Alguns Exercícios Escolhidos – Probabilidade

1. (Soong, 1986) Sejam os eventos arbitrários A, B e C. Determine as expressões para os seguintes eventos:
   a. Nenhum deles ocorre.
   b. Ocorre somente A.
   c. Ocorre somente um.
   d. Ocorre ao menos um.
   e. A ocorre e B ou C ocorrem, mas não ambos.
   f. Ocorrem B e C, mas não A.
   g. Ocorrem dois ou mais.
   h. Ocorrem no máximo dois.
   i. Ocorrem todos os três.
2. (Paulino e Branco, 2005) Sejam os eventos A, B e C tais que $P(A) = P(B) = 0{,}9$ e $P(C) = 0$.
   a. Prove que $P(A \cap B) \geq 0{,}8$ e $P(A \cap B^c) \leq 0{,}1$;
   b. A e B podem ser mutuamente exclusivos? Justifique;
   c. A e B são independentes? Jusitifique.
3. (Paulino e Branco, 2005) Os eventos A, B e C não podem acontecer simultaneamente. Considere que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$, $P(C) = 1/4$, $P(A \cap B) = P(B \cap C)$ e A é independente de B e C. Calcule:
   a. $P(A^c \cap B)$. *Resp.: 2/15*
   b. $P(C \cap B^c)$. *Resp.: 11/60*
   c. $P(A|B \cup C)$. *Resp.: 9/23*
4. (Soong, 1986) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos. Determine qual das relações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:
   a. $P(A|B) = P(A)$.
   b. $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$.
   c. $P(A) = 0$, $P(B) = 0$, ou ambas.
   d. $\dfrac{P(A|B)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A)}{P(A)}$
   e. $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.
   f. Repita os itens anteriores supondo A e B independentes
5. (Barnes, 1994) Suponha que A e B são eventos associados ao mesmo espaço amostral w. Suponha também que $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A) = 1/3$ e $P(C) = 3/4$.
   a. A e B são eventos independentes?
   b. Determine $P(B|A)$? *Resp.: 3/4*.
   c. A e B são mutuamente exclusivos?
6. (Barnes, 1994) De um grupo formado por 6 calouros e 4 veteranos serão selecionados aleatoriamente cinco estudantes para compor um comitê de organização de um congresso de estudantes de Probabilidade. Determine a probabilidade de que sejam selecionados exatamente três calouros. *Resp,: 0,476*
7. Uma em 100 moedas tem uma cara em ambos as faces. Uma moeda é escolhida ao acaso e é lançada duas vezes. Determine a probabilidade de que ocorram:
   a. Duas caras. *Resp.: 0,2575*
   b. Duas coroas. *Resp.:0,2475*

8. (Grinstead e Snell, 1998) Qual é a probabilidade de que uma família de duas crianças tenha:
    a. dois meninos, dado que pelo menos uma das crianças é um menino? *Resp.: 1/3*
    b. dois meninos, dado que a primeira criança é um menino? *Resp.: 1/2*
9. (Barnes, 1994) Em uma universidade dentre todos os estudantes matriculados cursam engenharia: uma em cada 40 alunas e um em cada 10 alunos. Suponha que na população discente dessa universidade haja duas vezes mais homens que mulheres. Verifica-se que um estudante, escolhido ao acaso nessa população, está matriculado no curso de Engenharia. Qual é a probabilidade de que este estudante seja do sexo masculino? *Resp.: 8/9.*
10. (Grinstead e Snell, 1998) Um estudante se candidata a uma bolsa de iniciação científica em Confiabilidade e a uma bolsa de monitoria de Probabilidade. Ele estima que há uma probabilidade de 0,5 de ele obter a bolsa de iniciação científica e de 0,3, de ser aceito como monitor. Ele estima também que a probabilidade de ele ser aceito em ambas é 0,2.
    a. Qual é a probabilidade de ele obter a bolsa de iniciação científica se ele obtém a bolsa de monitoria? *Resp.: 2/3*
    b. os eventos "obter bolsa de iniciação científica" e "obter bolsa de monitoria são independentes"? *Resp.: Não*
11. (Soong, 1986) Em um trecho de rodovia, a probabilidade de ocorrer acidente por falha humana é 10^{-5} em um dado minuto e a probabilidade de acidente devido a falha mecânica é 10^{-7}. Suponha que as duas causas são independentes.
    a. Determine a probabilidade de ocorrência de acidente naquele trecho durante um minuto. *Resp.:* $\approx 10^{-5}$
    b. Pode a resposta anterior ser aproximada por P{acidente por erro humano} + P{acidente devido a falha mecânica}? Explique.
    c. Se os eventos em minutos sucessivos são mutuamente independentes, qual a probabilidade de não haver acidente algum naquele trecho durante um ano? *Resp.: 0,00499*
12. (Soong, 1986) No cruzamento de uma rua principal e uma rua secundária, constatou-se que, de cada 100 intervalos no tráfego da via principal, 65 são "aceitáveis", isto é, suficientes para permitir a passagem de um carro na rua secundária. Quando um veículo chega no cruzamento pela via secundária,
    a. Qual a probabilidade de o primeiro intervalo não ser aceitável? *Resp.: 0,35.*
    b. Qual a probabilidade de os dois primeiros intervalos não serem aceitáveis? *Resp.: 0,1225.*
    c. Um carro conseguiu atravessar. Qual a probabilidade de um segundo carro poder atravessar no intervalo seguinte? *Resp.: 0,65.*
13. (Paulino e Branco, 2005) Certo tipo de motor elétrico avariado pode apresentar quatro tipos de falhas, denotadas por F_1, F_2, F_3 e F_4, cujas probabilidades de ocorrência são iguais. Sejam os eventos $A = \{F_1, F_2\}$, $B = \{F_1, F_3\}$, $C = \{F_1, F_4\}$ e $D = \{F_2, F_3\}$.
    a. Mostre que os eventos A, B e C são independentes aos pares.
    b. Pode-se afirmar que $P(C \mid A \cap B) = P(C)$? Justifique. *Resp.: Não*
    c. Justifique a afirmação: "como a ocorrência simultânea de C e D é impossível, C e D são necessariamente dependentes".
14. Numa oficina de manutenção e reparo dos motores descrito na questão (13) há, em um determinado momento, quatro motores com falha e seis motores já consertados. São

escolhidos aleatoriamente, sem reposição, dois motores. Verifica-se que um deles está em boas condições. Qual a probabilidade de que o outro esteja também reparado. *Resp.: 5/9*.

15. (Soong, 1986) Em um sistema de águas pluviais, as estimativas de taxa máxima anual de escoamento (TMAE) e suas probabilidades de ocorrência [supondo possível um máximo de 12 pés cúbicos por segundo (pcs)] são:

    Evento A: 5 a 10 pcs, P(A) = 0,6.

    Evento B: 8 a 12 pcs, P(B) = 0,6.

    Evento C: A∪B, P(C) = 0,7.

    a. $P(8 \leq TMAE \leq 10)$. *Resp.: 0,5*
    b. $P(5 \leq TMAE \leq 12)$. *Resp.: 0,7*
    c. $P(10 \leq TMAE \leq 12)$. *Resp.: 0,1*
    d. $P(8 \leq TMAE \leq 10 \mid 5 \leq TMAE \leq 10)$. *Resp.: 5/6*
    e. $P(5 \leq TMAE \leq 10 \mid TMAE \geq 5)$. *Resp.: 0,6*

16. (Paulino e Branco, 2005) A probabilidade de que pelo menos duas de três pessoas, A, B e C estejam vivas daqui a 8 anos é 54/125. Desse grupo de pessoas, a probabilidade de que apenas A esteja viva ao fim de 8 anos é 3/125 e a probabilidade de que apenas C morra dentro de 8 anos é 2/125. Admitindo que os acontecimentos definidos pela sobrevivência de A, B e C são independentes, calcule a probabilidade de sobrevivência de cada uma das pessoas ao fim de 8 anos. *Resp.: 1/5, 2/5 e 4/5 (respectivamente)*

17. (Paulino e Branco, 2005) Os circuitos A e B emitem independentemente traços e pontos do seguinte modo: dos sinais emitidos por A, 2/3 são traços e 1/3 são pontos, enquanto que para o emissor B, os pontos são duas vezes mais prováveis que os traços. Escolhe-se ao acaso o circuito a ser operado.
    a. Sabendo-se que foram emitidos dois traços, qual a probabilidade de que o terceiro sinal também seja um traço? *Resp.: 3/5*
    b. Se nos primeiros *n* sinais, *k* são traços, determine a expressão da probabilidade de que o circuito em operação seja o circuito A. *Resp.:* $(1 + 2^{n-2k})^{-1}$

18. (Paulino e Branco, 2005) Para a construção de uma barragem em certo local, um engenheiro inspeciona, nas proximidades, uma pedreira para obter a brita necessária para o concreto. Através de indicações da superfície e de uma sondagem do subsolo, o engenheiro conclui que o tamanho da pedreira é tal que: (i) é suficiente para a quantidade de brita exigida, com probabilidade 0,4; (ii) cobre apenas 50% da quantidade necessária, com probabilidade 0,5; (iii) é mais do que suficiente , cobrindo 150% da quantidade necessária, com probabilidade 0,1. Admita que, de fato, só podem existir esses três casos para o estado da pedreira e que as probabilidades de uma amostra indicar cada um desses estados dependem do verdadeiro estado da pedreira como indicado na tabela:

	Estado indicado pela perfuração		
Estado real da pedreira	Insuficiente	Suficiente	Mais que suficiente
Insuficiente	0,50	0,40	0,10
Suficiente	0,40	0,50	0,10
Mais que suficiente	0,20	0,40	0,40

    a. Quais as probabilidades de a amostra indicar cada um dos estados da pedreira? *Resp.: 0,43; 0,44 e 0,13 (respectivamente)*

b. Sabendo que o resultado de uma segunda perfuração foi 'estado suficiente', calcule as novas probabilidades de cada um dos verdadeiros estados da pedreira e compare-as com os valores de que partiu o engenheiro. *Resp.: 0,455; 0,455 e 0,09 (respectivamente)*

19. (Paulino e Branco, 2005) Cada uma de duas máquinas, A e B, produz grande número de itens. Sabe-se que são defeituosos 4% dos itens fabricados por A e 2% daqueles fabricados por B. Selecionam-se ao acaso dois itens produzidos pela mesma máquina, verificando-se que exatamente um deles é defeituoso. Antes da inspeção acreditava-se que a probabilidade de dois artigos serem produzidos por A era o dobro da probabilidade de serem produzidos por B.
    a. Em face do resultado da inspeção, qual é a probabilidade de os dois artigos terem sido fabricados por B? *Resp.: 0,203*
    b. Se a inspeção tivesse revelado que os dois artigos eram defeituosos, qual seria a nova probabilidade de B tê-los produzido? Seria previsível esperar um valor inferior ao obtido em (a)? *Resp.: 0,012*
20. (Paulino e Branco, 2005) Os itens fabricados por uma empresa são produzidos por três máquinas A, B e C. As máquinas A e B produzem 90% e 4%, respectivamente, dos produtos que satisfazem os critérios de qualidade. Dos demais produtos, que serão ser retrabalhados, 88% provém da máquina B e 9% da máquina C. Os produtos de boa qualidade constituem 70% da produção global. Calcule a probabilidade de:
    a. um item escolhido ao acaso da produção global da empresa ter vindo de A; *Resp.: 0,639*
    b. um item produzido pela máquina A ter sido retrabalhado. 1/71
    c. a produção de C ser de boa qualidade. *Resp.: 14/23*
21. (Paulino e Branco, 2005) Num país da América do Sul 10% da população sofre de uma determinada doença: 6% com a forma maligna e 4% com a forma benigna. Para seu diagnóstico é efetuado um teste que dá resultado positivo:
    – com probabilidade um, para um indivíduo com a doença na forma maligna;
    – com probabilidade 0,75, para um indivíduo com a doença na forma benigna;
    – com probabilidade 0,05, para um indivíduo não doente.
    a. Efetuando o teste em um indivíduo escolhido ao acaso nessa população, qual a probabilidade de o resultado ser positivo? *Resp.: 0,135*
    b. Se o resultado do teste foi positivo para um indivíduo escolhido ao acaso nessa população, qual a probabilidade de ele ter a doença? *Resp.: 0,667*
    c. Os eventos "ter a doença na forma maligna" e "ter a doença na forma benigna" são independentes? Justifique.
22. (Soong, 1986) Em um estudo de sinais de tráfego sincronizados, consideremos um sistema simples de quatro sinais. Suponhamos que cada sinal permaneça vermelho durante 30 segundos em um ciclo de 50 segundos e que $P(S_{j+1}|S_j) = 0{,}15$ e $P(S_{j+1}|S^c_j) = 0{,}40$, para j = 1, 2, 3, onde S_j é o evento "um motorista é retido pelo jésimo sinal". Supomos o sistema dotado de memória de um sinal. Por meio de um diagrama de árvore, determine a probabilidade de um motorista:
    a. Ser retido por todos os quatro sinais. *Resp.: 0,002.*
    b. Não ser retido por nenhum dos sinais. *Resp.: 0,086*
    c. Ser retido no máximo por um sinal. *Resp.: 0,4904*

23. (Soong, 1986) Uma nave espacial tem 1.000 componentes em série. Se a confiabilidade da nave deve ser 0,9 e se todos os componentes têm o mesmo grau de confiabilidade, qual deve ser a confiabilidade de cada componente? *Resp.: 0,9999*
24. Uma máquina automática de uma pequena fábrica produz peças metálicas. Na maior parte do tempo de operação (90%, considerado um período longo de observação), essa máquina produz 95% de peças de boa qualidade. No restante do tempo, a máquina sofre um desajuste e produz apenas 70% de peças boas. As peças defeituosas são descartadas. O supervisor de produção mantém a qualidade das peças produzidas por essa máquina em observação e para a produção para ajustar a máquina quando ele acredita que a máquina não está produzindo bem. Suponha que a primeira dúzia de peças produzidas teve a seguinte sequência de classificação:

$$\boxed{0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1}$$

em que 1 indica peça classificada como não conforme (defeituosa) e 0, como conforme (boa).

   a. Após observar esta sequência, qual é a probabilidade de máquina estar em bom estado?
   b. Se o supervisor deseja parar a máquina quando a probabilidade de "bom estado" estiver abaixo de 0,7, quando ele deveria parar?

25. (Grinstead e Snell, 1998) Em uma época de chuvas torrenciais, Ana está tentando viajar de carro de Juiz de Fora a Cabo Frio.
   a. Suponha que o trajeto esteja conectado com o formato do grafo da Figura 1 (a). p e q são as probabilidades de que as duas estradas estejam transitáveis. Qual é a probabilidade de Ana poder ir de Juiz de Fora a Cabo Frio?
   b. Agora suponha que Juiz de Fora e cabo Frio estejam conectadas de acordo com o grafo da Figura 1 (b). Qual é agora a probabilidade de ela possa ir de Juiz de Fora a Cabo Frio? Note que se nós pensamos que as estradas sejam componentes de um sistema, então em (a) e (b) nós calculamos a confiabilidade de um sistema cujos componentes estão em série [grafo (a)] e em paralelo [grafo (b)].
   c. Agora suponha que Juiz de Fora e Cabo Frio estejam conectadas de acordo com o grafo da Figura 1 (c). Encontre a probabilidade de Ana ir de Juiz de Fora a Cabo Frio.

Referências:

– Paulino, C. D. e Branco, J. A. (2005). *Exercícios de Probabilidade e Estatística*. Escolar Editora: Lisboa.
– Soong, T. T. (1986). *Modelos Probabilísticos em Engenharia e Ciências*. LTC: Rio de Janeiro.
– Barnes, J. W. (1994). *Statistical Analysis for Engineers and Scientists: a computer-based approach*. McGraw-Hill: New York.
– Grinstead, C. M., e Snell, J. L. (1998). *Introduction to Probability*. American Mathematical Society.

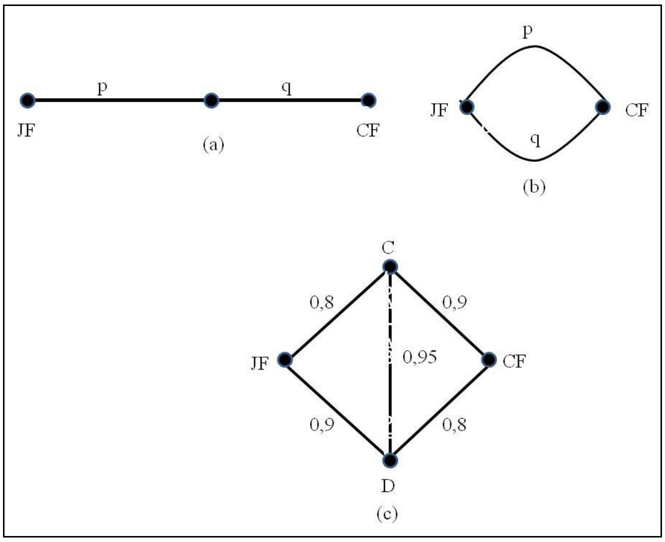

Figura 1 - Grafos do trajeto Juiz de Fora - Cabo Frio