

**Exercícios Sugeridos – Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas**

1. (Paulino e Branco, 2005) Num depósito estão armazenadas 500 embalagens de um produto, das quais 50 estão deterioradas. Inspecciona-se uma amostra de 10 embalagens selecionadas ao acaso, com reposição:
  - a. Qual é a probabilidade de que a inspeção rejeite a distribuição da mercadoria, dado que se permite a presença de, no máximo, 3 embalagens deterioradas na amostra? *Resp.: 0,013*
  - b. Que dimensão deve ter a amostra para que a probabilidade de rejeição seja aproximadamente 5%? Qual o número médio de embalagens deterioradas nesta nova amostra? *Resp.: 15 e 1,5*
  - c. Se uma empresa possui 100 depósitos naquelas condições (situação do item a), em quantos se pode esperar que haja rejeição? *Resp.: 1,3.*
2. (Paulino e Branco, 2005) Uma empresa está disposta a comprar um conjunto de 100 unidades de um produto de acordo com o seguinte esquema:
  - Um inspetor examina ao acaso 5 unidades, sem reposição;
  - A empresa confirmará a compra se a inspeção revelar menos de 3 artigos defeituosos na amostra.O vendedor sabe que 20% das unidades do produto são defeituosas:
  - a. Qual a probabilidade de a empresa confirmar a compra? *Resp.: 0,947*
  - b. Esta probabilidade será alterada significativamente se os artigos que vão sendo inspecionados forem repostos? Comente.
  - c. Nas situações de inspeção consideradas em (a) e (b), se espera que quantos artigos sejam defeituosos? *Resp.: 1*
3. (Paulino e Branco, 2005) Um cliente de uma empresa pretende adquirir 100 conjuntos de duas peças com distintos níveis de qualidade. As peças de qualidade A têm tempo de vida que pode ser considerada distribuída normalmente com média 120 h e desvio padrão 24 h. As peças de qualidade B também têm duração Normal, com média 80 h e desvio padrão 20 h, independentemente da duração das peças de qualidade A. O cliente e o fornecedor combinaram o seguinte procedimento de compra: seleciona-se uma peça de cada qualidade, medindo-se as respectivas durações. Se a duração da peça de qualidade A for superior a duas vezes a da peça B, o cliente pagará por cada par a quantia de \$200; se a duração da peça B for superior à da A, paga \$150 por cada par adquirido e, finalmente, paga apenas \$100 por par em qualquer outra situação.
  - a. Calcule a probabilidade de uma peça de qualidade A ter uma duração pelo menos o dobro da de uma peça de qualidade B. *Resp.: 0,195*
  - b. Qual quantia o fornecedor espera receber do cliente, considerado o procedimento acordado entre ambos? *Resp.: \$ 12.451,50*
4. (Paulino e Branco, 2005) A empresa de transporte público de uma cidade dispõe de uma frota de 1.000 ônibus. Estudos indicam que a probabilidade de um ônibus avariar num dado dia é de 0,24%.
  - a. Qual o número médio de ônibus avariados por mês (30 dias)? *Resp.: 72; 0,012; 0,726; pelo menos 8 ônibus*
  - b. Se a oficina tem capacidade máxima de 6 ônibus por dia, calcule a probabilidade aproximada de ela ser insuficiente para reparar as avarias ocorridas num dado dia. *Resp.: 0,012*

- c. Determine aproximadamente a probabilidade de a oficina não poder reparar as avarias em pelo menos 16 dias em 4 anos de funcionamento. *Resp.: 0,726*
- d. Que capacidade deveria ter a oficina para que a probabilidade de ela não ser excedida num dado dia fosse de pelo menos 0,999? *Resp.: pelo menos 8 ônibus*
5. (Paulino e Branco, 2005) A lotação de um avião é de 100 passageiros. O seu peso, incluídos combustível e tripulação é de 120 toneladas (sem passageiros nem suas bagagens). As condições de segurança proíbem a decolagem se o peso total do avião ultrapassa as 129,4 toneladas. O peso de um passageiro é em média de 70 kg com um desvio padrão de 10 kg e o peso de suas bagagens apresenta uma média de 20kg e um desvio padrão de 5 kg. Admitindo a independência entre os pesos dos passageiros e de suas bagagens, pode-se considerar que há uma quantidade suficientemente grande de termos para se considerar a distribuição de probabilidade do peso total (soma de variáveis aleatórias dos pesos individuais) bem aproximada pela distribuição Normal.
- a. Calcule a média e o desvio padrão do peso total do avião lotado no momento da decolagem. *Resp.: 129 ton; 0,112 ton*
- b. Qual a probabilidade de o comandante se negar a decolar com o avião lotado por violação das normas de segurança? *Resp.:  $2 \times 10^{-4}$*
6. (Paulino e Branco, 2005) Numa fábrica de tintas, o produto é acondicionado automaticamente em latas com aproximadamente 20 litros, verificando-se que o volume de cada lata varia de acordo com uma distribuição Normal. O departamento de controle de qualidade detectou que 30% das latas produzidas apresentam um volume inferior a 20%. Resolve-se, então, regular o processo de enlatagem da tinta de modo que o volume médio de cada lata aumentasse de 100 ml, sem alteração do desvio padrão do processo. Com esta modificação, verificou-se que a referida porcentagem baixou para 12%. Devido a reclamações posteriores dos clientes, a empresa decidiu efetuar uma nova modificação do processo de maneira a reduzir a porcentagem de latas com volumes inferiores a 20 litros para um valor mais aceitável. Contudo, não quer gastar para mais de \$8.500 k por mês com o valor do peso médio adicional referente às latas produzidas mensalmente.
- a. Qual deve ser o aumento do volume médio de uma lata para que a referida porcentagem se reduza a 10%? *Resp.: 0,115 litros*
- b. Sabendo que cada litro de tinta custa \$500 e que se produzem mensalmente 100.000 latas, qual deve ser a decisão da empresa? *Resp.: 0,16638 litros*
- c. De acordo com (b), qual seria o número médio de latas produzidas por mês com volume compreendido entre 20 e 20,65 litros? *Resp.: 94.700*
7. (Paulino e Branco, 2005) O diâmetro dos parafusos produzidos por uma determinada máquina é uma variável aleatória normal com valor médio 10,0 mm e desvio padrão 0,2 mm. Admita que, na saída da linha de produção, os parafusos são selecionados de maneira que os parafusos com diâmetro superior a 10,1 mm sejam remetidos para a Seção A, sendo os restantes enviados para a Seção B. Calcule o diâmetro médio dos parafusos enviados para a Seção B.
- a. Sabendo-se que um parafuso tem diâmetro compreendido entre 9 e 11 mm, calcule a probabilidade de que o seu diâmetro seja efetivamente inferior a 10 mm. *Resp.: 0,5*

- b. Calcule a probabilidade de aparecer na saída da linha de produção pelo menos um parafuso para remeter à Seção B, antes de sair o primeiro que vai para a Seção A. *Resp.: 0,6915*
- c. Determine o valor médio e a variância do número médio de parafusos que vão para B antes de ser encontrado um que é remetido para A. *Resp.: 2,24 e 7,27*
8. (Paulino e Branco, 2005) Um posto de gasolina é reabastecido uma vez por semana. As vendas no passado sugerem que a função de densidade de probabilidade do volume de vendas semanais,  $X$ , medido em dezenas de milhares de litros é dada por:
- a. Calcule a probabilidade de, em uma semana, o volume de vendas se situar entre os 15.000 e 23.000 litros. *Resp.: 0,63*
- b. Calcule o valor esperado e o desvio padrão do volume de vendas semanais. *Resp.: 20.000 l e 4.082,48 l*
- c. Determine a quantidade mínima de gasolina que o posto deve receber da distribuidora por semana, de maneira que o caminhão tanque abastecedor não encontre gasolina esgotada no posto em mais de 8% das semanas. *Resp.: 2.600 l*
- d. Admitindo que o volume de vendas é independente de semana para semana, calcule a probabilidade de em dois anos o posto vender mais de 210 dezenas de milhar de litros. (Considere que há um número suficientemente grande de semanas para se considerar a distribuição normal uma boa aproximação para a variável aleatória da soma das vendas semanais). *Resp.: 0,316*

O referido posto de combustíveis situa-se numa via ao longo da qual os postos se distribuem segundo uma distribuição de Poisson com média de 1 posto a cada 10 km. Devido a uma greve no abastecimento de gasolina, cada posto tem, independentemente dos outros, uma probabilidade de 0,2 de estar sem combustível para venda.

- e. Qual é a probabilidade de não existirem mais de dois postos nos próximos 25 km? *Resp.: 0,544*
- f. Qual é a probabilidade de nos próximos 3 postos nenhum ter gasolina para vender? *Resp.: 0,008*
- g. Qual é a probabilidade de ser o 2º posto o primeiro posto aonde se encontra gasolina? *Resp.: 0,16*
9. (Montgomery, 2009) Água de Fênix é fornecida para aproximadamente 1,4 milhão de pessoas, que são servidas através de mais de 362.000 contas. Todas as contas são medidas e cobradas mensalmente. A probabilidade de uma conta conter um erro em um mês é 0,001 e contas podem ser consideradas independentes.
- a. Quais são a média e o desvio-padrão do número de contas com erro a cada mês? *Resp.: 362 e 19,0168*
- b. Aproxime a probabilidade de menos de 350 erros em um mês. *Resp.: 0,2555*
- c. Aproxime um valor de modo que a probabilidade de o número de erros exceder esse valor seja 0,05. *Resp.: 392,7799*
- d. Aproxime a probabilidade de mais de 400 erros por mês nos próximos dois meses. Considere que os resultados entre os meses sejam independentes.

10. (Montgomery, 2009) O volume de enchimento de uma máquina automática de enchimento usada para encher latas de bebidas gasosas é distribuído normalmente, com uma média de 12,4 onças fluidas e um desvio-padrão de 0,1 onça fluida.
- Qual é a probabilidade de o volume de enchimento ser menor que 12 onças fluidas? *Resp.:  $\approx 0$*
  - Se todas as latas menores que 12,1 ou maiores que 12,6 onças forem rejeitadas, que proporção de latas será rejeitada? *Resp.: 0,02275*
  - Determine as especificações que sejam simétricas em torno da média que incluam 99% de todas as latas. *Resp.: (12,142; 12,658)*
  - Qual o valor da média que deveria ser estabelecida, de modo que 99,9% de todas as latas excedessem 12 onças? *Resp.: 12,309*
  - Qual o valor da média que deveria ser estabelecida, de modo que 99,9% de todas as latas excedessem 12 onças, se o desvio-padrão pudesse ser reduzido para 0,05 onça fluida? *Resp.: 12,1545*
11. (Montgomery, 2009) O comprimento de uma capa de plástico, moldada por injeção e que reveste uma fita magnética, é normalmente distribuído, com um comprimento médio de 90,2 milímetros e um desvio-padrão de 0,1 milímetro.
- Qual é a probabilidade de uma peça ser maior que 90,3 milímetros ou menor que 89,7 milímetros? *Resp.: 0,15866*
  - Qual deveria ser a média do processo a se usar de modo a se obter o maior número de peças entre 89,7 e 90,3 milímetros? *Resp.: 90,0*
  - Se peças que não estejam entre 89,7 e 90,3 milímetros forem descartadas, qual será o rendimento para a média do processo que você selecionou em (b)? *Resp.: 0,9973*
- Suponha que o processo está centralizado, de modo que a média é 90 milímetros e o desvio-padrão é 0,1 milímetro. Suponha que 10 casos são medidos e considerados independentes.
- Qual é a probabilidade de os 10 casos estarem entre 89,7 e 90,3 milímetros? *Resp.: 0,9733*
  - Qual é o número esperado dos casos que estão entre 89,7 e 90,3 milímetros? *Resp.: 9,973*
12. (Montgomery, 2009) O tempo entre chamadas é distribuído exponencialmente, com um tempo médio entre chamadas igual a 10 minutos.
- Qual é a probabilidade de o tempo até a primeira chamada ser menor do que 5 minutos? *Resp.: 0,3935*
  - Qual é a probabilidade de o tempo até a primeira chamada estar entre 5 e 15 minutos? *Resp.: 0,3834*
  - Sendo 0,90 a probabilidade de existir no mínimo uma chamada no intervalo, determine o comprimento de um intervalo de tempo. *Resp.: 23,03*
  - Se não houvesse uma chamada em 10 minutos, qual seria a probabilidade de o tempo até a próxima chamada fosse menor que 5 minutos? *Resp.: 0,3935*
  - Qual é a probabilidade de não haver chamada nos intervalos de 10 h a 10 h 05 min, de 11 h 30 min a 11 h 35 min e de 14 h a 14 h 05 min? *Resp.: 0,2231*
  - Qual é a probabilidade de o tempo até a terceira chamada ser maior do que 30 min?
  - Qual é o tempo médio até a quinta chamada? *Resp.: 50 min.*

13. (Montgomery, 2009) Sem um sistema automático de irrigação, a altura das plantas duas semanas depois de germinar é distribuída normalmente, com uma média de 2,5 cm e um desvio-padrão de 0,5 cm.
- Qual é a probabilidade da altura da planta ser maior do que 2,25 cm? *Resp.: 0,6915*
  - Qual é a probabilidade da altura da planta estar entre 2,0 e 3,0 cm? *Resp.: 0,683*
  - Que altura é excedida por 90% das plantas? *Resp.: 1,86*
- Com um sistema automático de irrigação, uma planta cresce até uma altura de 3,5 cm duas semanas depois de germinar.
- Qual é a probabilidade de obter uma planta dessa altura ou maior a partir da distribuição de alturas sem um sistema automático de irrigação? *Resp.: 0,23*
  - Você pensa que o sistema automático de irrigação aumenta a altura da planta em duas semanas depois da germinação? *Resp.: Sim*
14. (Montgomery, 2009) A probabilidade de um alinhamento óptico com sucesso em um arranjo de um produto de armazenamento de dados ópticos é de 0,8. Considere que as tentativas são independentes.
- Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento com sucesso requeira exatamente quatro tentativas? *Resp.: 0,0064*
  - Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento com sucesso requeira no máximo quatro tentativas? *Resp.: 0,9984*
  - Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento com sucesso requeira no mínimo quatro tentativas? *Resp.: 0,008*
15. (Montgomery, 2009) Um jogador de videogame é confrontado com uma série de oponentes e tem uma probabilidade de 80% de derrotar cada um deles. O sucesso com cada oponente é independente de confrontos prévios. O jogador continua a enfrentar oponentes até ser derrotado.
- Qual é a função de probabilidade do número de oponentes enfrentados em um jogo?
  - Qual é a probabilidade de o jogador derrotar no mínimo dois oponentes em um jogo?
  - Qual é o número esperado de oponentes enfrentados em um jogo?
  - Qual é a probabilidade de o jogador enfrentar quatro ou mais oponentes em um jogo?
  - Qual é o número esperado de jogos até que um jogador enfrente quatro ou mais oponentes?
16. (Montgomery, 2009) Um sistema de computadores usa senhas que são compostas a partir das 26 letras (A-Z) ou dos 10 inteiros (0-9). Suponha que haja 10.000 usuários no sistema com senhas únicas. Um invasor seleciona aleatoriamente (com reposição) senhas de um conjunto potencial.
- Existem 9900 usuários com senhas com seis caracteres únicos no sistema e o invasor seleciona aleatoriamente senhas com seis caracteres. Quais são a média e o desvio-padrão do número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário?
  - Suponha que haja 100 usuários com senhas com três caracteres únicos no sistema e o invasor seleciona aleatoriamente senhas com três caracteres. Quais

- são a média e o desvio-padrão do número de tentativas antes de o invasor selecionar uma senha do usuário?
- c. Comente as diferenças de segurança entre as senhas com seis e três caracteres.
17. (Montgomery, 2009) Um estado tem uma loteria em que seis números são selecionados aleatoriamente de 40, sem reposição. Um jogador escolhe seis números antes de a amostra do estado ser selecionada.
- Qual é a probabilidade de que os seis números escolhidos pelo jogador coincidam com todos os seis números na amostra do estado? *Resp.:  $8,15 \times 10^{-8}$*
  - Qual é a probabilidade de que cinco dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam na amostra do estado? *Resp.:  $2,05 \times 10^{-5}$*
  - Qual é a probabilidade de que quatro dos seis números escolhidos pelo jogador apareçam na amostra do estado? *Resp.: 0,00105*
  - Se um jogador for a uma loteria toda semana, qual é o número esperado de semanas até que o jogador coincida todos os seis números da amostra do estado? *Resp.:  $12.271,512 = 2.359$  séculos*
18. (Montgomery, 2009) Fita magnética é cortada em pedaços, com uma largura de meia polegada, que são enrolados em cartuchos. Um arranjo contém 48 lâminas. Cinco lâminas são selecionadas ao acaso e avaliadas a cada dia em relação ao afiamento. Se alguma lâmina não afiada for encontrada, o arranjo será trocado por um novo conjunto de lâminas afiadas.
- Se 10 das lâminas em um arranjo não estiverem afiadas, qual será a probabilidade de que o arranjo seja trocado no primeiro dia que ele seja avaliado? *Resp.: 0,7069*
  - Se 10 das lâminas em um arranjo não estiverem afiadas, qual será a probabilidade de que o arranjo não seja trocado até o terceiro dia de avaliação? [*Sugestão: Suponha que as decisões diárias sejam independentes e use a distribuição geométrica.*] *Resp.: 0,0607*
  - Considere que no primeiro dia de avaliação duas das lâminas estejam não afiadas e no terceiro dia de avaliação, 10 estejam não afiadas. Qual é a probabilidade de que o arranjo não seja trocado até o terceiro dia de avaliação? [*Sugestão: Suponha que as decisões diárias sejam independentes. No entanto, a probabilidade de troca muda a cada dia.*] *Resp.: 0,2811*
19. (Montgomery, 2009) Uma rede congestionada de computadores tem 1% de chance de perder um bloco de dados e perdas de blocos são eventos independentes. Uma mensagem de e-mail requer 100 blocos.
- Qual é a distribuição de blocos de dados que devem ser reenviados? Inclua os valores dos parâmetros.
  - Qual é a probabilidade de no mínimo um bloco ter de ser reenviado?
  - Qual é a probabilidade de dois ou mais blocos terem de ser reenviados?
  - Quais são a média e o desvio-padrão do número de blocos que têm de ser reenviados?
  - Se há 10 mensagens e cada uma contém 100 blocos, qual é a probabilidade de no mínimo uma mensagem requerer que dois ou mais blocos sejam reenviados?
20. (Montgomery, 2009) A probabilidade de uma águia matar um coelho em um dia de caça é 10%. Considere que os resultados sejam independentes entre dias.

- a. Qual é a distribuição do número de dias até que a caça ao coelho tenha sucesso?
  - b. Qual é a probabilidade de a águia ter de esperar 5 dias para sua primeira caçada de sucesso?
  - c. Qual é o número esperado de dias até que a caçada tenha sucesso?
  - d. Se a águia puder sobreviver até 10 dias sem alimento (isso requer uma caçada de sucesso no décimo dia), qual é a probabilidade de a águia estar ainda viva 10 dias a partir de agora?
21. (Montgomery, 2009) A probabilidade com que sua chamada para uma linha de serviço seja respondida em menos de 30 segundos é de 0,75. Suponha que suas chamadas sejam independentes.
- a. Se você chamar 10 vezes, qual será a probabilidade de que exatamente 9 de suas chamadas sejam respondidas dentro de 30 segundos? *Resp.: 0,1877*
  - b. Se você chamar 20 vezes, qual será a probabilidade de que no mínimo 16 chamadas sejam respondidas em menos de 30 segundos? *Resp.: 0,4148*
  - c. Se você chamar 20 vezes, qual será o número médio de chamadas que serão respondidas em menos de 30 segundos? *Resp.: 15*
  - d. Qual é a probabilidade de você ter de chamar quatro vezes para obter a primeira resposta em menos de 30 segundos? *Resp.: 0,0117*
  - e. Qual é o número médio de chamadas até que você tenha respondido em menos de 30 segundos? *Resp.: 4/3*
  - f. Qual é a probabilidade de você ter de chamar seis vezes de modo que duas de suas chamadas sejam respondidas em menos de 30 segundos? *Resp.: 0,0110*
  - g. Qual é o número médio de chamadas para obter duas respostas em menos de 30 segundos? *Resp.: 8/3*
22. (Montgomery, 2009) Um técnico de instalação de um sistema especializado de comunicação é enviado para uma cidade somente quando existirem três ou mais ordens de serviço. Suponha que as ordens de serviço sigam uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,25 por semana, para uma cidade com população de 100.000 habitantes e suponha que sua cidade contenha uma população de 800.000.
- a. Qual é a probabilidade de que um técnico seja requisitado depois de um período de uma semana? *Resp.: 0,3233*
  - b. Se você for o primeiro na cidade a solicitar uma ordem de serviço, qual será a probabilidade de que você tenha de esperar mais de duas semanas, a partir do tempo de solicitação da ordem de serviço, até que o técnico seja despachado? *Resp.: 0,092*
23. (Montgomery, 2009) Uma grande padaria pode produzir pães em lotes de 0, 1.000, 2.000 ou 3.000 por dia. O custo de produção por item é \$0,10. A demanda varia aleatoriamente de acordo com a seguinte distribuição:

Demanda por pães	0	1.000	2.000	3.000
Probabilidade de demanda	0,3	0,2	0,3	0,2

Cada pão para o qual há demanda é vendido a \$0,30. Cada pão para o qual não há qualquer demanda é vendido por \$0,05, em um mercado secundário. Quantos pães a padaria deveria produzir cada dia para maximizar o lucro médio? *Resp.: qualquer valor entre 2.000 e 3.000*

24. (Montgomery, 2009) Um fabricante estoca componentes obtidos de um fornecedor. Suponha que 2% dos componentes sejam defeituosos e que esses componentes ocorram independentemente. Quantos componentes o fabricante tem de ter em estoque, de modo que a probabilidade de 100 ordens poderem ser completadas sem pedir mais componentes seja de no mínimo 0,95? *Resp.: 105*
25. (Soong, 1986) Atira-se contra um alvo e sabe-se que os tiros são independentes. Supondo que a probabilidade de acertar seja 0,9, calcule a probabilidade de serem necessários:
- Mais de dois tiros para acertar. ?
  - Entre quatro e seis tiros (inclusive), para acertar?
26. (Soong, 1986) Os trens de um sistema metropolitano chegam a uma determinada estação com intervalo de cinco minutos e partem após uma parada de um minuto para receber passageiros. Supondo que os trens andem sempre no horário, qual a probabilidade de um passageiro poder tomar o trem imediatamente, se ele chega à estação em um instante aleatório entre 7:54 e 8:06 da manhã?