √ Intervalo de confiança:
    - Faixa de valores prováveis para μ em um nível estabelecido de confiança
  - √ Teste de Hipóteses:
    - Estrutura para dispor os níveis de risco associados com decisão específica

Nível de Confiança e Precisão de Estimação

- Comprimento do intervalo de confiança: $2\left(z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
  - √ Com 95% de confiança $2\left(1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 3,92\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - √ Com 99% de confiança $2\left(2,58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 5,16\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - √ O IC com 99% é maior que o IC com 99%
    (o nível de confiança é maior)

√ Comprimento do IC é medida de **precisão** da estimação
- Precisão é inversamente proporcional ao comprimento

- Desejável:
  - √ IC curto o suficiente (preciso) para tomada de decisão e com confiança adequada
- Solução:
  - √ Escolher o tamanho da amostra n grande o suficiente para construir IC com **precisão** (comprimento) especificada, com a **confiança** prescrita.

Escolha do Tamanho da Amostra

- Precisão do IC: $2\left(z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Erro ao usar $\bar{x}$ para estimar μ: $\mathrm{E} = |\bar{x} - \mu|$
- Tamanho da amostra:
  - √ Escolher *n* tal que $z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mathrm{E}$
  - √ Comprimento do intervalo resultante: 2E

- Tamanho da amostra com erro especificado:
  - √ Se $\bar{x}$ for usada como estimativa de μ, podemos estar $(1 - \alpha)100\%$ confiantes de que o erro $|x - \mu|$ não excederá o valor E especificado quando o tamanho da amostra for

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\mathrm{E}}\right)^2$$

- Deve ser arredondado para número inteiro

Exemplo

- Deseja-se:
  - √ Erro na estimação da taxa média de queima do propelente do foguete: menor que 1,5 cm/s
  - √ Grau de confiança: 95%
- Sabe-se que σ = 2 cm/s
- Tamanho requerido da amostra:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\mathrm{E}}\right)^2 = \left[\frac{(1,96)(2)}{1,5}\right]^2 = 6,83 \approx 7$$

  - Erro de estimação: E = 1,5
  - σ = 2 cm/s
  - $z_{\alpha/2}$ = 1,96

Limites Unilaterais para Média, população Normal, com Variância Conhecida

- Limites unilaterais de confiança para μ.
  - √ Estabelecer $l = -\infty$ ou $u = \infty$
  - √ Trocar $z_{\alpha/2}$ por z_α.
- Limites unilaterais de confiança para a média com variância conhecida
  - √ Limite superior com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para μ.

$$\mu \leq u = \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  - √ Limite inferior com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para μ.

$$\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = l \leq \mu$$

- √ O limite inferior de intervalo unilateral é sempre maior que o limite equivalente em IC bilateral
  - $z_\alpha < z_{\alpha/2}$.
  - Se o interesse é apenas o limite inferior para μ, então prefere-se o IC unilateral por fornecer a mesma confiança com limite inferior maior
- √ Similarmente, um limite unilateral superior é sempre menor do que um limite bilateral de igual confiança

Método Geral para Deduzir IC

- IC para um parâmetro desconhecido θ.
  - √ Amostra aleatória $X_1, ..., X_n$ de tamanho *n*.
  - √ Suponha existir estatística $g(X_1, ..., X_n; \theta)$ com as seguintes propriedades:
    - $g(X_1, ..., X_n; \theta)$ depende da amostra e de θ.
    - A distribuição de probabilidades de $g(X_1, ..., X_n; \theta)$ não depende de θ ou de qualquer outro parâmetro desconhecido
  - √ Exemplo: $\theta = \mu$
    - A estatística $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ satisfaz as duas condições

√ Encontrar as constantes C_L e C_U tal que

$$\mathrm{P}\{C_L \leq g(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq C_U\} = 1 - \alpha$$

- C_L e C_U não dependem de θ.

√ No exemplo:

- $C_L = -z_{\alpha/2}$ e $C_U = z_{\alpha/2}$.

√ Manipular as desigualdades de modo que:

$$\mathrm{P}\{L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

- Limite inferior de confiança: $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Limite superior de confiança: $U(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

- No exemplo:

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$U(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- A grandeza $g(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ é denominada grandeza pivotal
  - √ Em nosso exemplo
    - Grandeza pivotal: $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Intervalo de Confiança para a Média – Amostra Grande

- Não requer suposições de população normal e variância conhecida
- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de população qualquer com média μ e variância σ^2 desconhecidas
  - √ O tamanho amostral n é grande o suficiente para permitir a aplicação do TCL

- Pelo TCL: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$

√ σ é desconhecido!

√ Como n é grande, a troca de σ pelo desvio padrão amostral S tem pouco efeito na distribuição de Z.

√ Assim

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}(0,1), \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

- Intervalo com (1 – α)100% de confiança para μ para amostras grandes

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - √ O resultado se mantém independente da forma da distribuição da população
  - √ Em geral, *n* deveria ser no mínimo 40 para usar esse resultado de forma confiável

    (O TCL geralmente se mantém com $n \geq 30$)
  - √ Aqui recomenda-se tamanho amostral maior pois a troca de σ por S implica maior variabilidade

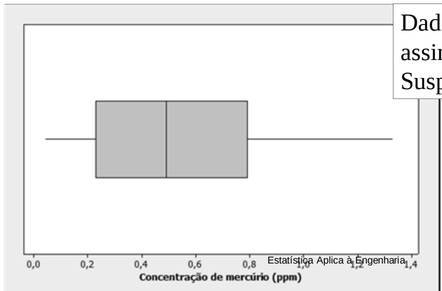
Exemplo 8.4

- Contaminação por mercúrio
  - √ Investigação por mercúrio em peixe de boa grande
  - √ Amostra de peixes de 53 lagos da Flórida
  - √ Medidas de concentração (em ppm) de mercúrio no tecido muscular

- Saídas Minitab:
  - √ Estatística Descritiva

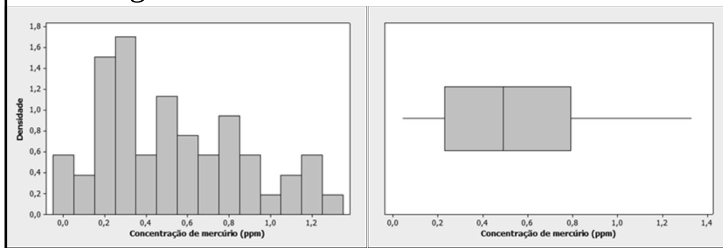
Descriptive Statistics: concentração

Variable	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
concentração	53	$\boxed{0,5250}$	$\boxed{0,0479}$	$\boxed{0,3486}$	0,0400	0,2300	0,4900	0,7900	1,3300



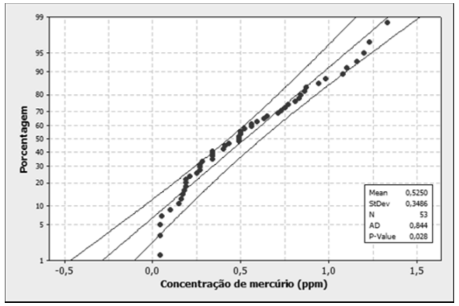
Dados amostrais indicam assimetria
Suspeita de não-normalidade

- Histograma dos dados:



  - √ Dados amostrais indicam que distribuição da concentração de mercúrio não é normal

- Gráfico de probabilidade normal dos dados



√ Há evidências amostrais que indicam a não-normalidade da população

- Intervalo aproximado de 95% de confiança para μ:
  - √ Suposição de normalidade não é necessária (n > 40)

$$\bar{x} - z_{0,025}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{0,025}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

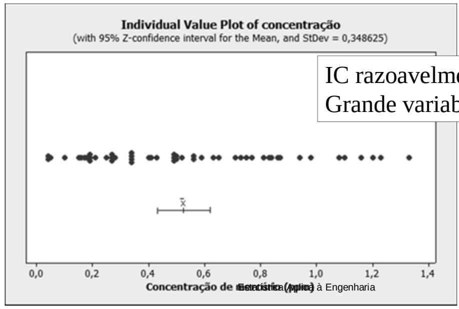
$$0,5250 - 1,96\,\frac{0,3486}{\sqrt{53}} \leq \mu \leq 0,5250 + 1,96\,\frac{0,3486}{\sqrt{53}}$$

$$0,4311 \leq \mu \leq 0,6189$$

  - √ Intervalo é razoavelmente largo
    - Há grande variabilidade nas medidas de concentração de mercúrio

- Saída Minitab

```
One-Sample Z: concentração

The assumed standard deviation = 0,348625

Variable      N    Mean   StDev  SE Mean         95% CI
concentração  53  0,5250  0,3486   0,0479  (0,4311; 0,6188)
```



IC razoavelmente largo
Grande variabilidade nas medidas

Testes para a Média – População Normal com Variância Desconhecida

- Suposição razoável:
  - √ População normal
    - Muitas populações encontradas na prática são bem aproximadas pela normal
    - Assim, teste de hipóteses para a média, baseados na normalidade têm larga aplicabilidade
    - Desvios moderados de normalidade têm pequeno efeito nas conclusões do teste de hipóteses (ou intervalo de confiança)
- Se normalidade não é suposição razoável:
  - √ Alternativa
    - Usar procedimentos não-paramétricos para construir IC
    - Testes de hipóteses não-paramétricos

Hipóteses para Desenvolvimento de Procedimento

- Suponha que X_1, X_2, ..., X_n seja uma amostra aleatória proveniente de
  - √ População **normal**, com
  - √ Média μ desconhecida
  - √ Variância σ^2 **desconhecida**
- Estatísticas amostrais:
  - √ Média amostral: $\overline{X}$
  - √ Variância amostral: S^2.

- A variância σ^2 é desconhecida
  - √ Não é possível calcular a quantidade Z

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ Um procedimento natural é trocar σ pelo desvio-padrão da amostra S
  - √ Calcula-se então a quantidade T:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

    - Qual a distribuição da estatística T?

- Qual o efeito na distribuição ao trocar σ por S?
  - √ Se a amostra for grande muda-se “muito pouco”
    - Usa-se a normal para construir o IC

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}(0,1), \text{ para } n \text{ suficientemente grande}$$

  - √ Em geral, no entanto, *n* é pequeno
    - Emprega-se uma outra distribuição amostral para a estatística T

Distribuição *t*

- Seja X_1, X_2, ..., X_n uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com média μ e variância σ^2 desconhecidas.
  - √ A variável aleatória

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

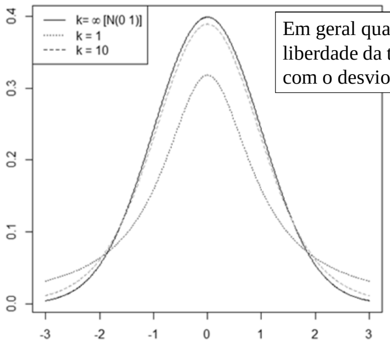
tem uma distribuição *t* com n–1 graus de liberdade

Distribuição *t* – Função de Densidade

- Seja *X* uma variável aleatória com distribuição *t* com k graus de liberdade:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{x^2}{k}\right)\right]^{\frac{k+1}{2}}}, \; -\infty < x < \infty; k = 1, 2 \ldots$$

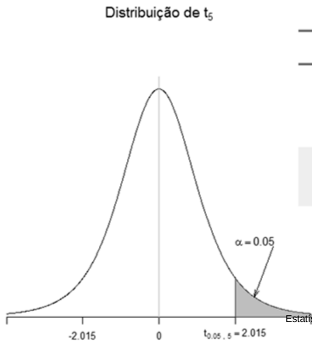
  - √ *k* é o número de graus de liberdade
  - √ Média da distribuição *t*: $\mathrm{E}[X] = 0, \; \forall k > 1$
  - √ Variância da distribuição *t*: $\mathrm{Var}[X] = \frac{k}{k-2}, \forall k > 2$



Em geral quantidade de graus de liberdade da t está associada com o desvio-padrão estimado

- √ Distribuições simétricas em torno de zero e unimodais
- √ Distribuição *t*: tem caudas mais pesadas que a normal
- √ Forma limite da t = normal padrão quando k → ∞

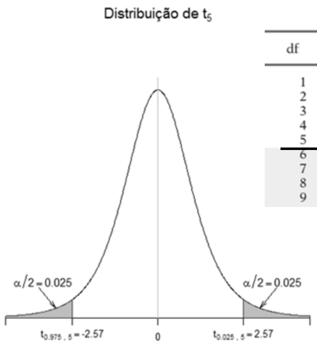
- $t_{\alpha, k}$: Percentis da t
  - √ Seja a variável aleatória T ~ t_k, então $\mathrm{P}\{T_k > t_{\alpha,k}\} = \alpha$
- Exemplo – Unilateral
  - √ α = 0,05 e k = 5



	Upper-tai					
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	$\boxed{2.015}$	2.571
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262

$$\mathrm{P}\{T_5 > 2,015\} = 0,05$$

- Exemplo – Bilateral:
  - √ α = 0,05 e k = 5

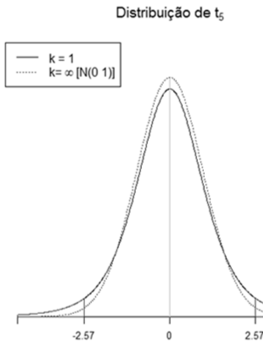


	Upper-tail					
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	$\boxed{2.571}$
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262

A distribuição t é simétrica!

$$P\{T_5 > 2,57\} = 0,025$$
$$P\{T_5 < -2,57\} = 0,025$$
$$P\{-2,57 \le T_5 \le 2,57\} = 0,95$$

- Exemplo – Normal padrão e t_5:
  - √ α = 0,05 – Bilateral
    - Z ~ N (0, 1) e T ~ t_5.



$$P\{T_5 > 2,57\} = 0,025$$
$$P\{Z > 2,57\} = 0,005$$

$$P\{-2,57 \le T_5 \le 2,57\} = 0,95$$
$$P\{-1,96 \le Z \le 1,96\} = 0,95$$

Compare os intervalos de 95% de confiança construídos com a t e com a Normal

Teste de Hipóteses para a Média

- Seja uma amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n proveniente de uma única população **normal** com variância σ^2 **desconhecida**.
- Hipóteses:

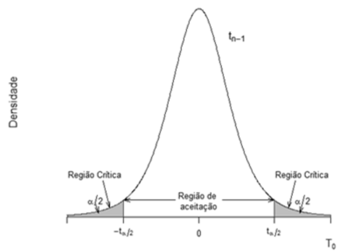
  H_0: $\mu = \mu_0$

  H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Nível de significância do teste: α.
- Estatística de teste:

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

  - √ S: desvio-padrão amostral

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu \neq \mu_0$. (alternativa bilateral)
  - √ $t_0 > t_{\alpha/2,\, n-1}$ ou $t_0 < -t_{\alpha/2\,,\, n-1}$.



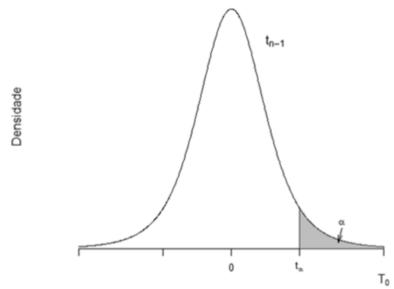
  - √ Pontos críticos: $-t_{\alpha/2\,,\, n-1}$ e $t_{\alpha/2\,,\, n-1}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $t_0 > t_{\alpha/2\,,\, n-1}$ ou $t_0 < -t_{\alpha/2\,,\, n-1}$.

Hipótese Alternativa Unilateral Superior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
  - √ H_1: $\mu > \mu_0$.
- Comentários:
  - √ Valor negativo de T_0 não conduz à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade superior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $t_0 > t_{\alpha\,,\,n-1}$.

Estatística Aplica à Engenharia 158

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu > \mu_0$. (alternativa unilateral superior)
  - √ $t_0 > t_{\alpha\,,\,n-1}$.



  - √ Pontos crítico: t_α.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $t_0 > t_{\alpha\,,\,n-1}$.

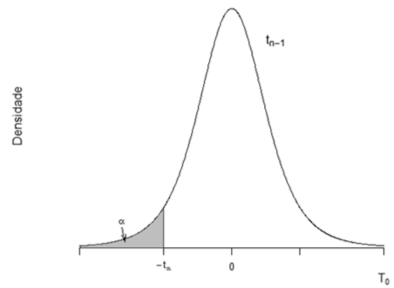
Estatística Aplica à Engenharia 159

Hipótese Alternativa Unilateral Inferior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
  - √ H_1: $\mu < \mu_0$.
- Comentários:
  - √ Valores pequenos de T_0 conduzem à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade inferior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $t_0 < -\,t_{\alpha\,,\,n-1}$.

Estatística Aplica à Engenharia 160

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\mu < \mu_0$. (alternativa unilateral inferior)
  - √ $t_0 < -t_{\alpha\,,\,n-1}$.



  - √ Pontos crítico: $t_{\alpha\,,\,n-1}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $t_0 < -t_{\alpha\,,\,n-1}$.

Estatística Aplica à Engenharia 161

Testes para Média (Variância Desconhecida)

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
- Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,\, n-1}$ ou $t_0 < -t_{\alpha/2,\, n-1}$.
H_1: $\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,\, n-1}$.
H_1: $\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,\, n-1}$.

Exemplo 4-7

- Testes de tensão quanto à adesão
  - √ Experimento para a carga no ponto de falha em corpos de prova de liga U-700
  - √ Os dados sugerem que a carga média na falha excede 10 Mpa?
  - √ Nível de significância α=5%
  - √ Tamanho amostral: 22 corpos de prova

- Carga no ponto de falha do corpo de prova

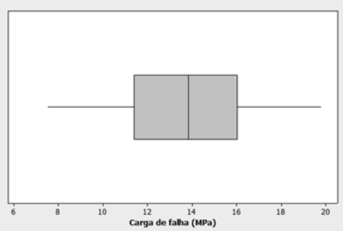
19,8	18,5	17,6	16,7	15,8
15,4	14,1	13,6	11.9	11,4
11,4	8,8	7,5	15,4	15,4
10,5	14,9	12,7	11.9	11,4
10,1	7,9			

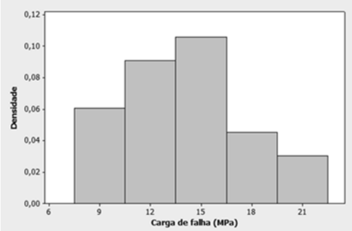
- Estatísticas descritivas da amostra:

Descriptive Statistics: carga

Variable	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median	Q3	Maximum
carga	22	13,714	0,758	3,554	7,500	11,400	13,850	16,025	19,800

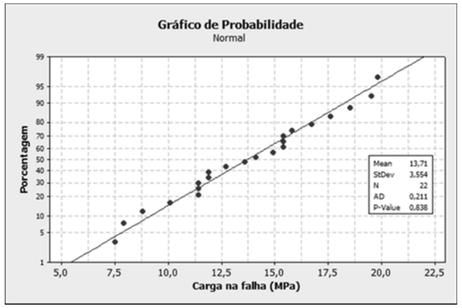
- Gráficos univariados:





  - √ Os dados aparentam ser normais
  - √ Suposição de normalidade é crucial para estimar μ.

- Gráfico de probabilidade normal:

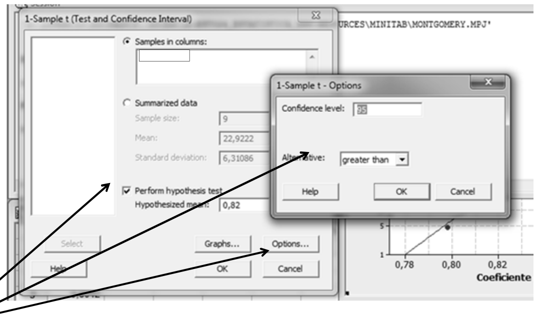


√ Gráfico de probabilidade suporta a suposição de que o carga na falha é normalmente distribuída

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetro de interesse: coeficiente de restituição (μ)
  2. H_0: μ = 10 MPa
  3. H_1: μ > 10 MPa
  4. α = 0,05
  5. Estatística de teste: $T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$
  6. Rejeite H_0 se $t_0 > t_{0,05;\,21} = 1{,}721$
  7. Estatística de teste observada: $t_0 = \frac{13,714 - 10}{\frac{3,554}{\sqrt{22}}} = 4,90$
  8. Conclusão:
     - t_0 = 4,90 > 1,721 ➔ Rejeitamos H_0
     - Afirmamos, em um nível de 5% de significância, que a carga média de falha excede 10 MPa.

- Minitab:
  - √ Dados: *BD_producao.xls/ guia: adesao*

Stat > Basic Statstics > 1-Sample t



- Saída:

Limite inferior com 95% de confiança

Estatística t_0

```
One-Sample T: carga

Test of mu = 10 vs > 10

                                           95% Lower
Variable   N    Mean  StDev  SE Mean      Bound     T      P
carga     22  13,714  3,554    0,758     12,410  4,90  0,000
```

√ Limite inferior com 95% de confiança excede 10 MPa

- Rejeita-se H_0: μ = 10, decidindo-se que H_1: μ > 10 é verdadeira
- Valor-p confirma conclusão

Valor-p

- Menor nível de significância no qual H_0 seria rejeitada
- Para testes com a estatística T_0:
  - √ Cálculo do valor-p:

p	Teste	Hipóteses	
$2P\{T_{n-1} > \lvert t_0 \rvert\}$	Bilateral	$H_1: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu \neq \mu_0$
$P\{T_{n-1} > t_0\}$	Bilateral superior	$H_1: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$
$P\{T_{n-1} < t_0\}$	Bilateral inferior	$H_1: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$

  - √ T_{n-1}: distribuição t com n–1 graus de liberdade

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: $H_1: \mu > 10$
  - √ Estatística de teste observada:
    - $t_0 = 4{,}90$

```
MTB > CDF 4,90;
SUBC> t 21.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 21 DF

  x   P( X <= x )
4,9     0,999962
```

  - √ $p = P\{T_{21} > 4{,}90\} = 1 – 0{,}9999 = 0{,}0001$
- H_0: $\mu = 10$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0001$

- Como calcular o p-valor usando a tabela?
  - √ Linha 21: maior valor é 3,819 (p = 0,0005)
  - √ Para $t_0 = 4{,}90$ ➔ $p \approx 0$.

- Cálculo do p-valor – Tabela: H_1 unilateral

t distribution critical values

	Upper-tail probability *p*									
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	$\boxed{2.624}$	$\boxed{2.977}$	3.326
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252

  - √ $t_0 = 2{,}72$ está entre 2,624 e 2,977
    - – Limites superior e inferior para o p-valor: 0,005 e 0,01

- Se H_1 é bilateral
  - √ Limite inferior para p: 2(0,005) = 0,01
  - √ Limite superior para p: 2(0,01) = 0,02
  - √ $0,01 < p < 0,02$

Erro Tipo II

- Quando média verdadeira $\mu = \mu_0 + \delta$, $\delta > 0$.
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$ é falsa
  - √ T_0 ~ distribuição t não-central, com n – 1 graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\frac{\delta\sqrt{n}}{S} = d\sqrt{n}$
  - √ Se $\delta = 0$, a distribuição t não central é a distribuição t usual.

Cálculo da Probabilidade de Erro Tipo II

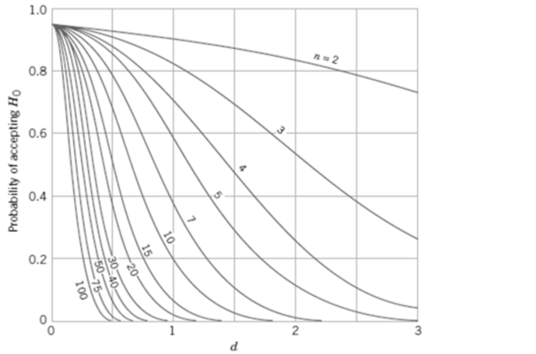
- Supondo que a média verdadeira seja μ_1.
  - √ $\mu_1 = \mu_0 + \delta$.
- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu = \mu_0$.
- Hipóteses alternativas:
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$.
  - H_1: $\mu > \mu_0$.
  - H_1: $\mu < \mu_0$.

Curvas Características de Operação

- Curvas de β vs. parâmetro d, para vários tamanhos amostrais
  - √ Gráficos VIIe e VIIh – Apêndice
  - √ Curvas para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$
- Fator de escala d: $d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma} = \frac{|\delta|}{\sigma}$
  - √ d depende do parâmetro desconhecido σ^2.
  - √ Conjunto de curvas características pode ser usado para todos os problemas, independente dos valores de μ_0 e σ.

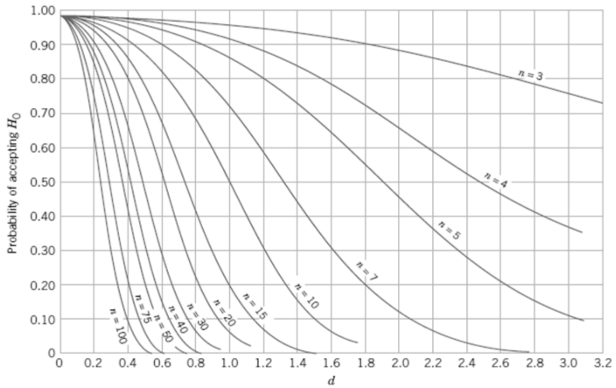
- Determinação do fator de escala d:
  - √ Utilização de estimativa prévia de σ^2 através de experimento piloto
  - √ Uso da variância amostral s^2 para estimar σ^2.
    - Para avaliar desempenho do teste após coleta dos dados
  - √ Definição da diferença relativa que ser quer detectar
    - Caso não haja experiência prévia que possa ser usada

- Teste bilateral e nível de significância α = 0,05



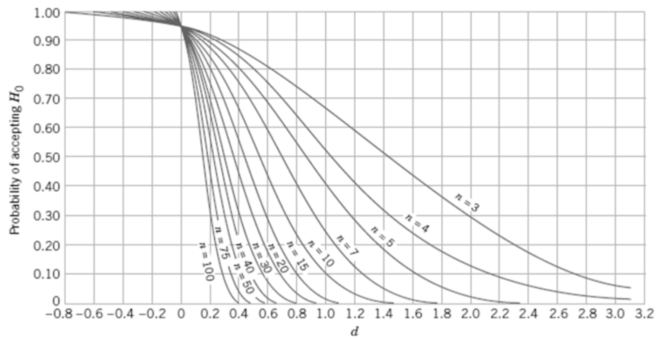
(e) O.C. curves for different values of n for the two-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste bilateral e nível de significância α = 0,01



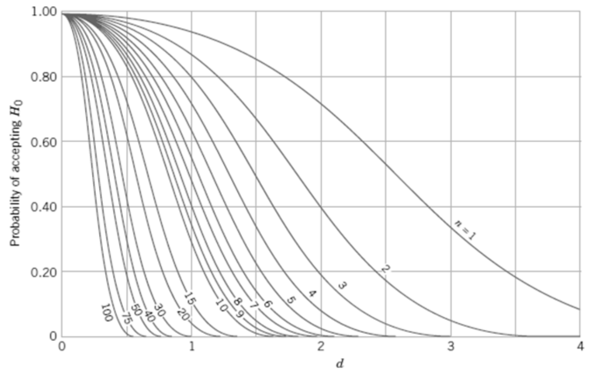
(f) O.C. curves for different values of n for the two-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

- Teste unilateral e nível de significância α = 0,05



(g) O.C. curves for different values of n for the one-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste unilateral e nível de significância α = 0,01



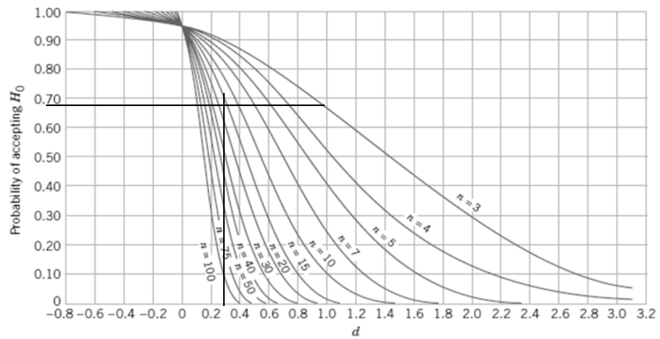
(b) O.C. curves for different values of n for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

Exemplo 4-8

- Testes de tensão quanto à adesão
  - √ Dados da carga no ponto de falha em 22 corpos de prova de liga U-700
  - √ Experimento para determinar se há evidência (com α=5%) que suporte a afirmação de que a carga média de falha excede 10 MPa
  - √ Tamanho amostral de 22 corpos de prova é adequado para assegurar que H_0 será rejeitada para uma diferença de 1 MPa, com probabilidade no mínimo 0,80?

- H_0: μ = 10 vs. H_1: μ > 10
- Desvio-padrão amostral; s = 3,554
- Fator de escala:

$$d = \frac{\delta}{S} = \frac{1}{3,55} = 0,28$$



(g) O.C. curves for different values of n for the one-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

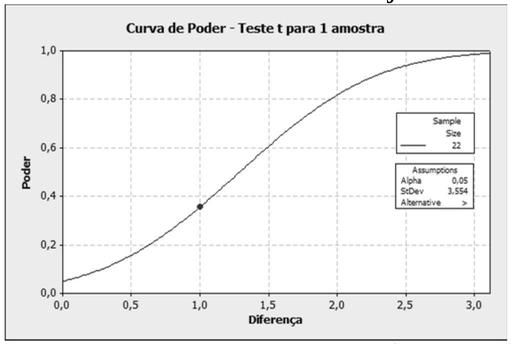
- √ Para n = 22, $\beta \approx 0,68$, Pd = 1 – 0,68 = 0,32
- √ Tamanho amostral não é adequado

- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 1
    - Tamanho amostra: 22

```
Power and Sample Size

1-Sample t Test

Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 3,554

                 Sample
Difference    Size      Power
         1      22   0,356567
```

  - √ Poder = 0,3566 ➔ β = 0,6434
- Os cálculos do computador são mais precisos que os valores da leitura visualizada a partir da curva CO.

- O tamanho da amostra n = 22 não é adequado para fornecer a sensibilidade desejada



  - √ Tamanho adequado para perceber efeito significativo de 2 MPa

- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 2
    - Tamanho amostra: 22

```
Power and Sample Size

1-Sample t Test

Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 3,554

                 Sample
Difference    Size      Power
         2      22   0,818092
```

  - √ Poder = 0,8181 ➔ β = 0,1819
- Tamanho amostral adequado para fornecer a sensibilidade desejada (2 Mpa).

Escolha Tamanho Amostral – Variância Desconhecida

- Deve-se determinar (ou conhecer):
  - √ Estrutura do experimento
  - √ Método de análise
  - √ Nível de significância (α) escolhido
  - √ Poder desejado
  - √ Variabilidade das medidas:
    - – Realizar um estudo piloto, ou
    - – Usar dados de experimentos anteriores ou publicados
  - √ Efeito significativo mínimo

- O cálculo de n (e de β) dependem do parâmetro desconhecido σ^2.
- Maneiras para determinar o tamanho amostral no caso em que σ^2 é desconhecido:
  - √ Aproximação pela normal
  - √ Curvas CO
  - √ Procedimentos computacionais
- Notação:
  - √ s_0: estimativa prévia do desvio-padrão da população

Estatística Aplica à Engenharia 208

Aproximação pela Normal

√ Usada com amostras grandes
√ z_η o percentil 100η superior da normal padrão
√ Fator de não centralidade $d = \dfrac{|\mu - \mu_0|}{s_0} = \dfrac{|\delta|}{\sigma}$

- Teste bilateral
  - √ $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu \neq \mu_0$ $\quad n \approx \left(\dfrac{z_\beta + z_{\alpha/2}}{d}\right)^2$
- Teste unilateral
  - √ $H_0: \mu = \mu_0$
  - √ $H_1: \mu > \mu_0$ ou $H_1: \mu < \mu_0$ $\quad n \approx \left(\dfrac{z_\beta + z_{\alpha}}{d}\right)^2$

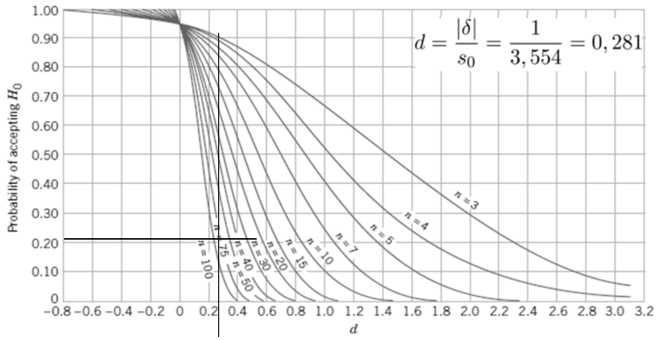
Estatística Aplica à Engenharia 209

Exemplo 4-8 (continuação)

- Testes de tensão quanto à adesão
  - √ Dados da carga no ponto de falha em 22 corpos de prova de liga U-700
  - √ Nível de significância (α): 5%
  - √ Hipóteses:
    - $H_0: \mu = 10$ vs. $H_1: \mu > 10$.
  - √ Tamanho amostral (n): 22 corpos de prova
  - √ Qual tamanho amostral para detectar uma diferença de 1 MPa, com probabilidade no mínimo 0,80?

Estatística Aplica à Engenharia 211

- Curvas CO:



(g) O.C. curves for different values of n for the one-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- √ Tamanho amostra: $n \approx 75$

Estatística Aplica à Engenharia 212

- Aproximação pela normal:
  - √ $z_{0,05}$: 1,645
  - √ $z_{0,20}$: 0,842
  - √ Fator de escala: d = 0,281

$$n \approx \left(\frac{z_\beta + z_\alpha}{d}\right)^2$$
$$\approx \left(\frac{0,842 + 1,645}{0,281}\right)^2 = 78,3$$

  - √ Tamanho amostra: n ≈ 79

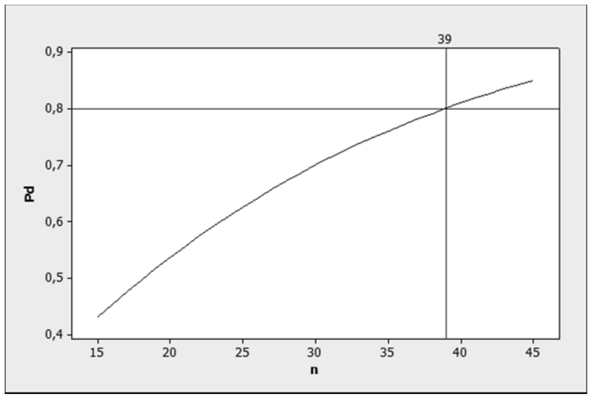
- Minitab:

```
Power and Sample Size

1-Sample t Test

Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 3,554

            Sample  Target
Difference    Size   Power  Actual Power
         1      80     0,8      0,802386
```

  - √ Tamanho amostra: n = 80
- Se a aproximação pela t for usada com os percentis de uma t com 79 graus de liberdade

$$n \approx \left(\frac{t_{0,20,80-1} + t_{0,05,80-1}}{d}\right)^2$$
$$\approx \left(\frac{0,846 + 1,665}{0,281}\right)^2 = 79,85$$

  - √ O Minitab tem procedimento iterativo para cálculo



√ n =39 é o menor tamanho amostral tal que β ≥ 0,80

Intervalo de Confiança para a Média – População Normal com Variância Desconhecida

Intervalo de Confiança para a Média, Variância Desconhecida

- Seja $\bar{x}$ a média de amostra aleatória, de tamanho n, oriunda de população normal com variância σ^2 desconhecida
  - √ Intervalo com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para μ:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Limites Unilaterais de Confiança

- São facéis de usar, como no caso dos intervalos de confiança construídos a partir da distribuição normal.
  - √ Limite superior com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para μ.

$$\mu \leq u = \bar{x} + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - √ Limite inferior com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para μ.

$$\bar{x} - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} = l \leq \mu$$

Exemplo 4-9

- Testes de adesão de liga U-700
  - √ Medidas de carga no ponto de falha de corpos de prova
  - √ Amostra de tamanho $n = 22$
  - √ Variância populacional desconhecida
  - √ Busca-se intervalo de 95% de confiança para a média populacional
  - √ Dados: *BD_producao.xlsx/adesao*

- Intervalo *t* de 95% de confiança para μ:
  - √ Parâmetro da t: 22 – 1 = 21 graus de liberdade

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$13,71 - 2,080\,\frac{3,55}{\sqrt{22}} \leq \mu \leq 13,71 + 2,080\,\frac{3,55}{\sqrt{22}}$$

$$12,14 \leq \mu \leq 15,28$$

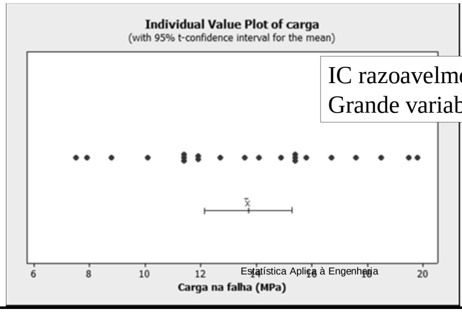
  - √ Intervalo é razoavelmente amplo
    - Há grande variabilidade nas medidas do teste tratativo de adesão

- Saída Minitab

Stat > Basic Statistics > 1–Sample t ➔

One-Sample T: carga

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI
carga	22	13,714	3,554	0,758	(12,138; 15,289)



IC razoavelmente largo
Grande variabilidade nas medidas

- Saída – Intervalo unilateral:

One-Sample T: carga

Limite inferior com 95% de confiança

Test of mu = 10 vs > 10

Variable	N	Mean	StDev	SE Mean	95% Lower Bound	T	P
carga	22	13,714	3,554	0,758	12,410	4,90	0,000

√ Limite inferior com 95% de confiança excede 10 MPa

- Rejeita-se H_0: $\mu = 10$ em favor de H_1: $\mu > 10$

Testes para Variância e Desvio-padrão – População Normal

Distribuição χ^2

√ Seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória proveniente de população normal, com média Média μ e variância σ^2. Seja S^2 a variância da amostra. Então a variável aleatória

$$X^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

√ tem distribuição qui-quadrado (χ^2) com n – 1 graus de liberdade

Distribuição χ^2 – Função de Densidade

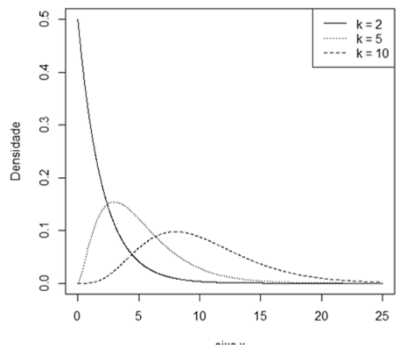
- Seja X uma variável aleatória com distribuição χ^2 com k graus de liberdade:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\ ,\ x > 0$$

√ k é o número de graus de liberdade

√ Média da distribuição χ^2: $\mathrm{E}[X] = k$

√ Variância da distribuição χ^2: $\mathrm{Var}[X] = 2k$



√ Distribuições unimodais e assimétricas à direita

√ À medida que k aumenta, distribuição torna-se mais simétrica

√ Forma limite da χ^2 = normal padrão quando k → ∞

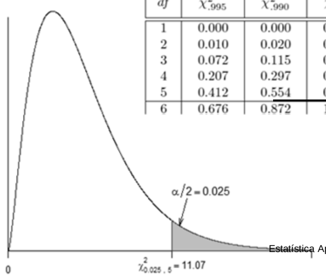
- $\chi^2_{\alpha,k}$: Percentis da χ^2:

√ Seja a variável aleatória $X^2 \sim \chi^2_k$, então $\mathrm{P}\{X^2 > \chi^2_{\alpha,k}\} = \alpha$

- Exemplo – Unilateral

√ α = 0,05 e k = 5

Distribuição de χ^2_5



df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	$\boxed{11.070}$	12.833
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449

$$\mathrm{P}\{\chi^2_5 > 11,070\} = 0,05$$

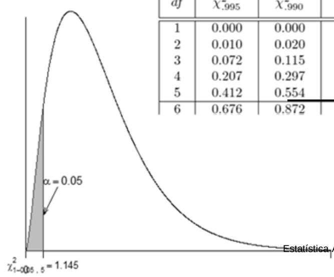
- $\chi^2_{\alpha,k}$: Percentis da χ^2:

√ Seja a variável aleatória $X^2 \sim \chi^2_k$, então $\mathrm{P}\{X^2 < \chi^2_{1-\alpha,k}\} = \alpha$

- Exemplo – Unilateral

√ α = 0,05 e k = 5

Distribuição de χ^2_5



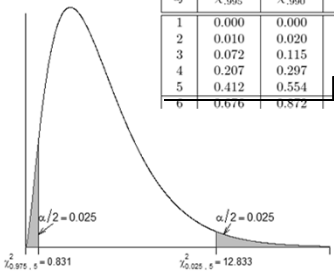
df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.412	0.554	0.831	$\boxed{1.145}$	1.610	9.236	11.070	12.833
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449

$$\mathrm{P}\{\chi^2_5 < 1,145\} = 0,05$$

A distribuição χ^2 não é simétrica!

- Exemplo – Bilateral:
  - √ $\alpha = 0{,}05$ e $k = 5$

Distribuição de χ^2_5



df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143
5	0.412	0.554	$\boxed{0.831}$	1.145	1.610	9.236	11.070	$\boxed{12.833}$
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449

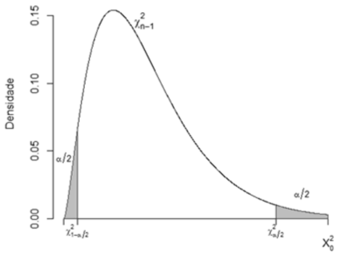
A distribuição χ^2 não é simétrica!

$$P\{\chi^2_5 > 12,833\} = 0,025$$
$$P\{\chi^2_5 < 0,831\} = 0,025$$
$$P\{0,831 \le \chi^2_5 \le 12,833\} = 0,95$$

Teste de Hipóteses para a Variância

- Seja uma amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n proveniente de uma única população **normal**.
- Hipóteses:
  - H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
  - H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Nível de significância do teste: α.
- Estatística de teste: $X_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$
  - √ S: desvio-padrão amostral

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. (alternativa bilateral)
  - √ $X_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$ ou $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$.

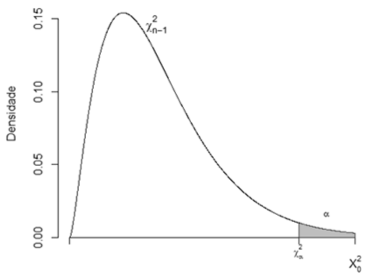


  - √ Pontos críticos: $\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$ e $\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$ ou $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$.

Hipótese Alternativa Unilateral Superior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
  - √ H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.
- Comentários:
  - √ Valores grandes de X_0^2 conduzem à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade superior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, n-1}$.

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$. (alternativa unilateral superior)
  - √ $X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, n-1}$.

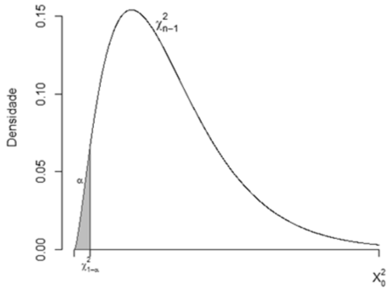


  - √ Pontos crítico: $\chi^2_{\alpha,\, n-1}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, n-1}$.

Hipótese Alternativa Unilateral Inferior

- Hipóteses:
  - √ H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
  - √ H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$.
- Comentários:
  - √ Valores pequenos de X_0^2 conduzem à rejeição de H_0.
  - √ Região crítica na extremidade inferior
  - √ Rejeição de H_0:
    - $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$.

- Região de rejeição:
  - √ H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$. (alternativa unilateral inferior)
  - √ $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$.



  - √ Pontos crítico: $\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$.
  - √ Regra de decisão:
    - Rejeitar H_0 se $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$.

Testes para Variância (População Normal)

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
- Estatística de teste: $X_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,\, n-1}$ ou $X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}$.
H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, n-1}$.
H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$X_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,\, n-1}$.

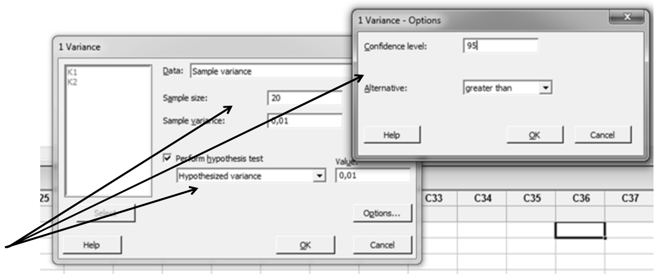
Exemplo 9-8

- Enchimento automático
  - √ Volume de garrafas de detergente
  - √ Amostra: 20 garrafas
  - √ Variância amostral: $s^2 = 0{,}0153$ (onça fluida)^2.
  - √ Proporção inaceitável de garrafas não conformes
    - $\sigma^2 > 0{,}01$ (onça fluida)^2.
  - √ Há evidências amostrais que sugira problemas na produção?
    - – Nível de significância do teste(α): 5%
    - – Suponha que o volume de enchimento populacional tenha distribuição normal

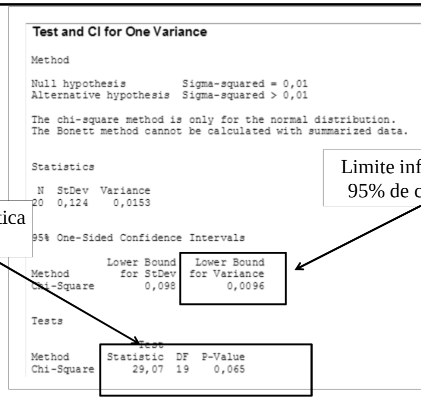
- Procedimento de teste:
  1. Parâmetro de interesse: variância da população (σ^2)
  2. H_0: $\sigma^2 = 0{,}01$
  3. H_1: $\sigma^2 > 0{,}01$
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $X_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$
  6. Rejeite H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{0,05;\,19} = 30{,}144$
  7. Estatística de teste observada: $X_0^2 = \dfrac{19(0{,}0153)}{0{,}01} = 29{,}07$
  8. Conclusão:
     - $X_0^2 = 29{,}07 < 30{,}144$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0
     - Concluímos, em um nível de 5% de significância, que não há evidência forte de que a variância no volume de enchimento excede 0,01 (onça fluida)^2.

- Minitab:

Stat > Basic Statistics > 1-Variance



- Saída:



```
Test and CI for One Variance

Method

Null hypothesis        Sigma-squared = 0,01
Alternative hypothesis Sigma-squared > 0,01

The chi-square method is only for the normal distribution.
The Bonett method cannot be calculated with summarized data.

Statistics

 N  StDev  Variance
20  0,124    0,0153

95% One-Sided Confidence Intervals

              Lower Bound  Lower Bound
Method          for StDev  for Variance
Chi-Square          0,098        0,0096

Tests

                 Test
Method      Statistic  DF  P-Value
Chi-Square      29,07  19    0,065
```

Estatística X_0^2

Limite inferior com 95% de confiança

- √ Limite inferior não excede 0,01 (95% de confiança)
  - Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $\sigma^2 = 0{,}01$
  - Valor-p confirma conclusão

Valor-p

- Menor nível de significância no qual H_0 seria rejeitada
- Para testes com a estatística X_0^2:
  - √ Cálculo do valor-p:

p	Teste	Hipóteses	
$2P\{\chi^2_{n-1} > (\text{ou} <) X_0^2\}^{(1)}$	Bilateral	$H_1: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
$P\{\chi^2_{n-1} > X_0^2\}$	Bilateral superior	$H_1: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
$P\{\chi^2_{n-1} < X_0^2\}$	Bilateral inferior	$H_1: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

√ χ^2_{n-1}: distribuição χ^2 com n–1 graus de liberdade

√ $^{(1)}$Mínimo($P\{\chi^2_{n-1} > X_0^2\}$, $P\{\chi^2_{n-1} > X_0^2\}$)

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: $H_1: \sigma^2 > 0{,}01$
  - √ Estatística de teste observada:
    - $X_0^2 = 29{,}07$

```
MTB > CDF 29,07;
SUBC> Chisq 19.

Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 19 DF

    x   P( X <= x )
29,07      0,935108
```

  - √ $p = P\{\chi^2_{19} > 29{,}07\} = 1 - 0{,}9351 = 0{,}0649$
- H_0: $\sigma^2 = 0{,}01$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0649$

- Cálculo do p-valor – Tabela:

df	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.990}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.950}$	$\chi^2_{.900}$	$\chi^2_{.100}$	$\chi^2_{.050}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.010}$	$\chi^2_{.005}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	$\boxed{27.204}$	$\boxed{30.144}$	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997

  - √ $X_0^2 = 29{,}07$ está entre 27,20 e 30,14
    - – Limites superior e inferior para o p-valor: 0,05 e 0,10

- Se H_1: $\sigma^2 \neq 0{,}01$
  - √ Limite inferior para p: 2(0,05) = 0,10
  - √ Limite superior para p: 2(0,10) = 0,20
  - √ 0,10 < p < 0,20

Intervalo de Confiança para a Média – População Normal com Variância Desconhecida

Intervalo de Confiança χ^2 para σ^2

√ População normal e variância desconhecida

$$X^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

– Não depende dos parâmetros desconhecidos μ e σ!

Então

$$\mathrm{P}\left\{ \chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)} \leq \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \leq \chi^2_{\alpha/2,(n-1)} \right\} = 1-\alpha$$

sendo $\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da χ^2, com n–1 graus de liberdade

logo

$$\mathrm{P}\left\{ \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}} \right\} = 1-\alpha$$

Intervalo de Confiança para a Variância

- Seja s^2 a variância de amostra aleatória de *n* observações provenientes de população normal com variância σ^2 desconhecida

√ Intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para σ^2:

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)}}$$

√ Intervalo com $100(1-\alpha)\%$ de confiança para σ:

$$\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)}}}$$

Limites Unilaterais de Confiança

- São fáceis de usar, como no caso dos intervalos de confiança construídos anteriormente para μ.

√ Limite superior com $(1-\alpha)100\%$ de confiança para σ^2.

$$\sigma^2 \leq u = \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{(1-\alpha),(n-1)}}$$

√ Limite inferior com $(1-\alpha)100\%$ de confiança para σ^2.

$$\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha,(n-1)}} = l \leq \sigma^2$$

Exemplo 8-6

- Enchimento garrafas de detergente:
  - √ Máquina automática para enchimento de garrafas de detergente
  - √ Amostra aleatória de 20 garrafas
  - √ Variância amostral: $s^2 = 0{,}0153$ (onça fluida)^2.
  - √ Se variância for muito grande, existirá proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia
  - √ Volume de enchimento distribuído de forma aproximadamente normal.

- Intervalo superior de confiança de 95% para σ^2:

$$\sigma^2 \leq \frac{(20-1)\, s^2}{\chi^2_{0,95,(20-1)}}$$

$$\sigma^2 \leq \frac{(19)\, 0,0153}{10,117} = 0,0287 \text{ (onça fluida)}^2$$

- Intervalo superior de confiança de 95% para σ:

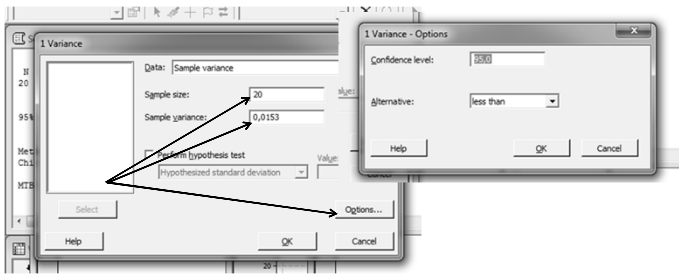
$$\sigma \leq \sqrt{\frac{(19)\, 0,0153}{10,117}}$$

$$\sigma \leq 0,17 \text{ onça fluida}$$

  - √ Com um nível de confiança de 95%, os dados indicam que o desvio-padrão do processo poderia ser tão grande quanto 0,17 onça fluida

- Minitab:
  - √ Comandos

Stat > Basic Statistics > 1–Sample t ➔



- √ Saída:

```
Test and CI for One Variance

Method

The chi-square method is only for the normal distribution.
The Bonett method cannot be calculated with summarized data.

Statistics

 N  StDev  Variance
20  0,124    0,0153

95% One-Sided Confidence Intervals

             Upper Bound   Upper Bound
Method        for StDev   for Variance
Chi-Square        0,170         0,0287
```

Inferência sobre a Proporção de uma População

Teste de Hipóteses para uma Proporção Binomial da População

- Seja uma amostra aleatória de tamanho n, retirada de uma grande população (possivelmente infinita).
  - √ p: proporção da população que pertence a categoria de interesse
  - √ X: número de observações amostrais que pertencem a essa categoria de interesse.
  - √ X ~ binomial(n, p)

- Hipóteses:
  - $H_0: p = p_0$
  - $H_1: p \neq p_0$
- Nível de significância do teste: α.
- Se H_0 for verdadeira:
  - √ X ~ binomial (n, p_0)
  - √ X: quantidade de itens da amostra que pertencem a categoria de interesse.
- Estatística para testar H_0:

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ Aproximação será boa para amostras grandes e se p não estiver muito próximo de 0 ou 1.

Testes Aproximados para Proporção Binomial

- Hipótese nula:
  - √ $H_0: p = p_0$.
- Estatística de teste: $Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
$H_1: p \neq p_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.
$H_1: p > p_0$	$z_0 > z_{\alpha}$.
$H_1: p < p_0$	$z_0 < -z_{\alpha}$.

Exemplo 9-10

- Controlador de Motor de Automóveis
  - √ Consumidor exige que fração defeituosos em etapa crítica de produção não exceda 0,05
  - √ Fabricante deve demonstrar capacidade de processo com α = 5%.
  - √ Amostra com 200 aparelhos
    - – 4 são defeituosos.
  - √ Fabricante pode demonstrar que processo é capaz?

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetro de interesse: fração de defeituosos (p)
  2. H_0: p = 0,05
  3. H_1: p < 0,05
  4. α = 0,05
  5. Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \overset{H_0}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$
  6. Rejeite H_0 se $z_0 < -z_{0,05} = -1{,}645$
  7. Estatística observada: $z_0 = \dfrac{4 - 200(0,05)}{\sqrt{200(0,05)(1-0,05)}} = -1,95$
  8. Conclusão:
     - $z_0 = -1{,}95 < -1{,}645$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Concluímos, em um nível de 5% de significância, que a fração de defeituosos do processo é menor do que 0,05.

Forma Alternativa da Estatística de Teste

- √ Estimador pontual de p: $\hat{P} = \dfrac{X}{n}$, com:

$\mu_{\hat{P}} = \mathrm{E}[\hat{P}] = p$ e $\sigma^2_{\hat{P}} = \mathrm{Var}[\hat{P}] = \dfrac{p(1-p)}{n}$

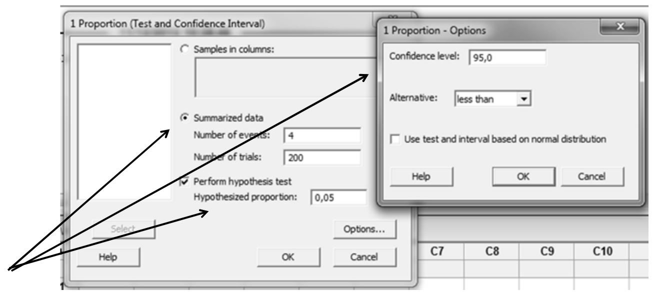
- √ Distribuição amostral aproximada da proporção amostral

$$\hat{P} \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}[\mu_{\hat{P}}, \sigma^2_{\hat{p}}]$$

  - Se p não estiver muito próximo de 0 ou 1 e se n for relativamente grande
  - Em geral, necessita-se que np e np(1 – p) ≥ 5
- Pacotes estatísticos trabalham em geral com proporção amostral

- Minitab:

Stat > Basic Statistics > 1-Proportion



- Saída – Distribuição exata:

Limite superior com 95% de confiança

```
Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,05 vs p < 0,05

                                95% Upper    Exact
Sample   X    N  Sample p         Bound  P-Value
1        4  200  0,020000      0,045180    0,026
```

√ Minitab utilizou a distribuição exata

√ Limite superior com 95% de confiança inferior a 0,05

- Rejeita-se H_0: $p = 0{,}05$, concluindo-se que H_1: $p < 0{,}05$ é verdadeira
- Valor-p confirma conclusão

- Saída – Distribuição aproximada:

Limite superior com 95% de confiança

```
Test and CI for One Proportion

Test of p = 0,05 vs p < 0,05

                               95% Upper
Sample   X    N  Sample p          Bound  Z-Value  P-Value
1        4  200  0,020000       0,036283    -1,95    0,026

Using the normal approximation.
The normal approximation may be inaccurate for small samples.
```

√ Minitab utilizou a aproximação pela normal para a construção do IC

√ Limite superior com 95% de confiança é menor que aquele obtido pela distribuição exata

- Rejeita-se H_0: $p = 0{,}05$, concluindo-se que H_1: $p < 0{,}05$ é verdadeira

Erro Tipo II

- Equações para aproximação da probabilidade de erro tipo II (β):

√ Probabilidade de erro tipo II (β) depende da escolha do tamanho da amostra

√ Probabilidade de erro tipo II para teste bilateral para a proporção binomial:

- H_1: $p \neq p_0$.

$$\beta = \Pr\left(-z_{\alpha/2} \le Z_0 \le z_{\alpha/2} | p \neq p_0\right)$$

$$= \Pr\left(p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \le \hat{p} \le p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \middle| p \neq p_0\right)$$

$$= \Pr\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

√ Probabilidade de erro tipo II para teste unilateral superior para a proporção binomial:

- H_1: $p > p_0$.

$$\beta = \Pr\left(Z_0 \le z_\alpha | p \ne p_0\right) = \Pr\left(\hat{p} \le p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \middle| p \ne p_0\right)$$

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

√ Probabilidade de erro tipo II para teste unilateral inferior para a proporção binomial:

- H_1: $p > p_0$.

$$\beta = \Pr\left[Z_0 > -z_\alpha | p \ne p_0\right] = \Pr\left(\hat{p} > p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \middle| p \ne p_0\right)$$

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

Escolha do Tamanho da Amostra

- Tamanho aproximado da amostra:
  - √ Hipótese alternativa bilateral (H_1: $p \ne p_0$)
- Probabilidade de erro tipo II:

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

√ Se $p > p_0$, então:

$$\beta \approx \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

√ Seja z_β o percentil 100β superior da normal padrão

$\beta = \Phi(-z_\beta)$

$$-z_\beta \approx \frac{p_0 - p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

- Tamanho aproximado da amostra para um teste bilateral para a proporção binomial

$$n \approx \left[\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right]^2$$

- Tamanho aproximado da amostra para um teste unilateral para a proporção binomial

$$n \approx \left[\frac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right]^2$$

Exemplo 9-11

(Continuação Ex. 9-10)

- Controlador de Motor de Automóveis
  - √ Consumidor exige que fração defeituosos em etapa crítica de produção não exceda 0,05
  - √ Nível de significância do teste (α): 5%
  - √ Amostra com 200 aparelhos
  - √ Fração defeituosa do processo é realmente p = 0,03.
  - √ Qual a probabilidade de erro tipo II (β)?

- Probabilidade de erro tipo II (β):

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_\alpha\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0,05 - 0,03 - (1,645)\sqrt{\dfrac{0,05(1-0,05)}{200}}}{\sqrt{\dfrac{0,03(1-0,03)}{200}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-0,44) = 0,67$$

- √ Poder do teste: Pd = 1 – β = 0,33
- √ A diferença entre p_0 e p é relativamente pequena
- √ A amostra não é particularmente grande

- Fabricante aceita a aceitar erro b tão grande quanto 0,10, se o valor verdadeiro for p = 0,03
- Qual o tamanho da amostra?

$$n \approx \left[\frac{z_\alpha\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right]^2$$

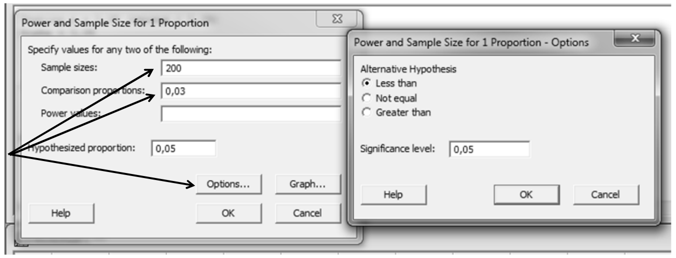
$$\approx \left[\frac{(1,645)\sqrt{0,05(0,95)} + 1,28\sqrt{0,03(0,97)}}{0,03 - 0,05}\right]^2$$

$$\approx 832$$

√ Tenta-se detectar desvio razoavelmente pequeno ➔ a amostra tem tamanho grande

- Cálculo Poder - Minitab

Stat > Power and Sample Size > 1 Proportion



- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Proporção verdadeira: 0,03
    - Tamanho amostra: 200

```
Power and Sample Size

Test for One Proportion

Testing p = 0,05 (versus < 0,05)
Alpha = 0,05

                  Sample
Comparison p        Size      Power
        0,03         200   0,328725
```

  - √ Poder = 0,3287 ➔ β = 0,6713
- Minitab realiza cálculo exato de β.

- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Proporção verdadeira: 0,03
    - Poder: 0,90

```
Power and Sample Size

Test for One Proportion

Testing p = 0,05 (versus < 0,05)
Alpha = 0,05

                 Sample  Target
Comparison p       Size   Power  Actual Power
        0,03        833     0,9      0,900135
```

  - √ Tamanho amostra n = 833
  - √ Dados:
    - Proporção verdadeira: 0,03
    - Poder: 0,75

```
Power and Sample Size

Test for One Proportion

Testing p = 0,05 (versus < 0,05)
Alpha = 0,05

                 Sample  Target
Comparison p       Size   Power  Actual Power
        0,03        561    0,75      0,750302
```

  - √ Tamanho amostra n = 561
- Tamanho amostrais grandes pois diferença entre proporções é pequena.

Intervalo de Confiança para a Média – População Normal com Variância Desconhecida

Intervalo Aproximado de Confiança para *p*

√ Aproximação normal para uma proporção binomial

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{as.}{\approx} \mathrm{N}(0,1)$$

- Se *n* for grande o suficiente
- Depende do parâmetro desconhecido *p*.

Então

$$\mathrm{P}\left\{ -z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2} \right\} \approx 1 - \alpha$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da normal padrão

logo

$$\mathrm{P}\left\{ \hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\} \approx 1 - \alpha$$

- Infelizmente os limites superior e inferior do intervalo contêm o parâmetro desconhecido *p*!
- Uma solução satisfatória é trocar p por $\hat{P}$

$$P\left\{\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right\} \approx 1-\alpha$$

Intervalo de Confiança para uma Proporção Binomial

- Seja $\hat{p}$ a proporção de observações em uma amostra aleatória, de tamanho *n* que pertença a uma classe de interesse
  - √ Intervalo aproximado com 100(1 – α)% de confiança para *p*:

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

  - √ Requer que np e $n(1 - p) \geq 5$
  - √ Nos casos em que *n* for pequeno , deve-se usar outros métodos (numéricos ou baseados na binomial)

Exemplo 8-7

- Mancais de eixos de manivelas de motores
  - √ Amostra de tamanho 85
  - √ 10 motores da amostra têm acabamento mais rugoso que o especificado
  - √ Estimativa pontual da proporção populacional de mancais não-conformes

$$\hat{p} = \frac{10}{85} = 0,12$$

- Intervalo bilateral de 95% de confiança para *p*:

$$\hat{p} - z_{0,025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{0,025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0,12 - 1,96\sqrt{\frac{(0,12)(0,88)}{85}} \leq p \leq 0,12 + 1,96\sqrt{\frac{(0,12)(0,88)}{85}}$$

$$0,05 \leq p \leq 0,19$$

Escolha do Tamanho da Amostra

- Precisão do IC: $2\left(z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$
- Erro ao usar $\hat{P}$ para estimar p: $\mathrm{E} = |\hat{P} - p|$
- Tamanho da amostra:
  - √ Escolher n tal que $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \mathrm{E}$
  - √ Comprimento do intervalo resultante: 2E

- Tamanho da amostra com erro especificado:
  - √ Se $\hat{p}$ for usada como estimativa de p, podemos estar $(1 - \alpha)100\%$ confiantes de que o erro $|\hat{p} - p|$ não excederá o valor E especificado quando o tamanho da amostra for

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\mathrm{E}}\right)^2 p(1-p)$$

    - Deve ser arredondado para número inteiro
  - √ É necessária uma estimativa para cálculo de n:
    - Pode-se usar estimativa $\hat{p}$ de amostra anterior
    - Pode-se utilizar uma amostragem preliminar (piloto)

- O máximo de $p(1 - p)$ ocorre quando $p = 0{,}5$
  - √ Pode-se usar este fato no cálculo de n

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\mathrm{E}}\right)^2 (0,25)$$

  - √ É um cálculo conservativo, ou seja, estamos no mínimo 100(1 – a)% confiantes de que o erro em estimar $\hat{p}$ através de p é menor do que E, se o tamanho da amostra for n.

Exemplo 8-8

- Mancais de eixos de manivela (cont. Ex. 8-7)
  - √ Determinar tamanho amostra que o erro de estimação seja menor que 0,05, com uma confiança de 95%

$$n = \left(\frac{z_{0,025}}{\mathrm{E}}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 0,12(0,88) \approx 163$$

  - √ Se quisermos estar no **mínimo** 95% confiantes:

$$n = \left(\frac{z_{0,025}}{\mathrm{E}}\right)^2 (0,25) = \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 (0,25) \approx 385$$

Limites Unilaterais de Confiança

- Pode-se encontrar limites unilaterais aproximados de confiança para *p*.
  - √ Limite superior com $(1-\alpha)100\%$ de confiança para *p*.

$$p \leq u = \hat{p} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

  - √ Limite inferior com $(1-\alpha)100\%$ de confiança para *p*.

$$\hat{p} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = l \leq p$$

Gráficos de Probabilidade

- Como saber se uma distribuição de probabilidades é um modelo razoável para os dados?
  - √ Pode-se fazer uma verificação de suposições:
    - Forma da distribuição, frequência esperada das observações
- Verificação gráfica:
  - √ Histogramas
    - Dão uma ideia da forma da distribuição,
    - Em geral não são indicadores confiáveis

      (a menos que o tamanho amostral seja grande)

- Gráfico de probabilidades:
  - √ Procedimento geral é simples
  - √ Mais confiável que histograma para tamanhos amostrais pequenos ou moderados
  - √ Usa eixos especiais, projetados para a distribuição hipotética

- Procedimento:
  - √ Ordenação das observações amostrais:
    - $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$.
  - √ Plotam-se os pontos ($x_{(j)}$; $(j – 0,5)/n$)
    (observação, frequência acumulada observação)
  - √ Usa-se uma escala de probabilidade
  - √ Distribuição descreve adequadamente os dados:
    - pontos cairão, aproximadamente, ao longo de uma linha reta
  - √ Modelo hipotético não é apropriado
    – os pontos desviam-se significativamente de uma linha reta
  - √ É subjetivo determinar se os pontos seguem ou não uma linha reta!

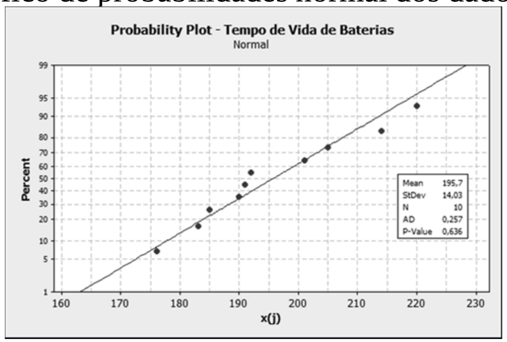
Exemplo 6-7

- Observações sobre tempo de vida de bateria (min.)
  - √ O modelo normal é adequado aos dados?

j	$x_{(j)}$	(j – 0,5)/10	z_j
1	176	0,05	–1,64
2	183	0,15	–1,04
3	185	0,25	–0,67
4	190	0,35	–0,39
5	191	0,45	–0,13
6	192	0,55	0,13
7	201	0,65	0,39
8	205	0,75	0,67
9	214	0,85	1,04
10	220	0,95	1,67

$$\frac{j-0,5}{n} = \mathrm{P}\{Z \le z_j\} = \Phi(z_j)$$

- Gráfico de probabilidades normal dos dados:



  - √ Ser mais influenciado pelos pontos do meio que pelos dos extremos
  - √ Eixo y com escala de probabilidades (escala z)

- Pode ser também construído como:
  - √ $x_{(j)}$ vs. escores padronizados (z_j):

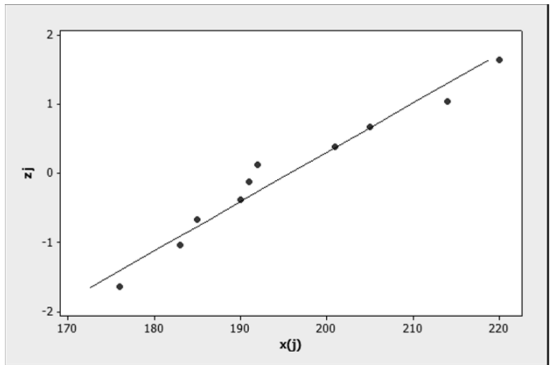
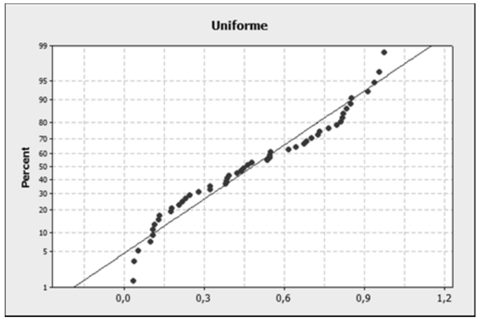


Gráfico de Probabilidades Normal

- Pode ser útil na identificação de distribuições que sejam simétricas mas que tenham caudas mais pesadas (ou mais leves) que a normal

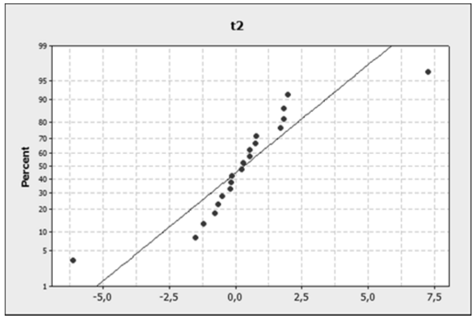
- Distribuição de cauda leve



√ Pontos à esquerda tendem a ficar abaixo da linha e à direita tendem a ficar acima

– As menores e maiores observações não serão tão extremas como se esperaria de uma normal

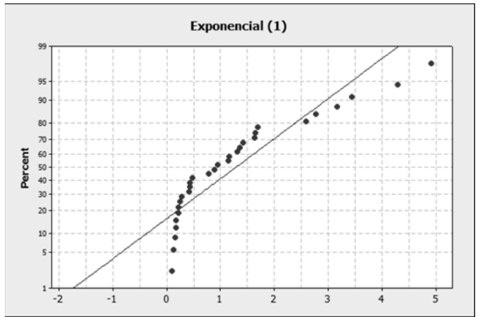
- Distribuição de cauda pesada



√ Pontos à esquerda tendem a ficar acima da linha e à direita tendem a ficar abaixo

√ Gráfico em forma de S

- Distribuição assimétrica



√ Pontos de ambas as extremidades tendem a estar abaixo da linha

√ Gráfico tem forma curvada

Testes de Adequação de um Ajuste

Teste χ^2 de Adequação de Ajuste

- Teste de Adequação de Ajuste baseado na distribuição χ^2:
  - √ Amostra aleatória de tamanho n oriunda de população com distribuição desconhecida
  - √ Construção de histograma de frequências das n observações, com k classes

- Notação:
  - √ O_i: frequência observada na i-ésima classe
  - √ E_i: frequência esperada na i-ésima classe (sob H_0)
- Estatística de Teste para Adequação de Ajuste

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

- Distribuição amostral:

$$X_0^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{k-p-1}$$

  - √ k: quantidade de classes
  - √ p: número de parâmetros desconhecidos da distribuição (sob H_0)

- Regra de decisão:
  - √ Rejeitar H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{\alpha,\, k-p-1}$.
- Comentários:
  - √ Se as frequências esperadas forem muito pequenas, X_0^2 não refletirá o desvio entre o observado e o esperado
  - √ Os valores de 3, 4 e 5 são usados como mínimo

Exemplo 9-12

- Defeitos em placa de circuito impresso
  - √ Supõe-se que os defeitos seguem uma distribuição de Poisson
    - – Parâmetro desconhecido tem de ser estimado a partir dos dados amostrais
  - √ Amostra aleatória com 60 placas impressas

√ Dados amostrais e cálculo das frequências esperadas

Número de Defeitos	Frequência Observada	Probabilidade	Frequência Esperada
0	32	0,472	28,32
1	15	0,354	21,24
2	9	0,133	7,98
3 (ou mais)	4	0,041	2,46

$$E_i = np_i = 60\,p_i$$

< 3

– Quantidade média de defeitos por placa:

$$\hat{\lambda} = \frac{(32)(0) + (15)(1) + (9)(2) + (4)(3)}{60} = 0,75$$

– Cálculo probabilidades (sob H_0):

$$p_1 = P\{X = 0\} = \frac{e^{-0,75}(0,75)^0}{0!} = 0,472 \qquad p_3 = P\{X = 2\} = \frac{e^{-0,75}(0,75)^2}{2!} = 0,133$$

$$p_2 = P\{X = 1\} = \frac{e^{-0,75}(0,75)^1}{1!} = 0,354 \qquad p_4 = P\{X \geq 3\} = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0,041$$

√ Tabela com combinação das duas última células:

Número de Defeitos	Frequência Observada	Probabilidade	Frequência Esperada
0	32	0,472	28,32
1	15	0,354	21,24
2 (ou mais)	13	0,174	10,44

- Procedimento de teste:
  1. Variável de interesse: número de defeitos em placas
  2. H_0: forma da distribuição de defeitos é Poisson
  3. H_1: forma da distribuição de defeitos não é Poisson
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
  6. Rejeite H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{0,05;\,1} = 3,84$
  7. Estatística observada:
     $$X_0^2 = \frac{(32 - 28,32)^2}{28,32} + \frac{(15 - 21,24)^2}{21,24} + \frac{(13 - 10,44)^2}{10,44} = 2,94$$
  8. Conclusão:
     - $X_0^2 = 2,94 < 3,84$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0 de que a distribuição de defeitos nas placas de circuito impresso é Poisson.

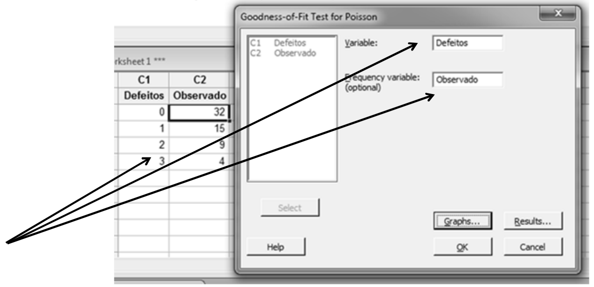
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ Estatística de teste observada:
    - $X_0^2 = 2,94$

```
MTB > CDF 2,94;
SUBC> Chisq 1.

Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 1 DF

   x  P( X <= x )
2,94     0,913589
```

  - √ $= P\{\chi^2_1 > 2,94\} = 1 – 0,913589 = 0,0864$
- Não há evidência amostral para se rejeitar H_0.

- Teste de Adequação de Ajuste - Poisson

Stat > Basic Statistics > Goodness-of-Fit Test for Poisson



- Saída – Minitab:

```
Goodness-of-Fit Test for Poisson Distribution

Data column: Defeitos
Frequency column: Observado

Poisson mean for Defeitos = 0,75

                     Poisson             Contribution
Defeitos  Observed  Probability  Expected   to Chi-Sq
0               32     0,472367   28,3420     0,47213
1               15     0,354275   21,2565     1,84149
2                9     0,132853    7,9712     0,13279
>=3              4     0,040505    2,4303     1,01380


 N  N*  DF   Chi-Sq  P-Value
60   0   2  3,46021    0,177

1 cell(s) (25,00%) with expected value(s) less than 5.
```

  - √ Procedimento prejudicado
    - – Célula com frequência esperada menor que 5

- Saída – Minitab:
  - √ Combinação duas últimas células
    - – Minitab executa teste apenas por meio de comando manual no *prompt*.

```
MTB > PGoodness 'Defeitos';
SUBC>   Frequencies 'Observado';
SUBC>   mean 0,75;
SUBC>  GBar;
SUBC>  GChiSQ;
SUBC>      Pareto;
SUBC>   RTable.

Goodness-of-Fit Test for Poisson Distribution

Data column: Defeitos
Frequency column: Observado

Poisson mean for Defeitos = 0,75

                     Poisson             Contribution
Defeitos  Observed  Probability  Expected   to Chi-Sq
0               32     0,472367   28,3420     0,47213
1               15     0,354275   21,2565     1,84149
>=2             13     0,173359   10,4015     0,64915


 N  N*  DF   Chi-Sq  P-Value
60   0   2  2,96277    0,227
```

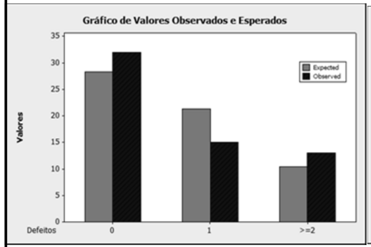
  - √ Importante:
    - – O p-valor deve ser recalculado pois dessa maneira a rotina considera o parâmetro como conhecido!

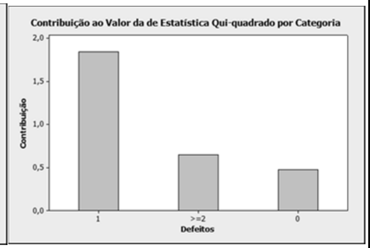
- Correção dos graus de liberdade da distribuição:
  - √ Estatística de teste observada:
    - $X_0^2 = 2{,}96277$

```
MTB > CDF 2,96277;
SUBC> Chisq 1.

Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 1 DF

      x  P( X <= x )
2,96277     0,914798
```

  - √ $= P\{\chi^2_1 > 2{,}94\} = 1 - 0{,}914798 = 0{,}0852$
- Não há evidência amostral para se rejeitar H_0.

√ Gráficos do procedimento de teste





Exemplo 9-13

- Teste em suprimento de energia em notebook
  - √ Suposição: tensão de saída tem distribuição normal
  - √ Amostra com n = 100 unidades
    - Média amostral: 5,04 V
    - Desvio-padrão amostral: 0,08 V
- Prática comum:
  - √ Escolher limites das células de modo que as frequências esperadas sejam iguais

    ($p_1 = p_2 = ... = p_k$)

$$p_i = P\{a_{i-1} \le X \le a_i\} = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x$$

√ Dados amostrais e cálculo das frequências esperadas

Intervalo de classe	Frequência Observada	Probabilidade	Frequência Esperada
$x < 4{,}948$	12	1/8 = 0,125	12,5
$4{,}948 \le x < 4{,}986$	14	0,125	12,5
$4{,}986 \le x < 5{,}014$	12	0,125	12,5
$5{,}014 \le x < 5{,}040$	13	0,125	12,5
$5{,}040 \le x < 5{,}066$	12	0,125	12,5
$5{,}066 \le x < 5{,}094$	11	0,125	12,5
$5{,}094 \le x < 5{,}132$	12	0,125	12,5
$x \ge 5{,}132$	14	0,125	12,5
Total	100	0,125	100

- Intervalos igualmente prováveis da normal padrão:
  - [0; 0,32), [0,32; 0,675); [0,675; 1,15) e [1,15; ∞) e seus ‘espelhos’
- Limite do primeiro intervalo: $\bar{x} - 1,15s = 4,948$
- Limites do segundo intervalo: $[\bar{x} - 1,15s, \bar{x} - 0,675s] = [4,948; 4,986]$

- Procedimento de teste:
  1. Variável de interesse: voltagem do suprimento
  2. H_0: forma da distribuição de defeitos é normal
  3. H_1: forma da distribuição de defeitos não é normal
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
  6. Rejeite H_0 se $X_0^2 > \chi^2_{0,05;\,5} = 11{,}07$
  7. Estatística observada:

$$X_0^2 = \frac{(12-12,5)^2}{12,5} + \frac{(14-12,5)^2}{12,5} + \cdots + \frac{(14-12,5)^2}{12,5} = 0,64$$

  8. Conclusão:
     - $X_0^2 = 0{,}64 < 11{,}07$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0 e não evidência forte para indicar que a voltagem de saída não seja normalmente distribuída.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ Estatística de teste observada:
    - $X_0^2 = 0{,}64$

```
MTB > CDF 0,64;
SUBC> Chisq 5.

Cumulative Distribution Function

Chi-Square with 5 DF

   x  P( X <= x )
0,64    0,0139013
```

  - √ $= P\{\chi^2_5 > 0{,}64\} = 1 - 0{,}01391 = 0{,}9861$
- Não há evidência amostral para se rejeitar H_0.

Referências

Bibliografia Recomendada

- Montgomery, D. C. (LTC)

  Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros

- Pinheiro, J. I. D et al. (Campus)

  Probabilidade e Estatística: Quantificando a Incerteza