**Exemplos – Probabilidade**

1. *Testes diagnósticos*.

   Introdução à questão:

   Falsos positivos são um problema em qualquer tipo de teste diagnóstico: nenhum teste é perfeito e algumas vezes um teste indicará incorretamente um resultado positivo. Por exemplo, se um teste para uma particular doença é efetuado em um paciente, então há uma chance (normalmente pequena) de que o teste dará um resultado positivo, mesmo se o paciente não tiver a doença.

   | |
   |---|
   | Se uma condição é rara, então a maioria dos resultados podem ser falsos positivos, mesmo se o teste para esta condição for razoavelmente preciso. |

   Suponha que um teste para uma particular doença tenha uma taxa muito alta de sucesso.
   - Se um paciente testado tiver a doença, o teste indicará isso, com precisão, em, por exemplo, 99% das vezes (ou com probabilidade 0,99). Essa probabilidade (condicionada!) é denominada *sensibilidade* do teste diagnóstico, ou seja, é a probabilidade de o teste ser positivo para a doença, dado que o paciente é portador dela.
   - Se um paciente testado não tiver a doença, o teste indicará isso, com precisão, em, por exemplo, 95% das vezes (ou com probabilidade 0,95). Essa probabilidade condicionada é denominada *especificidade* do teste diagnóstico, ou seja, é a probabilidade de o teste ser negativo para a doença, dado que o paciente não é portador da mesma.

   Teste Elisa para detecção de contaminação por HIV:

   Entre as várias tecnologias para detectar a presença do HIV, a primeira a se difundir no Brasil foi o teste de ELISA (*Enzymelinked innunosorbent assay*). Em 1985 esta técnica foi simultaneamente comercializada por vários laboratórios americanos. Dentre eles, o laboratório ABBOT relatou em seus teste preliminares, sensibilidade de 95% e especificidade de 99,8% (os valores para os outros laboratórios são parecidos). *Sensibilidade* de um teste diagnóstico é a probabilidade de o teste ser positivo para a doença, dado que o paciente é portador dela. Por sua vez, *especificidade* é a probabilidade de o teste ser negativo para a doença, dado que o paciente não é portador. Considere que a prevalência da doença na população em questão seja 1/10.000.

   a. Calcule a probabilidade de a pessoa não ser portadora do vírus HIV, dado que o teste é negativo (denominado Valor de Predição Negativa – VPN).
   b. Calcule a probabilidade de a pessoa ser portadora do vírus HIV, dado que o teste é positivo (denominado Valor de Predição Positiva – VPP).
   c. Calcule a proporção de falsos resultados (falso positivo – PFP e falso negativo – PFN).
   d. Refaça os itens anteriores para uma prevalência de 1/1.000.

2. Sejam os eventos A, B e C. Encontre expressões para os seguintes eventos:

   a. Ocorre exatamente um dos eventos;
   b. Ocorrem exatamente dois dos eventos;
   c. Ocorrem um ou mais eventos;
   d. Ocorrem dois ou mais eventos;
   e. Nenhum dos eventos ocorre.

3. *Enigma do Prisioneiro* – Três prisioneiros são informados pelo carcereiro (que não mente) que um deles foi escolhido aleatoriamente para ser executado e os outros dois serão libertados. Privadamente, o prisioneiro A pede ao carcereiro que lhe conte reservadamente qual dos de seus companheiros de prisão será libertado, dizendo que não haveria dano em divulgar esta informação porque ele já sabe que pelo menos um dos dois será libertado. O carcereiro recusa-se a responder a essa questão, dizendo que se A soubesse qual de seus colegas seria libertado então a probabilidade de que ele mesmo viesse a ser executado aumentaria de 1/3 para 1/2. O que você pensa do raciocínio do carcereiro?

4. *Paradoxo do Aniversário* – Encontre a probabilidade de dois ou mais estudantes terem a mesma data de aniversário em uma sala de 30 alunos?

5. *Problema de Monty Hall* (um exemplo de teoria dos Jogos). Suponha que você esteja em um jogo e pode escolher uma em três portas. Atrás de uma delas está um carro, atrás das outras estão cabras. Você escolhe uma porta, a número 1, por exemplo. O apresentador então, que sabe o que está atrás de cada porta, abre a porta número 3, que tem uma cabra. Ele então pergunta se você quer escolher a porta número 2. Você deveria mudar de escolha?

6. Um baralho é dividido aleatoriamente em quatro pilhas de 13 cartas cada. Calcule a probabilidade de cada pilha ter exatamente um ás?

7. Uma companhia seguradora acredita que as pessoas podem ser divididas em duas classes: aquelas que são susceptíveis a acidentes e aquelas que não são. Suas estatísticas indicam que uma pessoa susceptível a acidente se acidentará em algum instante, num período de um ano, com probabilidade 0,4. Essa probabilidade é de 0,20 para uma pessoa não susceptível. Assume-se que 30% da população é susceptível a acidentes.
    a. Qual a probabilidade de que um novo segurado não terá um acidente em até um ano após a aquisição de uma apólice. *Resp.: 0,26*
    b. Suponha que o novo segurado sofra um acidente no período de um ano da aquisição da apólice. Qual é a probabilidade de que ele (ou ela) sejam susceptíveis a acidentes? *Resp.: 0,46*
    c. Qual é a probabilidade condicional de que um novo segurado sofra um acidente em seu segundo ano de contrato, dado que ele (ou ela) tenha se acidentado no primeiro ano? *Resp.: 0,29*

8. Um dado equilibrado é lançado duas vezes e as faces resultantes observadas. Considere os seguintes eventos:
    − A: a soma dos resultados é ímpar.
    − B: o resultado do primeiro lançamento é ímpar.
    − C: o produto dos resultados é ímpar.

    Determine $P(A \cup B)$ e $P(A \cup B \cup C)$.

9. *Falácia do Promotor (1).* Assuma que um roubo foi cometido em uma cidade e que foram verificadas as impressões digitais dos 100.000 homens dessa cidade. Um desses homens tem suas impressões digitais correspondentes a uma amostra coletada na cena do crime. Em seu julgamento, o perito testemunhou que a probabilidade de correspondência de impressões digitais de dois perfis escolhidos ao acaso é de apenas 1 em 20.000. Há uma dúvida razoável a favor da inocência do réu?

10. *Falácia do Promotor (2)*. A Teoria das Probabilidades foi usada em um processo judicial famoso[1]. Neste caso, a bolsa foi arrancada de uma pessoa idosa em um subúrbio de Los Angeles. Um casal foi visto fugindo da cena, sendo descrito como um homem negro com uma barba e bigode e uma jovem loira com cabelos em um rabo de cavalo. Testemunhas disseram que eles fugiram em um carro amarelo. M. e J. foram presos. Ele era negro e embora barbeado quando foi preso, provou-se que até recentemente usava barba e bigode. Ela era loira e geralmente usava o cabelo em um rabo de cavalo. Eles dirigiam um carro amarelo. A promotoria apresentou o testemunho de um professor de matemática. Ele que sugeriu que um conjunto conservador de probabilidades para as características apontadas pelas testemunhas seria aquele mostrado na Tabela 1. Em seguida, a acusação argumentou que a probabilidade de que todas essas características serem satisfeitas por um casal escolhido ao acaso é o produto das probabilidades apresentadas, ou seja, 1/12. 000.000, que é muito pequena. Com essa argumentação, ele alegou que havia motivo para considerar os réus culpados. O júri concordou e condenou os réus por roubo. Se você fosse o advogado do casal como você teria refutado o argumento acima?

**Tabela 1 - Probabilidades do caso judicial**

| | |
|---|---|
| Homem com bigode | 1/4 |
| Jovem loira | 1/3 |
| Jovem com rabo de cavalo | 1/10 |
| Homem negro com barba | 1/10 |
| Casal inter-racial em um carro | 1/1000 |
| Carro amarelo | 1/10 |

11. *Paradoxo de Simpson (1)*. A Tabela 2 apresenta as quantidades de candidatos e de professores e de professoras contratados nos Departamentos de Ciências Humanas e de Ciências Exatas de uma Universidade. Analise as taxas de contratação e responda se os dados apresentam evidências de que essa Universidade prefere contratar homens a mulheres?

**Tabela 2 - Relação entre candidatos e contratações me Universidade**

| | Mulheres | | Homens | |
|---|---|---|---|---|
| Departamento | Contratadas | Candidatas | Contratados | Candidatos |
| Humanas | 30 | 80 | 5 | 20 |
| Exatas | 15 | 20 | 50 | 80 |

12. *Paradoxo de Simpson (2)*. Estudo sobre dois tratamentos (H e M não têm relação com sexo) para pedras no rim, em função do tamanho das pedras (pequenas ou grandes) em quatro grupos de estudo. A Tabela 3 mostra o sucesso dos tratamentos. Analise os resultados.

**Tabela 3 - Sucesso em tratamentos para pedras no rim**

| | Tratamento | |
|---|---|---|
| Pedras | H | M |
| Pequenas | 0,93 (81/87) | 0,83 (234/270) |
| Grandes | 0,73 (192/263) | 0,69 (55/80) |
| Ambas | 0,78 (273/350) | 0,83 (289/350) |

[1] M. W. Gray, "Statistics and the Law," *Mathematics Magazine*, vol. 56 (1983), pp. 67–81.

13. *Agulha de Buffon*. Uma tábua é graduada com linhas paralelas com espaçamento D entre si. Uma agulha de comprimento L, L ≤ D, é jogada aleatoriamente sobre a mesa. Qual é a probabilidade de que a agulha intercepte uma das linhas (sendo a outra possibilidade a de que a agulha fique completamente contida no espaço existente entre as linhas).

14. Um fabricante de computadores usa chips de três fornecedores na mesma proporção. Os chips dos fabricantes A, B e C são defeituosos com probabilidades 0,001; 0,005 e 0,01, respectivamente. Escolhe-se ao acaso um chip e ele é defeituoso. Qual a probabilidade de que o fornecedor seja A?

15. Um canal de comunicação binário é mostrado na Figura 1. Assuma que as entradas são equiprováveis.

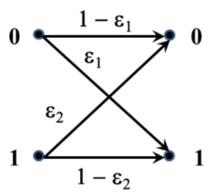


Figura 1 - Canal binário

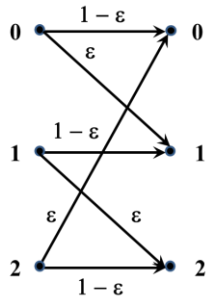


Figura 2 - Canal ternário

   a. Encontre a probabilidade de a saída ser o dígito zero.
   b. Encontre a probabilidade de a entrada ser o dígito zero, dado que a saída é o dígito um.
   c. Encontre a probabilidade de a saída ser o dígito um, dado que a saída é o dígito um.
   d. Qual é a entrada mais provável?

16. Um canal de comunicação ternário é mostrado na Figura 2. Suponha que as entradas 0, 1 e 2 ocorram com probabilidades 0,50; 0,25 e 0,25, respectivamente.
   a. Encontre as probabilidades das saídas.
   b. Suponha que o dígito 1 seja observado como uma saída. Qual é a probabilidade de que entrada seja o dígito 0, 1 ou 2?

17. *Aplicação em Confiabilidade* – A *confiabilidade* de um sistema ou componente é a probabilidade que ele funcione. Muitos sistemas são construídos com redundâncias nos componentes, permitindo alternativas de funcionamento em caso de falhas de algum componente. Considere um sistema com dois subsistemas em série $S_1$ e $S_2$ com respectivamente $m_1$ e $m_2$ componentes idênticos em paralelo. Seja $A_{ij}$, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, \ldots m_i$, o evento em que o componente $j$ do subsistema $S_i$ funciona. Desejamos estabelecer valores para o número de componentes, de modo a obter uma confiabilidade no sistema de pelo menos $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$. Assumimos independência entre os subsistemas e entre os componentes dentro de cada subsistema. Para o sistema funcionar basta que um dos componentes de cada subsistema funcione. Considere os componentes com custos iguais nos dois subsistemas, confiabilidade $\gamma = 0{,}99$, $\alpha_1 = 0{,}7$ e $\alpha = 0{,}8$.