Lista nº 02 – Probabilidade (Exercícios Teóricos)

1. Um importante conceito na teoria da probabilidade é o da independência condicional de eventos. Dizemos que os eventos E_1 e E_2 são *condicionalmente independentes* dado F, se, dado que F ocorreu, a probabilidade condicional de E_1 ocorrer não é afetada pela informação de que E_2 tenha ou não ocorrido. Mais formalmente, E_1 e E_2 são ditos condicionalmente independentes dado F se $P(E_1|E_2 \cap F) = P(E_1|F)$. Dada essa definição, prove que:
   a. $P(E_1 \cap E_2|F) = P(E_1|F)\, P(E_2|F)$;
   b. $P(E_1 |E_2^c \cap F) = P(E_1|F)$;
   c. $P(E_1^c \cap E_2^c |F) = P(E_1^c |F)\, P(E_2^c|F)$.

2. Prove que se $P(A|B) > P(A)$ então $P(B|A) > P(B)$
   (Ex. 3.29, Meyer, pág. 63)

3. Suponha que *A* e *B* são eventos tais que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ e $P(A|B) + P(B|A) = 2/3$. Calcule $P(A^c \cup B^c)$.
   Resp.: 11/12

4. Provar que:
   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

5. A desigualdade de Bonferroni estabelece que:
   $$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$
   a. Use um diagrama de *Venn* para se convencer que a desigualdade de Bonferroni é verdadeira;
   b. Use as propriedades de probabilidade para prová-la diretamente;
   c. Use a indução para generalizar a desigualdade de *Bonferroni* para n eventos, ou seja, prove que:
   $$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) - (n - 1)$$