Inferência Estatística para Duas Amostras

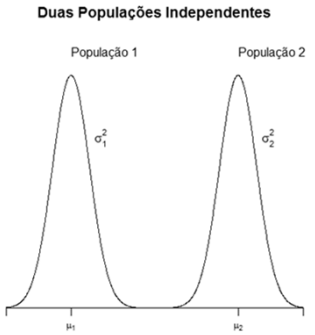
Roteiro

1. Introdução
2. Inferência para a Diferença de Médias
   i. População normal com variâncias conhecidas
   ii. População normal com variâncias desconhecidas
3. Teste *t* Emparelhado
4. Inferência para as Variâncias de Duas Populações
5. Inferência para as Proporções de Duas Populações
6. Roteiro dos Procedimentos de Inferência
7. Referências

Introdução

Situação Geral

- População 1:
  - √ Média μ_1 e variância σ_1^2.
  - √ Amostra de tamanho n_1.
    - $X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n1}$.
- População 2:
  - √ Média μ_2 e variância σ_2^2.
  - √ Amostra de tamanho n_2.
    - $X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n2}$.
- Objetivo das aplicações:
  - √ Estudar a diferenças nos parâmetros das 2 populações



- Aplicação – Experimento planejado:
  - √ Comparar condições diferentes (deliberadas e propositais), verificando se elas produzem efeitos estatísticos na resposta
  - √ Condições são chamadas **tratamentos**.
- Experimento comparativo:
  - √ Controlam-se os tratamentos e observa-se a variação na variável resposta.
- Relação de causa-e-efeito
  - √ Verifica-se significância estatística em resposta de experimento aleatório
  - √ Conclusão:
    - Diferença nos tratamentos resultou na diferença na resposta

Exemplo

- Experimento completamente aleatorizado:
  - √ Duas formulações de tintas
  - √ Resposta: tempo de secagem
  - √ Objetivo do estudo:
    - Nova formulação resulta em efeito significativo?
  - √ Amostras
    - 10 espécimes de teste a cada uma das formulações
  - √ Procedimento:
    - Aplicação aleatória das formulações nos 20 espécimes

- Aplicação – Estudo observacional:
  - √ Avaliam se há associação entre um determinado fator e uma resposta, sem, entretanto, intervir diretamente na relação analisada.
  - √ Indivíduos da amostra não foram designados aos grupos por processo aleatório, mas já estavam classificados nos respectivos grupos, no início da pesquisa.
- Relação de causa-e-efeito
  - √ Difícil identificar causalidade
    - Diferença estatisticamente observada na resposta pode ser devida a algum outro fator (ou grupo de fatores) não devido aos tratamentos que não foi equalizado pela aleatorização.

Exemplo

- Níveis de ferro no corpo e risco cardíaco
  - √ Amostra de 1931 homens
  - √ Rastreamento ao longo de 5 anos
  - √ Verificação de efeito significativo de níveis crescentes de ferro na incidência de ataques cardíacos
  - √ Comparada incidência de ataques cardíacos nos grupos (tratamentos): “nível baixo de ferro” e “nível alto de ferro”
  - √ Os indivíduos não foram alocados aleatoriamente em cada grupo
- Diferença no risco cardíaco pode ser atribuída a outro fator fundamental (colesterol, por exemplo)

Inferência na Diferença de Médias – População Normal com Variâncias Conhecidas

Suposições

- Amostras:
  - √ População 1: $X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n1}$.
  - √ População 2: $X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n2}$.
- Populações (X_1 e X_2) independentes
- Populações normais
- Variâncias conhecidas (σ_1^2 e σ_2^2)
- Objetivo
  - √ Inferência estatística para diferença de médias $\mu_1 - \mu_2$.

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Estimador natural: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$
- Esperança: $\mathrm{E}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$
- Variância: $\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- A grandeza: $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

tem distribuição normal padrão

Teste de Hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha/2}$ ou $z_0 < -z_{\alpha/2}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z_0 > z_{\alpha}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z_0 < -z_{\alpha}$.

Exemplo 10-1

- Tempo de secagem de uma tinta:
  - √ Deseja-se reduzir tempo de secagem de um zarcão
  - √ Formulações testadas:
    1. Química-padrão
    2. Acrescentado novo ingrediente para secagem
  - √ σ = 8 min. (dados históricos)
    - Variabilidade não deve ser afetada por novo ingrediente
  - √ Amostras:
    - Formulação 1: 10 espécimes
    - Formulação 2: 10 espécimes
  - √ Os 20 espécimes são pintados em ordem aleatória

- Dados amostrais:
  - √ Tempos médios de secagem:

Química-padrão		Formulação nova	
n_1	$\bar{x}_1$	n_2	$\bar{x}_2$
10	121 min.	10	112 min.

- Quais conclusões sobre a eficiência do novo ingrediente?
  - √ Nível de significância do teste (α): 5%

- Procedimento de teste:
  1. Grandeza de interesse: diferença nos tempos médios de secagem ($\mu_1 - \mu_2$) e $\Delta_0 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 > \mu_2$. Rejeição H_0 se fórmula 2 reduzir tempo
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$
  6. Rejeite H_0 se $z_0 > z_{0,05} = 1{,}645$
  7. Estatística de teste observada: $$z_0 = \frac{121 - 112}{\sqrt{\frac{(8)^2}{10} + \frac{(8)^2}{10}}} = 2{,}52$$
  8. Conclusão:
     - $z_0 = 2{,}52 > 1{,}645$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Concluímos, com α = 5%, que a adição do novo ingrediente à tinta reduz significativamente o tempo de secagem.

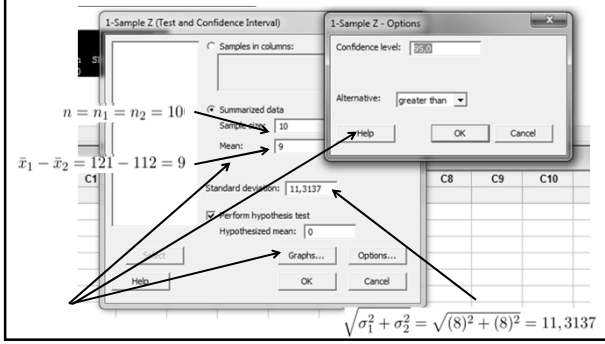
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 > \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 2{,}52$

```
MTB > CDF 2,52;
SUBC> Normal.

Cumulative Distribution Function

Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

     x  P( X <= x )
2,52     0,994132
```

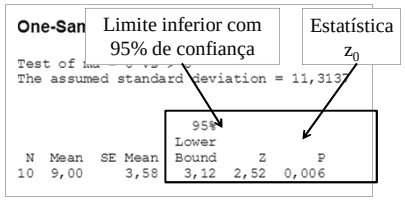
  - √ p = P{Z > 2,52} = 1 – Φ(2,52) = 1 – 0,9941 = 0,0059
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}0059$

- Minitab:
  - √ Não possui comando para execução de teste Z de diferença de médias
  - √ Possível utilizar teste Z para uma amostra!

Stat > Basic Statstics > 1-Sample Z



- Saída:



  - √ Limite inferior com 95% de confiança excede 0
    - Rejeita-se H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$, concluindo-se que H_1: $\mu_1 > \mu_2$ é verdadeira
    - Valor-p confirma conclusão

Teste para Amostras Grandes

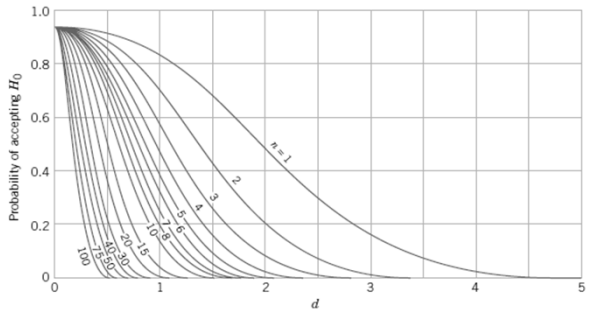
- Na maioria das situações práticas:
  - √ σ_1^2 σ_2^2 são desconhecidas.
  - √ Não podemos estar certo que a população seja bem modelada por uma distribuição normal
- Se as amostras forem grandes (n_1 e $n_2 > 40$):
  - √ Pode-se substituir σ_1 e σ_2 pelos desvios-padrão amostrais s_1 e s_2.
  - √ Usa-se a estatística Z_0 para teste de hipótese sobre média da população
    - Baseado no TCL

Curvas Características de Operação

- Curvas de β vs. um parâmetro d, para vários tamanhos amostrais
  - √ Gráficos VIIa, VIIb, VIIc e VIId – Apêndice
  - √ Curvas para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$
- Parâmetro d: $d = \frac{|\mu_1 - \mu_2 - \Delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|\Delta - \Delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$
  - √ d: Fator de não centralidade
  - √ Tem-se de escolher tamanhos iguais de amostra
  - √ Conjunto de curvas características pode ser usado para todos os problemas, independente dos valores de μ_0 e σ.

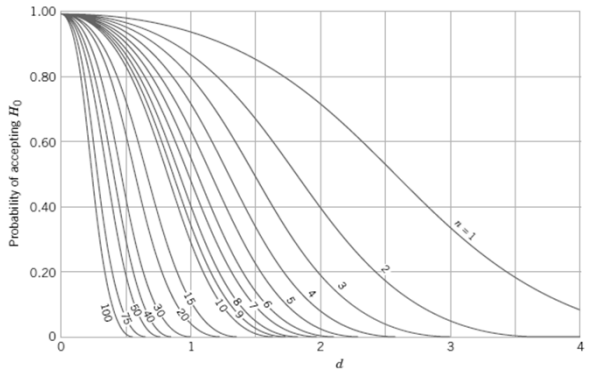
- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$

Chart VI Operating Characteristic Curves



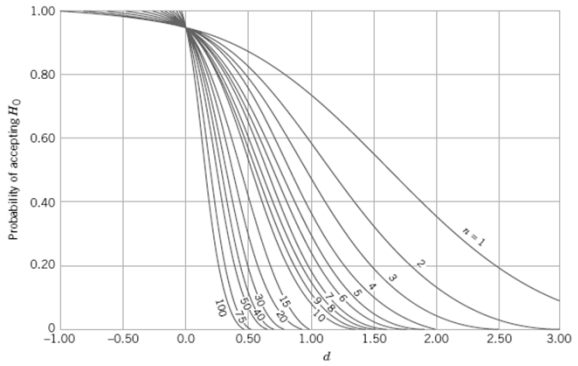
(*a*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,01$



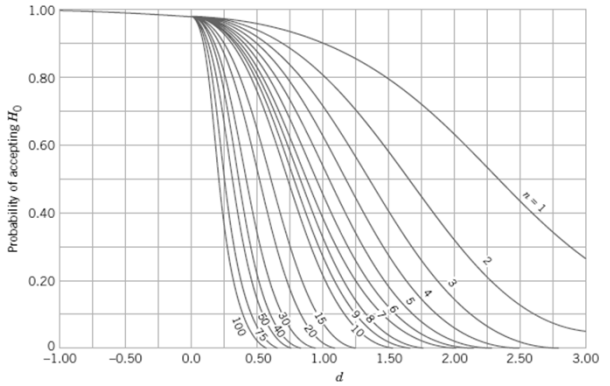
(*b*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



(*c*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0,01$



(*d*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

Tamanhos Amostrais Desiguais

- Situações usuais:
  - √ Os custos de coleta de dados podem ser substancialmente diferentes entre as duas populações
  - √ A variância de uma população pode ser bem maior que a outra.
  - √ Nesses casos, são utilizadas amostras de tamanhos diferentes

Curvas Características Operacionais

- Valor equivalente de *n* (se $n_1 \neq n_2$):

$$n = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

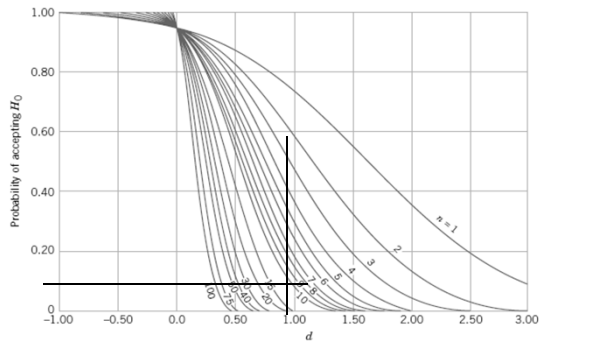
  - √ Caso n_1 e n_2 tenham sido fixados previamente
  - √ As curvas CO são usadas com um *d* especificado de modo a obter β.

- Se *d* é conhecido e for necessário determinar n_1 e n_2 para obter um β^* especificado:
  - √ Escolhem-se valores para n_1 e n_2.
  - √ Calcula-se o valor equivalente de *n*.
  - √ Determina-se β na curva CO correspondente
  - √ Se $\beta = \beta^*$.
    - Os valores escolhidos de n_1 e n_2 são satisfatórios
  - √ Se $\beta \neq \beta^*$.
    - Ajustam-se os valores de n_1 e n_2, repetindo-se o processo.

Exemplo 10-2

- Tempo de secagem de uma tinta
  - √ Tamanho de amostra a partir das curvas CO
  - √ Diferença verdadeira nos tempos de secagem tão grande quanto 10 minutos
    ($\Delta = 10$)
  - √ Poder do teste de no mínimo 0,9, com $\alpha = 5\%$
  - √ Valor do parâmetro da abcissa:

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2 - \Delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{|\Delta - \Delta_0|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{10}{\sqrt{8^2 + 8^2}} = 0,88$$



(c) *O.C.* curves for different values of n for the one-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

√ Tamanho amostra: $n = n_1 = n_2 \approx 11$

Tamanho de Amostra – Fórmulas

- Suposições:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ é falsa
  - √ Diferença verdadeira é $\mu_1 - \mu_2 = \Delta$. $\Delta > \Delta_0$.
- Interesse:
  - √ Obter tamanho de amostra que leve a um valor específico de probabilidade de erro tipo II, β, para uma dada diferença de médias Δ, com um nível de significância α.

- Expressão para o erro β para a alternativa bilateral

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$

√ Cálculo de tamanho de amostra é similar ao caso de uma única amostra

- Tamanho de amostra para um teste bilateral para a diferença de médias, com $n_1 = n_2$ e variâncias conhecidas
  - √ Diferença verdadeira nas médias: Δ.
  - √ Poder de no mínimo $1 - \beta$.

$$n \approx \frac{(z_\beta + z_{\alpha/2})^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\Delta - \Delta_0)^2}$$

√ A expressão de β pode ser obtida para o caso em que $n = n_1 = n_2$.

Exemplo 10-3

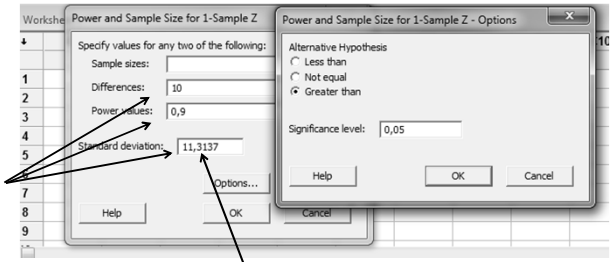
- Tempo de secagem de uma tinta
  - √ Diferença verdadeira nos tempos de secagem tão grande quanto 10 minutos
    ($\Delta = 10$)
  - √ Poder do teste de no mínimo 0,9, com $\alpha = 5\%$
  - √ Determinação tamanho amostra:

$$n \approx \frac{(z_\beta + z_\alpha)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\Delta - \Delta_0)^2} = \frac{(1,645 + 1,28)^2[(8)^2 + (8)^2]}{(10 - 0)^2} = 11$$

  - $z_\alpha = z_{0,05} = 1,645$ e $z_\beta = z_{0,10} = 1,28$

- Cálculo tamanho da amostra - Minitab

Stat > Power and Sample Size > 1-Sample Z



$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(8)^2 + (8)^2} = 11,3137$$

- Saída – Minitab
  - √ Dados:
    - Diferença: 10
    - Poder: 0,90
    - Nível de significância (α): 5%

Power and Sample Size

```
1-Sample Z Test

Testing mean = null (versus > null)
Calculating power for mean = null + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 11,3137
```

Difference	Sample Size	Target Power	Actual Power
10	11	0,9	0,900893

- Determinação intervalo de confiança para $\mu_1 - \mu_2$
  - √ Para amostras provenientes de populações normais com variâncias conhecidas:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ então:

$$\mathrm{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mathrm{P}\left\{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = 1 - \alpha$$

Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Conhecidas

- Seja $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas.
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com α/2(100)% da normal padrão

Exemplo 10-4

- Resistência à tensão no alumínio:
  - √ Testes de resistência à tensão em dois tipos diferentes de estruturas de alumínio usadas na fabricação de asas de avião
  - √ Desvios-padrão considerados conhecidos:
    - Experiências passadas com processo de fabricação e testes
    - $\sigma_1 = 1$ e $\sigma_2 = 1{,}5$
  - √ Dados amostrais obtidos:

Estrutura 1		Estrutura 2	
n_1	$\bar{x}_1$	n_2	$\bar{x}_2$
10	87,6	12	74,5

- √ Intervalo de 90% de confiança para a diferença da resistência média $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$87,6 - 74,5 \pm 1,645\sqrt{\frac{(1)^2}{10} + \frac{(1,5)^2}{12}} = 13,1 \pm 0,882$$

- √ Intervalo com 90% de confiança para a resistência média à tensão (kgf/mm²)

$$[12,128 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 13,982$$

- Conclusões:
  - √ O IC não inclui o zero
    - – É significativa a diferença entre a resistência média das estrutura 1 e 2.
  - √ Estamos 90% confiantes que a resitência média da estrutura 1 excede a resistência média da estrutura 2 por um valor entre 12,22 e 13,98 kgf/mm².

Escolha do Tamanho da Amostra

- Se os desvios-padrão σ_1 e σ_2 forem conhecidos e os dois tamanhos das amostras n_1 e n_2 forem iguais ($n_1 = n_2 = n$)
  - √ Determinação do tamanho das amostras de modo que o erro em estimar $\mu_1 - \mu_2$ seja menor que E com uma confiança $100(1 - \alpha)\%$

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\mathrm{E}}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

  - – Deve ser arredondado para mais se *n* não for um inteiro

Limites Unilaterais de Confiança

- Limites unilaterais com $(1 - \alpha)100\%$ de confiança para $\mu_1 - \mu_2$, com variâncias conhecidas
  - √ Estabelecer $l = -\infty$ ou $u = \infty$
  - √ Trocar $z_{\alpha/2}$ por z_{α}.
- Limite superior de confiança:

$$\mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Limite inferior de confiança:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2$$

Inferência na Diferença de Médias – Populações Normais com Variâncias Desconhecidas

Inferência na Diferença de Médias de Populações com Variâncias Desconhecidas

- Variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas
  - √ Se n_1 e $n_2 > 40$ utilizam-se procedimentos anteriores
  - √ Se são retiradas **pequenas amostras** de populações **normais**:
    - – Caso 1: Variâncias iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) Homocedasticidade
    - – Caso 2: Variâncias diferentes ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) Heterocedasticidade
    - – Testes e intervalos de confiança baseados na distribuição t.

Caso 1 – Variâncias Iguais

- Suponha 2 populações **normais** independentes com médias desconhecidas μ_1 e μ_2 e variâncias **desconhecidas**, porém iguais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
- Hipóteses:

  H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

  H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$
- Nível de significância do teste: α.

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Estimador natural: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$
- Esperança: $\mathrm{E}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mu_1 - \mu_2$
- Variância:

$$\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] = \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

- Como estimar a variância desconhecida σ^2?

  √ Há duas amostras de populações diferentes, porém com mesma variância

Estimador Combinado de σ^2

- Parece razoável combinar as duas variâncias amostrais S_1^2 e S_2^2.

  √ Como?
- Estimador combinado de σ^2:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

√ S_p^2 pode ser escrito como uma média ponderada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}S_1^2 + \frac{(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}S_2^2 = wS_1^2 + (1 - w)S_2^2$$

- Os pesos dependem do tamanho das amostras
- Se $n_1 = n_2$, então w = 0,5 e S_p^2 será a média aritmética entre S_1^2 e S_2^2.

- Sabemos que:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

√ Substituindo σ por S_p, temos:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

Teste t Combinado para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\,(n1 + n2 - 2)}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,\,(n1 + n2 - 2)}$.
H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,\,(n1 + n2 - 2)}$.

Exemplo 10-5

- Rendimento de catalisador
  - √ Análise de influência de dois catalisadores no rendimento médio de processo químico
    - Catalisador 1: em uso
    - Catalisador 2: aceitável e mais barato
      (deve ser usado se não mudar rendimento do processo)
  - √ Há alguma diferença entre os rendimentos médios?
    - Nível de confiança (α): 5%

- Dados amostrais:
  - √ Rendimento de catalisadores

Catalisador 1			Catalisador 2		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$	s_2
8	92,255	2,39	8	92,733	2,98

  - √ Cálculo do desvio-padrão combinado

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(7)(2,39)^2 + (7)(2,98)^2}{8+8-2}}$$
$$= \sqrt{7,30} = 2,70$$

- Procedimento de teste:
  1. Grandeza de interesse: diferença nos rendimentos médios de processo ($\mu_1 - \mu_2$) e $\Delta_0 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$. Rejeição H_0 se catalizador 2 alterar rendimento
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$
  6. Rejeite H_0 se $\lvert t_0 \rvert > t_{0,025;\,14} = 2,145$
  7. Estatística de teste observada: $t_0 = \dfrac{92,255 - 92,733}{2,70\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} = -0,35$
  8. Conclusão:
     - $\lvert t_0 \rvert = 0,35 < 2,145$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0
     - Concluímos, com $\alpha = 5\%$, que não temos evidência forte pra concluir que o catalisador 2 altera rendimento do processo.

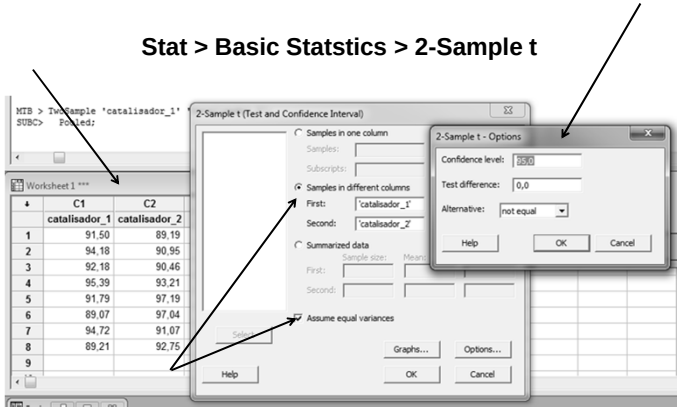
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $t_0 = 0,35$

```
MTB > CDF 0,35;
SUBC>
SUBC> t 14.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 14 DF

   x  P( X <= x )
0,35     0,634226
```

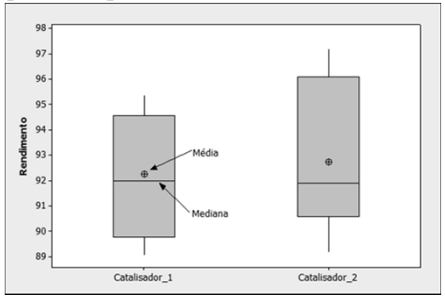
  - √ $p = 2\,P\{t_{14} > 0,35\} = 2(1 - 0,6342) = 0,7316$
- $H_0: \mu_1 = \mu_2$ não pode ser rejeita a um nível $\alpha = 5\%$

- Minitab:
  - √ Banco de dados: *BD_producao.xlsx/ catalisadores*

Stat > Basic Statstics > 2-Sample t

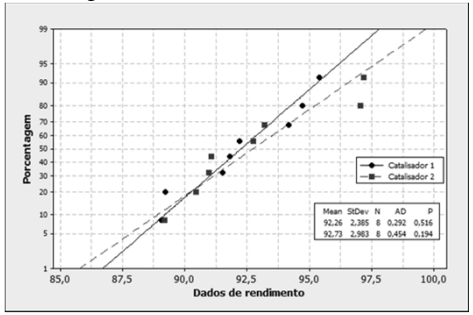


- Análise gráfica:
  - √ Box-plot comparando resultados dos catalisadores



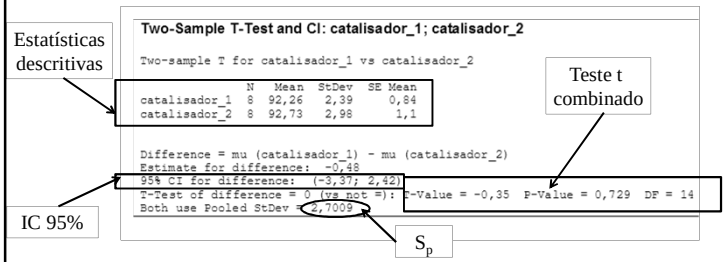
  - √ Não aparenta haver diferença entre os catalisadores.
  - √ Catalisador 2 tem variabilidade ligeiramente maior

  - √ Gráfico de probabilidade normal das amostras



  - Os gráficos de probabilidade normal (e p-valor) indicam que não há problema com a suposição de normalidade
  - Indicação de homocedasticidade.
    (Ambas as linhas têm inclinações similares)
  - Como verificar formalmente a homocedasticidade?

- Saída:



√ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.

√ zero pertence ao intervalo com 95% de confiança.

- Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Caso 2 – Variâncias Diferentes

- Suponha duas populações **normais** independentes com médias desconhecidas μ_1 e μ_2 e variâncias **desconhecidas**, porém diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Não existe um valor exato da estatística t
  - √ Pode-se aplicar um resultado aproximado
  - √ Estatística T*
    - Teste T similar àquele do caso de homocedasticidade
    - Graus de liberdade da t são trocados
      (υ ao invés de $n_1 + n_2 - 2$)

Teste t – Variâncias Desconhecidas e Desiguais

- Supondo H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ verdadeira:
  - √ Estatística de teste: $$T_0^* = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$
  - √ Distribuição amostral: $T_0^* \sim t_\nu$
    - Graus de liberdade: $$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$
    - Para υ não inteiro, arredonde para menor inteiro mais próximo (mais conservativo para rejeitar H_0)

      (pacotes estatísticos calculam com valores não inteiros)

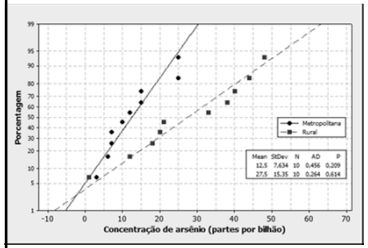
Exemplo 10-6

- Arsênio em água
  - √ Concentração de arsênio em suprimentos públicos de água é risco potencial à saúde
  - √ Amostras:
    - 10 comunidades metropolitanas
    - 10 comunidades rurais
  - √ Interesse:
    - Determinar se há alguma diferença nas concentrações (ppb) médias de arsênio entre os dois grupos de comunidades

- Dados amostrais:
  - √ Concentração de arsênio em água potável

Região Metropolitana			Catalisador 2		
n_1	$\overline{x}_1$	s_1	n_2	$\overline{x}_2$	s_2
10	12,5	7,63	10	27,5	15,3

  - √ Gráfico de probabilidade normal dos dados



- Suposição de normalidade aparenta estar atendida
- Improvável que variâncias da população sejam iguais
  - √ Inclinações muito diferentes

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: concentrações médias de arsênio, μ_1 e μ_2. Interesse: determinar se $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  2. H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ou H_0: $\mu_1 = \mu_2$.
  3. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  4. $\alpha = 0{,}05$ (digamos)
  5. Estatística de teste: $T_0^* = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$
  6. Rejeite H_0 se $|t_0^*| > t_{0{,}025;\,13} = 2{,}160$ $\quad \nu = 13{,}2 \approx 13$
  7. Estatística de teste observada: $t_0^* = \dfrac{12{,}5 - 27{,}5}{\sqrt{\frac{(7{,}63)^2}{10} + \frac{(15{,}3)^2}{10}}} = -2{,}77$
  8. Conclusão:
     - $|t_0^*| = 2{,}77 > 2{,}160$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Há evidência para concluir, com α = 5%, que a concentração média de arsênio na água potável na zona rural do Arizona é diferente daquela da área metropolitana.

- Cálculo dos graus de liberdade desvio-padrão combinado

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{(7{,}63)^2}{10} + \frac{(15{,}3)^2}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{(7{,}63)^2}{10}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{(15{,}3)^2}{10}\right)^2}{9}}$$
$$= 13{,}2 \approx 13$$

- Valor crítico para teste bilateral com α = 5%
  - √ Graus de liberdade aproximados: $t_{0{,}025;\,13} = 2{,}160$
  - √ Graus de liberdade conforme cálculo: $t_{0{,}025;\,13{,}2} = 2{,}157$

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $|t_0| = 2{,}77$

```
MTB > CDF 2,77;
SUBC> t 13,2.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 13,2 DF

   x  P( X <= x )
2,77     0,992135
```

  - √ $p = 2\,P\{t_{13,2} > 2{,}77\} = 2(1 - 0{,}9921) = 0{,}0158$
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ é rejeitada a um nível α = 5%
- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ não é rejeitada a um nível α = 1%

- Saída:

Estatísticas descritivas

Teste t combinado

IC 95%

p-valor aproximado similar ao calculado

```
Two-Sample T-Test and CI: concentracao_met; concentracao_rur

Two-sample T for concentracao_met vs concentracao_rur

                    N   Mean  StDev  SE Mean
concentracao_met   10  12,50   7,63      2,4
concentracao_rur   10  27,5   15,3       4,9

Difference = mu (concentracao_met) - mu (concentracao_rur)
Estimate for difference:  -15,00
95% CI for difference:  (-26,71; -3,29)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = -2,77  P-Value = 0,016  DF = 13
```

√ Valor-p confirma conclusão de rejeitar H_0 a um nível $\alpha = 5\%$.

√ zero não pertence ao intervalo com 95% de confiança.

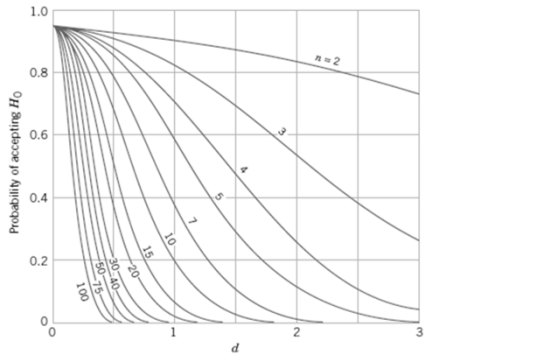
- Limite superior bem abaixo de zero
- Há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.

Erro Tipo II e Tamanho da Amostra

- Curvas Características de Operação:
  - √ Gráficos VII*e*, VII*f*, VII*g* e VII*h* – Apêndice
  - √ Curvas para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$
  - √ Usadas quando $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$.
    - Quando $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ a distribuição de T_0^* será desconhecida para H_0 falsa.
  - √ Parâmetro d: $d = \dfrac{|\Delta - \Delta_0|}{2\sigma}$
    - Δ: diferença verdadeira entre as médias populacionais.
  - √ Tamanho da amostra (n*): $n^* = 2n - 1$
    - Para utilizar curvas CO, considerar $n = n^*$.

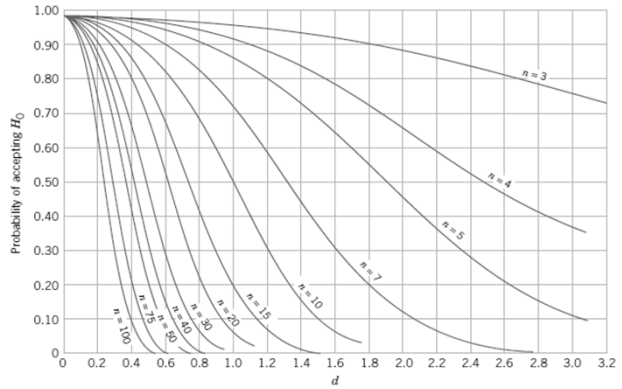
- Como no teste *t* para uma única amostra, podemos:
  - √ Utilizar de estimativa prévia de σ^2 através de experimento piloto
  - √ Usar da variância amostral s^2 para estimar σ^2.
    - Para avaliar desempenho do teste após coleta dos dados
  - √ Definir a diferença que ser quer detectar relativa a σ.
    - Caso não haja experiência prévia que possa ser usada

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



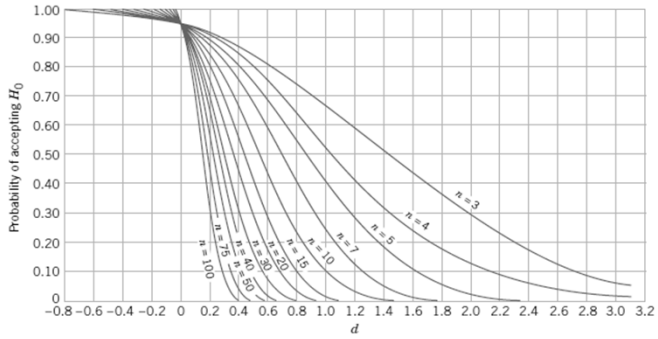
(*e*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0{,}01$



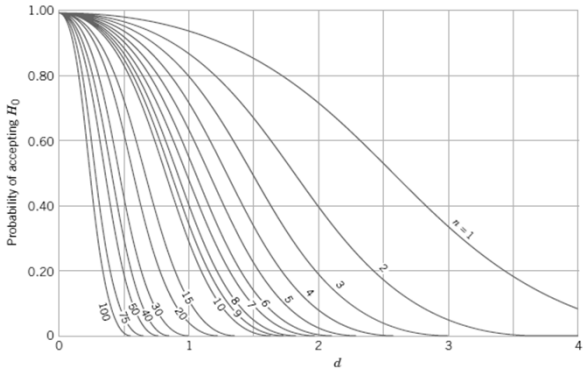
(*f*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0{,}05$



(*g*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided *t*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0{,}01$



(*b*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided normal test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

Exemplo 10-7

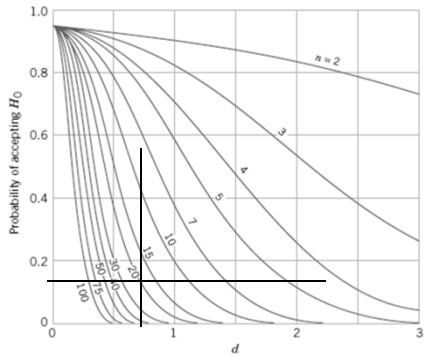
- Rendimento de catalisador
  - √ Influência de dois catalisadores no rendimento médio de processo químico
    - Catalisador 1: em uso
    - Catalisador 2: aceitável e mais barato

      (deve ser usado se não mudar rendimento do processo)
  - √ Nível de confiança do teste (α): 5%
  - √ Qual tamanho de amostra para rejeição de H_0 se catalisador 2 produzir rendimento médio que difira 4% do rendimento médio do catalisador 1, com probabilidade de no mínimo 85%

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$ vs. H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.
- Estimativa grosseira de σ(comum): $s_p = 2,70$
- Distância padronizada:

$$d = \frac{|\Delta|}{2\sigma} = \frac{4}{(2)(2,70)} = 0,74$$

- Probabilidade de erro tipo II: $\beta = 1 - 0,85 = 0,15$



(e) *O.C.* curves for different values of n for the two-sided t-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

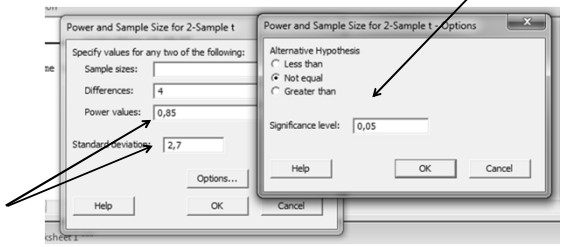
√ Determinação do tamanho das amostras:

- n* = 20 (leitura gráfica)
- Tamanho das amostras: $n_1 = n_2 = n$

$$n = \frac{n^* + 1}{2} = \frac{20 + 1}{2} = 10,5 \approx 11$$

- Cálculo Poder - Minitab

Stat > Power and Sample Size > 2-Sample t



- Saída – Minitab
  - √ Suposição de homocedasticidade.
  - √ Dados:
    - Diferença: 4
    - Poder: 0,85

```
Power and Sample Size

2-Sample t Test

Testing mean 1 = mean 2 (versus not =)
Calculating power for mean 1 = mean 2 + difference
Alpha = 0,05  Assumed standard deviation = 2,7

                 Sample  Target
Difference         Size   Power  Actual Power
         4           10    0,85      0,879312

The sample size is for each group.
```

  - √ Tamanho amostras: n = 10.
- Os resultados concordam razoavelmente com aqueles obtidos por meio da curva CO.

Intervalo de Confiança para Diferença de Médias – Variâncias Desconhecidas

- Caso 1: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
  - √ Distribuição da estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

  - √ então:

$$P\left\{-t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \le T \le t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\right\} = 1 - \alpha$$

  - √ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de 100(1 – α)% de confiança para μ_1 e μ_2.

- Seja $x_1 - x_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas, porém iguais
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Sendo:

- $t_{\alpha/2;\ n1+n2-2}$: percentil superior com α/2(100)% da distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade
- S_p: estimativa combinada de σ, desvio-padrão comum

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Exemplo 10-8

- Hidratação de cimento:
  - √ Análise do peso de cálcio em cimento-padrão e em cimento contendo chumbo
    - Níveis reduzidos de cálcio indicam bloqueio no mecanismo de hidratação no cimento
  - √ Grupos
    - 1: cimento-padrão ($n_1 = 10$)
    - 2: cimento com chumbo ($n_2 = 15$)
  - √ Parâmetros de interesse:
    - Teor médio percentual em peso de cálcio

- Dados amostrais:
  - √ Teor percentual em peso de cálcio

Cimento-padrão			Cimento c/ chumbo		
n_1	$\bar{x}_1$	s_1	n_2	$\bar{x}_2$	s_2
10	90,0	5,0	15	87,0	4,0

  - √ Suposições:
    - Teor percentual em peso é normalmente distribuído
    - Ambas as populações têm a mesma variância
  - √ Estimativa combinado do desvio-padrão

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9)(5,0)^2 + (14)(4,0)^2}{10+15-2}}$$

$$= 4,42$$

- Intervalo de 95% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:
  - √ $t_{0,025;\,23} = 2,069$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{0,025;23} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{0,025;23} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} =$$

$$90,0 - 87,0 - 2,069(4,42)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq$$

$$90,0 - 87,0 + 2,069(4,42)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}} = -0,72 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 6,72$$

  - √ Não podemos afirmar, com um nível de confiança de 95%, que a presença de chumbo afete esse mecanismo de hidratação
    - Nesse nível de confiança não podemos concluir que haja diferença entre as médias
      (intervalo inclui o zero)

Intervalo de Confiança para Diferença de Médias – Variâncias Desconhecidas

- Caso 2: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  - √ Distribuição da estatística de teste:

$$T^* = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

    - υ: graus de liberdade da distribuição t
  - √ Então:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$P\left\{-t_{\alpha/2,\nu} \leq T^* \leq t_{\alpha/2,\nu}\right\} = 1 - \alpha$$

- Seja $x_1 - x_2$ a diferença das médias de duas amostras aleatórias, de tamanhos n_1 e n_2, oriundas de populações normais com variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas e desiguais.
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Sendo:
- $t_{\alpha/2;\,\upsilon}$: percentil superior com α/2(100)% da distribuição t com υ graus de liberdade (correção)

Teste *t* para Amostras Pareadas

Teste *t* Pareado

- As observações nas duas populações de interesse são coletadas em pares
  - √ Toma-se cada par (X_{1j}, X_{2j}) em condições homogêneas, mas elas podem mudar de um par para outro
- Exemplo:
  - √ Dois tipos de ponteiras para teste de dureza
    - Máquina pressiona ponteira em corpo-de-prova metálico
    - Dureza está relacionada com profundidade de depressão
    - Teste t pareado:
      - mede-se dureza das duas ponteiras em mesmo corpo-de-prova
    - Qual a vantagem do procedimento em relação à comparação com amostras independentes?

- Importante:
  - √ Os espécimes metálicos muito provavelmente não serão homogêneos!
- Teste *t* combinado:
  - √ Diferença observada entre as leituras de dureza média para os dois tipos de ponteiras também inclui as diferenças de dureza entre os espécimes
- Teste t pareado:
  - √ Analisa diferença entre as leituras de dureza em cada espécime
  - √ Se não houver diferença entre as ponteiras, a média da diferença deveria ser zero

Estimação de $\mu_1 - \mu_2$

- Sejam (X_{11}, X_{21}), (X_{11}, X_{21}), ... (X_{1n}, X_{2n}) observações paredas.
  - √ X_1: população normal com média μ_1 e variância σ_1^2.
  - √ X_2: população normal com média μ_2 e variância σ_2^2.
  - √ Diferença entre cada par de observações:
    - $D_j = X_{1j} - X_{2j}$, j = 1, 2, ..., n.
    - São normalmente distribuídas
    - Esperança de D_j: $\mu_D = \mathrm{E}[X_1 - X_2] = \mu_1 - \mu_2$
    - Variância de D_j: σ_D^2.

Teste t Pareado para $\mu_1 - \mu_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
    - Δ_0: valor pré-especificado
- Estatística de teste: $T_0 = \dfrac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$
  - √ $\bar{D}$, S_D e n, são, respectivamente, média amostral e desvio-padrão amostral das n diferenças
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu_D \neq \Delta_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,\, n-1}$.
H_1: $\mu_D > \Delta_0$	$t_0 > t_{\alpha,\, n-1}$.
H_1: $\mu_D < \Delta_0$	$t_0 < -t_{\alpha,\, n-1}$.

Exemplo 10-9

- Resistência para vigas de aço
  - √ Comparação de métodos de previsão de resistência ao cisalhamento em traves planas metálicas
  - √ Métodos: Karlruhe e Lehigh
  - √ Há diferença (na média) entre os dois métodos?

- Dados amostrais
  - √ Previsões de resistência para nove traves planas de aço
  - √ (carga prevista/carga observada)
    - Dados: *BD_producao.xlsx/ guia: cisalhamento*

Trave	Método		Diferença
	Karlsruhe	Lehigh	
S1/1	1,186	1,061	0,125
S2/1	1,151	0,992	0,159
S3/1	1,322	1,063	0,259
S4/1	1,339	1,062	0,277
S5/1	1,200	1,065	0,135
S2/1	1,402	1,178	0,224
S2/2	1,365	1,037	0,328
S2/3	1,537	1,086	0,451
S2/4	1,559	1,052	0,507

Estatísticas amostrais

$$\bar{d} = 0,2739$$
$$s_D = 0,1351$$

Correlations: Karlsruhe; Lehigh

```
Pearson correlation = 0,382
P-Value = 0,310
```

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetro de interesse: diferença na resistência média a cisalhamento entre métodos: $\mu_D=\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  2. H_0: $\mu_D = 0$.
  3. H_1: $\mu_D \neq 0$.
  4. $\alpha = 0,05$ (digamos)
  5. Estatística de teste: $T_0 = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$
  6. Rejeite H_0 se $|t_0| > t_{0,025;\,8} = 2,306$
  7. Estatística de teste observada: $t_0 = \frac{0,2739}{\frac{0,1351}{\sqrt{9}}} = 6,08$
  8. Conclusão:
     - $|t_0| = 6,08 > 2,306$ ➔ Rejeitamos H_0
     - Há evidência para concluir, com $\alpha = 5\%$, que os métodos de previsão da resistência fornecem resultados diferentes.

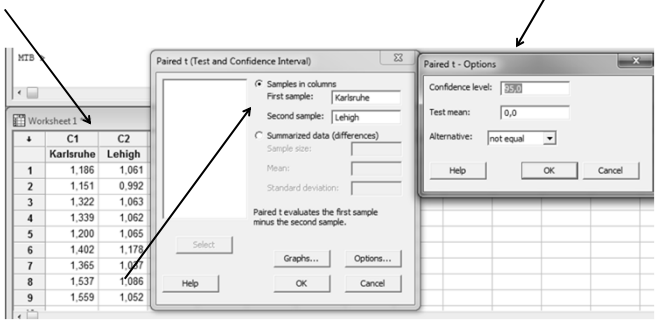
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $\mu_D \neq 0$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $|t_0| = 6,08$

```
MTB > CDF 6,08;
SUBC> t 8.

Cumulative Distribution Function

Student's t distribution with 8 DF

   x  P( X <= x )
6,08     0,999852
```

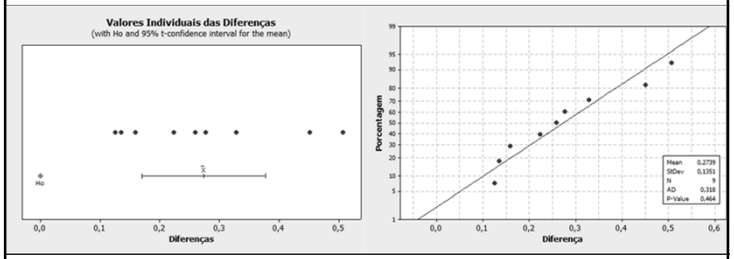
  - √ $p = 2\,P\{t_8 > 6,08\} = 2(1 - 0.99985) = 0,0003$
- Rejeita-se H_0: $\mu_D = 0$ em favor de H_1: $\mu_D \neq 0$, a um nível $\alpha = 5\%$

- Minitab:
  - √ Banco de dados: *BD_producao.xlsx/ catalisadores*

Stat > Basic Statstics > Paired t

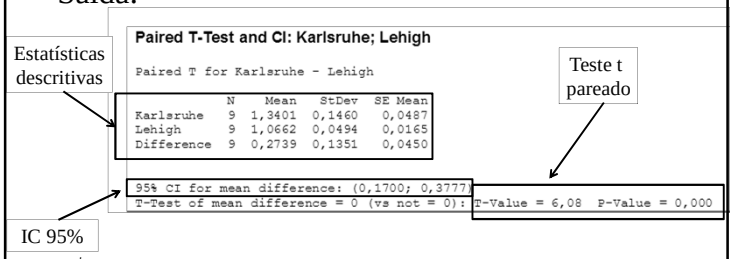


- Análise gráfica:



  - √ Gráfico de valores individuais indica existir diferença entre métodos.
    - Método 1 produz previsões maiores para a resistência
  - √ Não há evidência amostral para rejeitar a hipótese de normalidade das diferenças

- Saída:



  - √ Valor-p confirma conclusão de rejeitar H_0.
  - √ Zero não pertence ao intervalo de confiança.
    - Há evidência amostral para rejeitar H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$.
  - √ Estimação intervalar da diferença:
    - Método de Karlsruhe produz, em média, previsões maiores para a a resistência que o método de Lehigh

Comparações Pareadas vs Independentes

- Comparações de duas médias populacionais:

	Independentes	**Pareadas**
Estatística de teste	$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}}$	$T_0 = \frac{\bar{D} - \Delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$
Distribuição amostral	t_{2n-2}	t_{n-1}

  - √ Numeradores são idênticos
  - √ Denominadores:
    - Estatística combinada: supõe amostras independentes
    - Estatística pareada: há correlação (ρ) entre X_1 e X_2.
  - √ Teste t pareado perde (n – 1) graus de liberdade em relação ao teste t independente

- Variância de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ (mesmo tamanho amostral)
  - √ Amostras independentes:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] &= \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

  - √ Amostras pareadas:
    - Em geral, $\rho > 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{X}_1 - \bar{X}_2] &= \mathrm{Var}[\bar{X}_1] + \mathrm{Var}[\bar{X}_2] - 2\,\mathrm{Cov}[\bar{X}_1, \bar{X}_2] \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 = \frac{2\sigma^2}{n}(1-\rho)\end{aligned}$$

  - √ Denominador estatística teste t paredo é menor que a do teste t independente
    - Se houver correlação positiva entre pares e mesma variância em ambas populações

- Consequências:
  - √ Teste t independente pode subestimar significância dos dados se for aplicado com amostras pareadas
    - Valor da estatística do teste t independente menor que a do teste t pareado.
  - √ Teste t independente tem mais poder contra quaisquer valores alternativos fixados do parâmetro
    - Teste t pareado conduz a uma perda de n – 1 graus de liberdade em comparação ao teste t independente.
  - √ Devemos ou não emparelhar as observações?

- Considerações para escolha entre amostras independentes e pareadas:
  - √ Unidades experimentais relativamente homogêneas (σ pequeno) e correlação intrapares pequena:
    - Ganho na precisão atribuído ao emparelhamento será compensado pela perda de graus de liberdade
    - Deve ser usado experimento com amostras independentes
  - √ Unidades experimentais relativamente heterogêneas (σ grande) e correlação intrapares grande:
    - Deve ser usado experimento emparelhado
    - Este caso ocorre tipicamente quando as unidades experimentais forem as mesmas para ambos os casos

- Considerar também:
  - √ σ e ρ nunca são previamente conhecidos;
  - √ Quantidade grande de graus de liberdade (40 ou 50):
    - Perda de n – 1 graus de liberdade com emparelhamento pode não ser séria
  - √ Quantidade pequena de graus de liberdade (10 ou 20)
    - Perda de metade dos graus de liberdade será potencialmente séria se não for compensada por um aumento na precisão devido ao emparelhamento.

Intervalo de Confiança para μ_D

- $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$, média de diferenças normalmente distribuídas:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Então $P\left\{-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}\right\} = 1 - \alpha$

sendo $t_{\alpha/2,\,(n-1)}$ o percentil superior com $\alpha/2(100)\%$ da t com n–1 graus de liberdade

- Intervalo para $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ com $100(1 - \alpha)\%$ de confiança

$$\bar{d} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{d}$ e s_D são, respectivamente, a média e o desvio-padrão da diferença de n pares aleatórios de medidas

- Comentários:
  - Esse intervalo de confiança é válido para o caso em que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
    - S_D^2 estima $\sigma_D^2 = \text{Var}(\bar{D})$
  - Suposição de normalidade é desnecessária para amostras grandes ($n \geq 30$ pares)
    - Aplica-se o Teorema Central do Limite

Exemplo 10-10

- Carros estacionados paralelamente
  - Estacionamento de dois carros de forma paralela, com barras de direção e raios de giro diferentes
  - Resposta:
    - Tempo em segundos para cada pessoa
  - Amostragem:
    - 14 pessoas estacionando dos dois carros

- Dados amostrais
  - Tempo para estacionamento de 2 carros em paralelo (s)
    - Dados: *BD_producao.xlsx/ guia: estacionamento*

Pessoa	Automóvel		Diferença
	1	2	
1	37,0	17,8	19,2
2	25,8	20,2	5,6
3	16,2	16,8	–0,6
4	24,2	41,4	–17,2
5	22,0	21,4	0,6
6	33,4	38,4	–5,0
7	23,8	16,8	7,0

Pessoa	Automóvel		Diferença
	1	2	
8	58,2	32,2	26,0
9	33,6	27,8	5,8
10	24,4	23,2	1,2
11	23,4	29,6	–6,2
12	21,2	20,6	0,6
13	36,2	32,2	4,0
14	29,8	53,8	–24,0

Estatísticas amostrais: $\bar{d} = 1,21$, $s_D = 12,68$

- Intervalo de 90% de confiança para $\mu_1 - \mu_2$:
  - √ $t_{0,05;\,13} = 1,771$

$$\bar{d} - t_{0,05;13}\frac{s_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_D \leq \bar{d} + t_{0,05;13}\frac{s_D}{\sqrt{n}} =$$
$$1,21 - 1,771\frac{12,68}{\sqrt{14}} \leq \mu_D \leq 1,21 + 1,771\frac{12,68}{\sqrt{14}} =$$
$$-4,79 \leq \mu_D \leq 7,21$$

  - √ Com um nível de confiança de 90%, não podemos afirmar de que os dois carros têm diferentes tempos médios para estacionar
    (intervalo não inclui o zero)
    - Valor $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$ é consistente com os dados observados

Inferência para as Variâncias de Duas Distribuições Normais

Distribuição F

- A variável aleatória F é definida como:

$$F = \frac{\frac{W}{u}}{\frac{Y}{v}}$$

  - √ W e Y são variáveis aleatórias qui-quadrado **independentes** com, respectivamente, *u* e *v* graus de liberdade
  - √ Essa variável aleatória segue a distribuição F com *u* graus de liberdade no denominador e *v* graus de liberdade.
  - √ Notação: $F \sim F_{u,\,v}$.

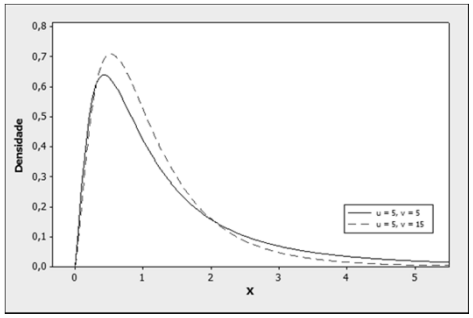
Distribuição F*t* – Função de Densidade

- Seja *X* uma variável aleatória com distribuição F com *u* graus de liberdade no numerado e *v* , no denominador:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2} x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\left(\frac{u}{v}\right)x+1\right]^{(u+v)/2}},\ 0 < x < \infty; u, v \in \mathbb{N}$$

  - √ Média da distribuição F: $\mathrm{E}[X] = \frac{v}{v-2}, v > 2$
  - √ Variância da distribuição F:

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, v > 4$$

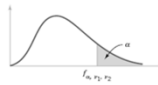


√ Distribuição F é assimétrica à direita

√ Distribuição F é similar à χ^2

– Os dois parâmetros u e v oferecem flexibilidade extra quanto à forma

- $f_{\alpha,\,u,\,v}$: Percentis da F com u e v graus de liberdade
  - √ Seja a variável aleatória F ~ $F_{u,\,v}$ então $P\{F > f_{\alpha,u,v}\} = \alpha$
- Exemplo – Unilateral Superior
  - √ $\alpha = 0{,}05$; u = 5 e v =10



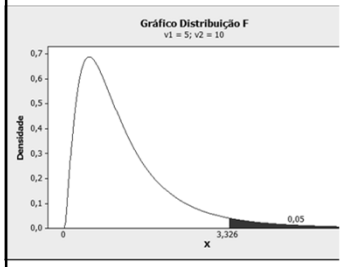


Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85

$$P\{F_5, 10 > 3, 33\} = 0, 05$$

- Exemplo – Unilateral:
  - √ $\alpha = 0{,}05$, u = 5 e v = 10
  - √ Tabela contém somente percentis superiores
  - √ Pontos percentuais inferiores: $f_{1-\alpha,u,v} = \dfrac{1}{f_{\alpha,v,u}}$

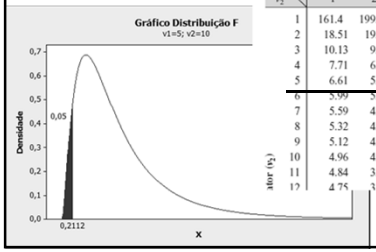


Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75

$$f_{0,95,5,10} = \frac{1}{f_{0,05,10,5}} = \frac{1}{4,74} = 0,211$$

$$P\{F_{5,10} \leq 0,211\} = 0,05$$

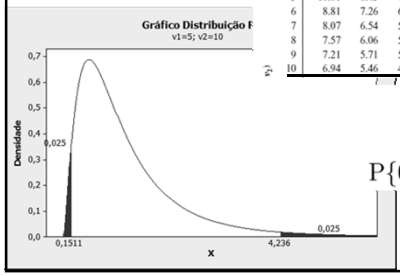
- Exemplo – Bilateral:
  - √ $\alpha = 0{,}05$, u = 5 e v = 10

$$f_{0,025;5;10} = 4,24$$

$$f_{0,975;5;10} = \frac{1}{f_{0,025;10;5}} = \frac{1}{6,62} = 0,151$$

Table V Percentage Points of the *F*-Distribution (*continued*)

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62



$$P\{F_{5;10} > 4,24\} = 0,025$$

$$P\{F_{5;10} < 0,151\} = 0,025$$

$$P\{0,151 \leq F_{5;10} \leq 4,24\} = 0,95$$

Teste de Hipóteses para a Razão de Variâncias

- Suponha:
  - √ Duas populações normais independentes
  - √ μ_1 e μ_2: médias desconhecidas das populações
  - √ σ_1^2 e σ_2^2 : variâncias desconhecidas das populações
- Interesse:
  - √ Testar hipóteses relativas à igualdade das variâncias
- Hipóteses:
  - √ H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
  - √ H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Variâncias Amostrais

- Amostra de tamanho n_1 de população normal com média μ_1 e variância σ_1^2 desconhecidas
  - √ S_1^2: variância da amostra 1
- Amostra de tamanho n_2 de população normal com média μ_2 e variância σ_2^2 desconhecidas
  - √ S_2^2: variância da amostra 2
- Populações independentes

Razão das Variâncias Amostrais

- Razão das variâncias amostrais:

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{(n_1-1),(n_2-1)}$$

  - √ Quociente de variáveis aleatória independentes
  - √ Numerador: $\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n_1-1}$
  - √ Denominador: $\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n_2-1}$

Teste para a Razão de Variâncias de Duas Populações Normais

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
- Estatística de teste: $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$ ou $f_0 < f_{1-\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$
H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$f_0 > f_{\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$.
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$f_0 < f_{1-\alpha/2,\, n1-1,\, n2-1}$.

Exemplo 10-11

- Variabilidade em pastilhas de semicondutores
  - √ Espessura obtida por meio de mistura de gases
  - √ Variabilidade da espessura é característica crítica
    - Deseja-se baixa variabilidade
  - √ Estudadas duas misturas diferentes de gases
    - Interesse em determinar se uma delas é superior na redução da variabilidade de espessura
  - √ Há qualquer evidência que indique ser um gás preferível em relação ao outro?
    - Use $\alpha = 5\%$.

- Dados Amostrais:
  - √ Espessura da camada de óxido (ângstrom)

Mistura 1		Mistura 2	
n_1	s_1	n_2	s_2
20	1,96	20	2,13

  - √ Consideraremos que a espessura de óxido seja uma variável aleatória normal para ambas as misturas de gases
    - Os valores amostrais não estão disponíveis para se conduzir testes de normalidades para verificar esta suposição

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: variâncias σ_1^2 e σ_2^2, da espessura das camadas de óxido.
  2. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
  3. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  4. $\alpha = 0{,}05$
  5. Estatística de teste: $f_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0}{\sim} F_{n_1-1,n_2-1}$
  6. Rejeite H_0 se:
     $f_0 > f_{0{,}025;\,19;\,19} = 2{,}53$ ou $f_0 < f_{0{,}975;\,19;\,19} = 1/2{,}53 = 0{,}40$
  7. Estatística de teste observada: $f_0 = \frac{(1,96)^2}{(2,13)^2} = \frac{3,84}{4,54} = 0,85$
  8. Conclusão:
     - $0{,}40 < f_0 = 0{,}85 < 2{,}53$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0
     - Não há evidência forte para indicar um gás que resulte em variância menor na espessura de óxido, com $\alpha = 5\%$.

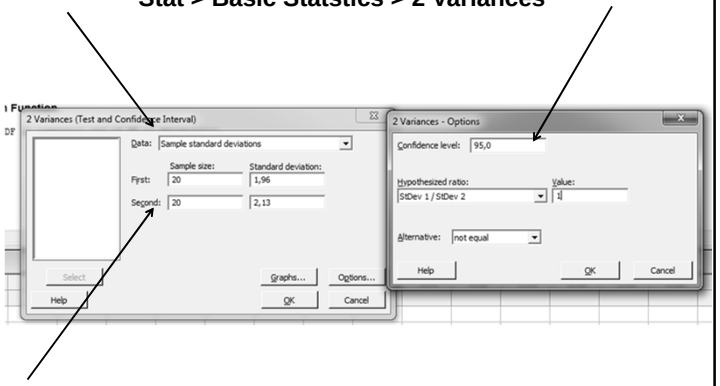
- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $f_0 = 0{,}85$
    - $1/f_0 = 1{,}18$

```
MTB > CDF C1;
SUBC> F 19 19.

Cumulative Distribution Function

F distribution with 19 DF in numerator and 19 DF in denominator

   x  P( X <= x )
0,85     0,363400
1,18     0,639011
```

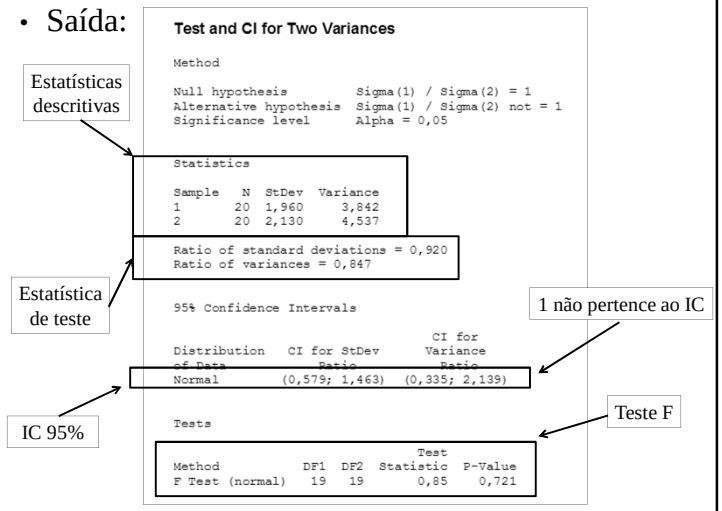
  - √ Cálculo de p:
    - $P\{F_{19,\,19} < 0{,}85\} = 0{,}3640$ (f_0 está mais à esquerda!)
    - $P\{F_{19,\,19} > 1{,}18\} = 1 - 0{,}6390 = 0{,}3610$
    - $P = 0{,}3640 + 0{,}3610 = 0{,}7244$
- H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ não pode ser rejeitada em favor de H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, a um nível $\alpha = 5\%$

- Minitab:
  - √ Base de dados não está disponível

Stat > Basic Statstics > 2 Variances



- Saída:

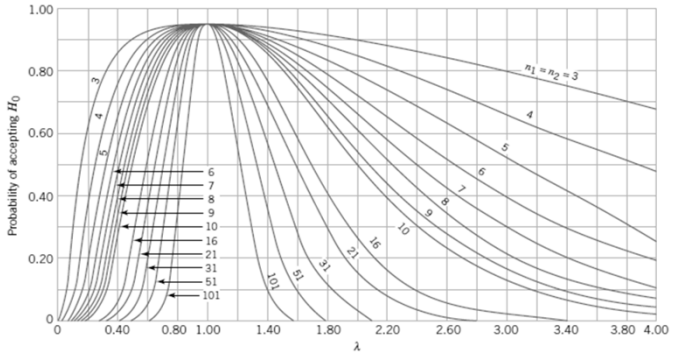


- Conclusões:
  - √ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.
  - √ Um não pertence ao intervalo de confiança.
    - Há evidência amostral para não rejeitar H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Erro Tipo II e Tamanho da Amostra

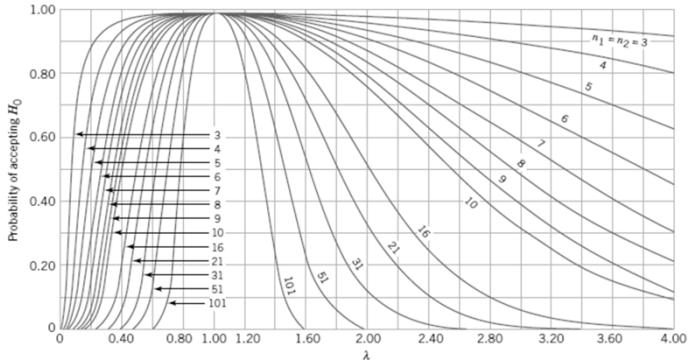
- Curvas Características de Operação:
  - √ Gráficos – Apêndice:
    - VII*o*, VII*p*: hipóteses alternativas bilaterais
    - VII*q* e VII*r*: hipóteses alternativas unilaterais
  - √ Curvas para $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$
  - √ Considerando $n_1 = n_2 = n$
  - √ Parâmetro λ: $\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



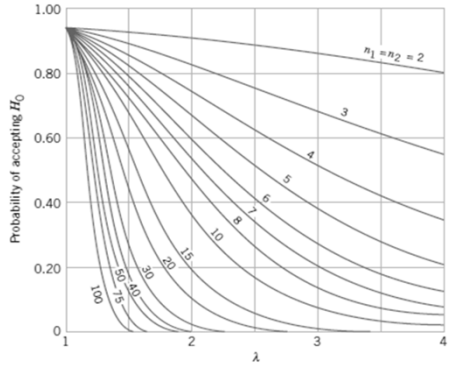
(*o*) *O.C.* curves for different values of *n* for the two-sided *F*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste bilateral e nível de significância $\alpha = 0,01$



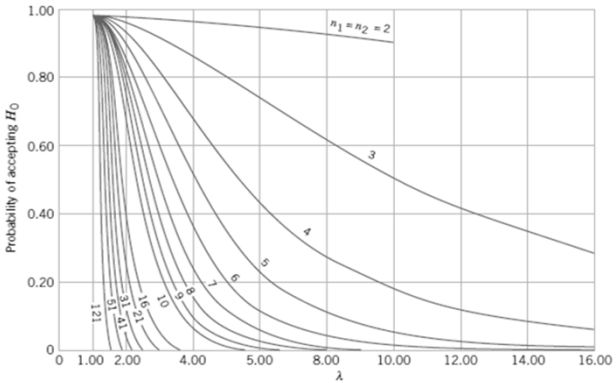
(*p*) O.C. curves for different values of *n* for the two-sided *F*-test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0,05$



(*q*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided *F*-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- Teste unilateral e nível de significância $\alpha = 0,01$



(*r*) *O.C.* curves for different values of *n* for the one-sided *F*-test for a level of significance $\alpha = 0.01$.

Exemplo 10-12

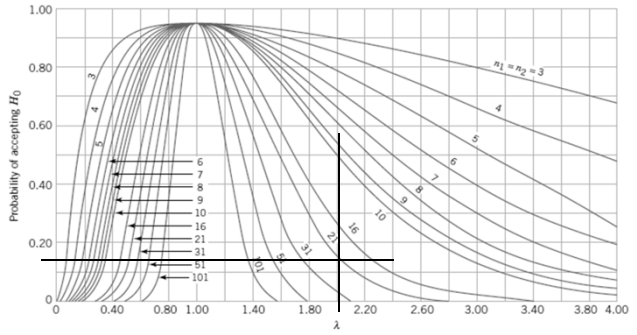
- Variabilidade em pastilhas de semicondutores
  - √ Espessura obtida por meio de mistura de gases
  - √ Variabilidade da espessura é característica crítica
    - Deseja-se baixa variabilidade
  - √ Estudadas duas misturas diferentes de gases
    - Interesse em determinar se uma delas é superior na redução da variabilidade de espessura
  - √ Desejamos detectar metade do desvio-padrão da espessura entre os gases, com no mínimo 0,80
    - Você acha adequado o tamanho de amostra de $n_1=n_2=n=20$?
    - Use $\alpha = 5\%$.

1. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs. H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

- Razão que se deseja dectar:

$$\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2$$

- Tamanhos das amostras:
  - √ $n_1 = n_2 = 20$



(o) *O.C.* curves for different values of n for the two-sided F-test for a level of significance $\alpha = 0.05$.

- √ Determinação do erro tipo II:
  - $b \approx 0{,}20$ ➔ Poder = 0,80
  - Os tamanhos das amostras: $n_1 = n_2 = 20$ são adequados

Intervalo de Confiança para para a Razão de Duas Variâncias

- Distribuição da estatística F:

$$F = \frac{\frac{S_2^2}{n_2}}{\frac{S_1^2}{n_1}} \sim \mathrm{F}_{n_2-1,n_1-1}$$

- √ então:

$$\mathrm{P}\left\{f_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} \leq F \leq f_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}\right\} = 1-\alpha$$

- √ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para σ_1^2 e σ_2^2.

- Sejam s_1^2 e s_2^2 as variâncias de amostras aleatórias de tamanhos n_1 e n_2, provenientes de populações normais com variâncias desconhecidas σ_1^2 e σ_2^2
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para σ_1^2/σ_2^2:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{1-\alpha/2,n_2-1,n_1-1} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\alpha/2,n_2-1,n_1-1}$$

Sendo:

- $f_{\alpha/2;\ n1-1;\ n2-1}$: percentil superior com α/2(100)% da distribuição F com n_2 – 1 graus de liberdade no numerador e n_1 – 1 graus de liberdade no denominador

- Comentário:
  - √ Intervalo de confiança para a razão entre dois desvios-padrão pode ser obtida extraindo a raiz quadrada do intervalo de confiança para a razão de variâncias

Exemplo 10-13

- Acabamento de superfície de liga de titânio
  - √ Fabricação de propulsores para uso em turbinas
  - √ Podem ser usados dois processos para esmerilhar determinada superfície
    - Podem produzir peças com iguais rugosidades médias nas superfícies
  - √ Construir um intervalo de 90% de confiança para a razão dos desvios-padrão dos dois processos (σ_1/σ_2)
    - Considerar os dois processo independentes e que a rugosidade na superfície seja normalmente distribuída

- Dados Amostrais:
  - √ Rugosidade em superfície (micropolegada)

Processo 1		Processo 2	
n_1	s_1	n_2	s_2
11	5,1	16	4,7

  - √ Consideraremos que os dois processo são independentes e que a rugosidade na superfície seja normalmente distribuída
    - Os valores amostrais não estão disponíveis para se conduzir testes de normalidades para verificar esta suposição

- Intervalo de 90% de confiança para σ_1/σ_2:
  - √ $f_{0,05;\,15,\,10} = 2,85$
  - √ $f_{0,95;\,15,\,10} = 0,39$

$$f_{0,95,15,10} = \frac{1}{f_{0,05,10,15}} = \frac{1}{2,54} = 0,39$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,95;15;10} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0,05;15;10}$$

$$\frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 0,39 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} 2,85$$

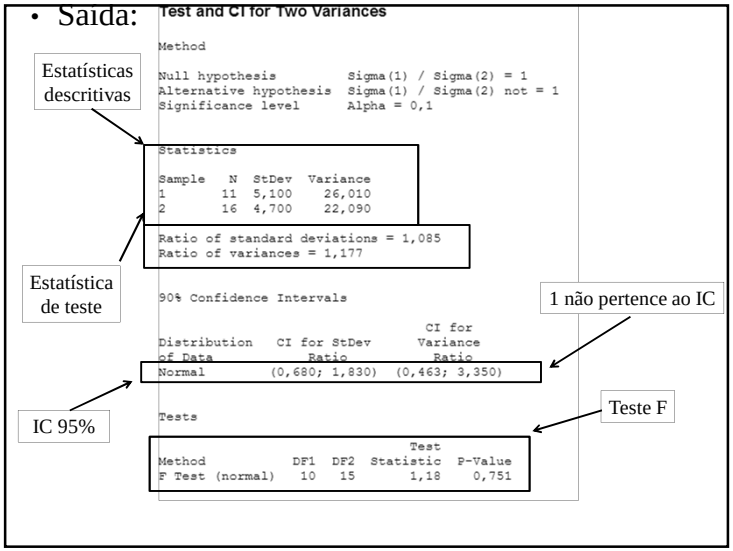
$$0,459 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 3,356$$

$$\sqrt{0,459} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq \sqrt{3,356}$$

$$0,678 \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \leq 1,832$$

- √ Com um nível de confiança de 90%, não podemos afirmar que os desvios-padrão da rugosidade da superfície para os dois processos sejam diferentes
  (intervalo não inclui o um)

- Saída:



- Comentário:
  - √ A um nível de confiança de 90%, não se rejeita a hipótese de igualdade das variâncias em favor de H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Inferência para as Proporções de Duas Populações

Inferência para Proporções de Duas Populações

- Parâmetros de interesse:
  - √ Proporções binomiais p_1 e p_2.
- Inferência para amostras grandes:
  - √ Teste de hipóteses e intervalos de confiança baseados na aproximação binomial pela normal.

Testes para Diferenças na Proporções de uma População

- Suponha duas amostras aleatórias independentes, retiradas de duas populações:
  - √ Tamanhos amostrais: n1 e n2.
  - √ Número de observações que pertencem à categoria de interesse: X1 e X2.
- Estimadores das proporções populacionais: $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{n_1}$ $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n_2}$
- Hipóteses de interesse:

  H_0: $p_1 = p_2$

  H_1: $p_1 \neq p_2$

Estatística de Teste para $p_1 - p_2$

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

para n_1 e n_2 grandes

- Se $p_1 = p_2$ (H_0 verdadeira) $Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$
  - √ p é desconhecido!
- Estimador do parâmetro p (comum): $\hat{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$
- Estatística de teste para H_0: $p_1 = p_2$:

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Testes Aproximados para $p_1 - p_2$

- Hipótese nula:
  - √ H_0: $p_1 = p_2$.
- Estatística de teste: $Z_0 = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$
- Hipóteses alternativas:

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $p_1 \neq p_2$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$.
H_1: $p_1 > p_2$	$z_0 > z_\alpha$.
H_1: $p_1 < p_2$	$z_0 < -z_\alpha$.

Exemplo 10-14

- Erva-de-são-joão
  - √ Extratos utilizados para tratar depressão
  - √ Teste para comparar eficácia de extrato-padrão de erva-de-são-joão com placebo
  - √ Amostra: 200 pacientes com depressão unipolar
    - Alocação aleatória em dois grupos (extrato-1 e placebo-2)
    - Após oito semanas, melhoraram: 27 (X_1) pacientes tratados com a erva-de-são-joão e 19 (X_2), tratados com placebo.
  - √ Há alguma razão para acreditar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão?
    - Use $\alpha = 5\%$

- Dados Amostrais:
  - √ Pacientes com melhora no quadro de depressão unipolar (após 8 semanas)

Erva-de-são-joão		Placebo	
n_1	x_1	n_2	x_2
100	27	100	19

- Proporções amostrais: $\hat{p}_1 = \frac{27}{100} = 0,27$ $\hat{p}_2 = \frac{19}{100} = 0,19$
- Estimador do parâmetro comum p (sob H_0)

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{19 + 27}{100 + 100} = 0,23$$

- Procedimento de teste:
  1. Parâmetros de interesse: p_1 e p_2, proporções de pacientes que melhoraram após 8 semanas.
  2. H_0: $p_1 = p_2$.
  3. H_1: $p_1 \neq p_2$.
  4. $\alpha = 0,05$
  5. Estatística de teste: $Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - 0}{\sqrt{(\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$
  6. Rejeite H_0 se $|z_0| > z_{0,05} = 1,96$
  7. Estatística de teste observada:
  8. Conclusão: $z_0 = \frac{0,27 - 0,19}{\sqrt{0,23(1-0,23)\left(\frac{(8)^2}{10} + \frac{(8)^2_2}{10}\right)}} = 1,34$
     - $|z_0| = 1,34 < 1,96$ ➔ Falhamos em rejeitar H_0

- Conclusão:
  - √ Não há evidência suficiente para confirmar que a erva-de-são-joão seja efetiva no tratamento de depressão unipolar.

- Cálculo do p-valor – Minitab:
  - √ No exemplo: H_1: $p_1 \neq p_2$.
  - √ Estatística de teste observada:
    - $z_0 = 1{,}34$

Cumulative Distribution Function

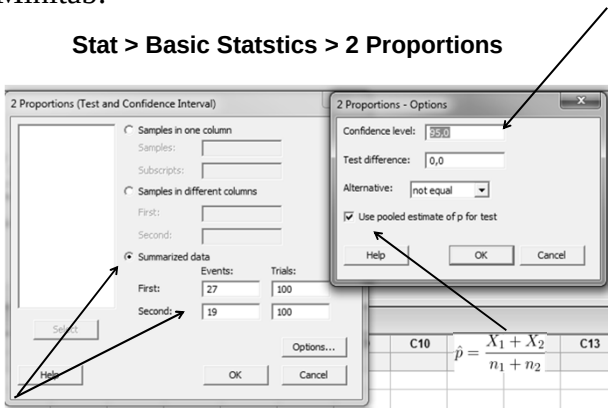
Normal with mean = 0 and standard deviation = 1

x	P(X <= x)
1,34	0,909877

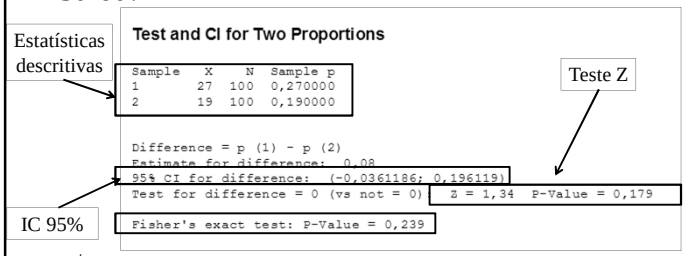
  - √ p = P{Z > 1,34} = 1 – Φ(1,34) = 1 – 0,9099 = 0,180
- H_0: $p_1 = p_2$ seria rejeitada com qualquer nível de significância $\alpha \geq 0{,}180$

- Minitab:

Stat > Basic Statstics > 2 Proportions



- Saída:



  - √ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.
  - √ Zero pertence ao intervalo de confiança.
    - Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $p_1 = p_2$.
  - √ Teste exato de Fisher:
    - Usado com qualquer tamanho amostral
    - Não usa aproximação pela normal (p-valor maior!)

Erro Tipo II e Tamanho da Amostra

- Cálculo de β é complicado no caso de 2 amostras
  - √ Denominador de Z_0 usa estimador combinado de p (sob H_0: $p_1 = p_2$)
  - √ Quando H_0 for falsa ($p_1 \neq p_2$)

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

- Erro tipo II aproximado de teste **bilateral** para a diferença de proporções de 2 populações:

$$\beta = \Phi\left[\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right] - \Phi\left[\frac{-z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

√ em que:

$$\overline{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\overline{q} = \frac{n_1(1-p_1) + n_2(1-p_2)}{n_1 + n_2}$$

- Erro tipo II aproximado de teste **unilateral** para a diferença de proporções de 2 populações:

√ H_1: $p_1 > p_2$.

$$\beta = \Phi\left[\frac{z_{\alpha}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

√ H_1: $p_1 < p_2$:

$$\beta = 1 - \Phi\left[\frac{-z_{\alpha}\sqrt{\overline{pq}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}}\right]$$

Cálculo Tamanho Amostral

- Teste de hipóteses da diferença de proporções:
  - √ H_1: $p_1 = p_2$.
  - √ Valores especificados de p_1 e p_2.
  - √ Mesmos tamanhos amostrais: $n = n_1 = n_2$.
  - √ Tamanho aproximado da amostra

$$n \approx \frac{\left[z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(p_1+p_2)(q_1+q_2)}{2}} + z_{\beta}\sqrt{p_1 q_1 + p_2 q_2}\right]^2}{(p_1 - p_2)^2}$$

sendo: $q_1 = 1 - p_1$ e $q_2 = 1 - p_2$

  - √ Para alternativa unilateral troque $z_{\alpha/2}$ por z_{α}.

Intervalo de Confiança para a Diferença de Proporções de Populações

- Distribuição da estatística Z:
  - √ Para amostras grandes:

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

  - √ então:

$$\mathrm{P}\left\{-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

  - √ Manipulando essas grandezas obtemos o intervalo de $100(1 - \alpha)\%$ de confiança para p_1 e p_2.

Intervalo de Confiança para a Diferença de Médias, Variâncias Conhecidas

- Se $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ forem as proporções amostrais em duas amostras aleatórias e independentes, de tamanhos n_1 e n_2, que pertençam a uma categoria de interesse.
  - √ Intervalo com 100(1–α)% de confiança para $p_1 - p_2$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq$$
$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o percentil superior com α/2(100)% da normal padrão

Exemplo 10-15

- Mancais de eixos de manivelas de motores
  - √ Característica de interesse:
    - Não-conformidade de acabamento da superfície
  - √ Amostras:
    - Grupo 1: Processo em uso
      - n_1 = 85 mancais, dos quais 10 (X_1) são não-conformes
    - Grupo 2: Processo modificado
      - n_2 = 85 mancais, dos quais 8 (X_2) são não-conformes
  - √ Obter estimativa intervalar, com 95% de confiança, para a diferença de proporção de mancais defeituosos produzidos pelos dois processos

- Dados Amostrais:
  - √ Pacientes com melhora no quadro de depressão unipolar (após 8 semanas)

Processo em uso		Processo modificado	
n_1	x_1	n_2	x_2
85	10	85	8

- Proporções amostrais: $\hat{p}_1 = \frac{10}{85} = 0,12$

$$\hat{p}_2 = \frac{8}{85} = 0,09$$

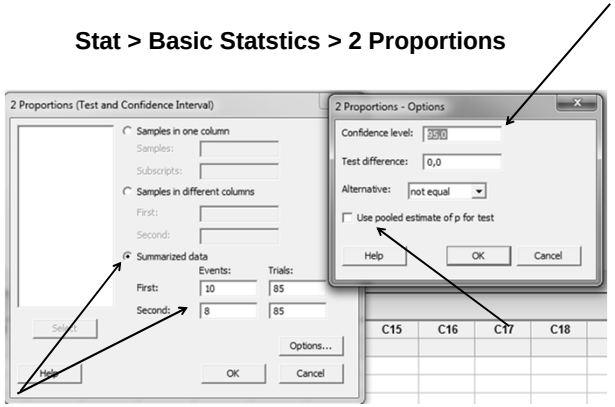
- Intervalo com 95% de confiança para $p_1 - p_2$:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \leq p_1 - p_2 \leq$$
$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$
$$0,12 - 0,09 - 1,96\sqrt{\frac{0,12(0,88)}{85} + \frac{0,09(0,91)}{85}} \leq p_1 - p_2 \leq$$
$$0,12 - 0,09 + 1,96\sqrt{\frac{0,12(0,88)}{85} + \frac{0,09(0,91)}{85}}$$
$$-0,06 \leq p_1 - p_2 \leq 0,12$$

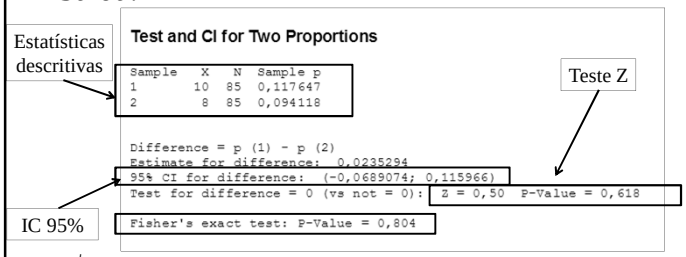
  - √ Baseado nos dados amostrais, parece improvável que modificação no processo de acabamento tenha reduzido a proporção de mancais defeituosos:
    - Intervalo de confiança inclui o zero.

- Minitab:

Stat > Basic Statstics > 2 Proportions



- Saída:



√ Valor-p confirma conclusão de não rejeitar H_0.

√ Zero pertence ao intervalo de confiança.

- Não há evidência amostral para rejeitar H_0: $p_1 = p_2$.

√ Teste exato de Fisher:

- p-valor maior! (não usa aproximação pela normal)

Resumo dos Procedimentos de Inferência para Duas Amostras

Referências

Bibliografia Recomendada

- Montgomery, D. C. (LTC)
  Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros
- Pinheiro, J. I. D et al. (Campus)
  Probabilidade e Estatística: Quantificando a Incerteza