Lista nº 06 – Variáveis Aleatórias (2ª. Parte)

1. Mostre que não há nenhum número c tal que a seguinte função $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{1+x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

   Calcule P$\{X > 2\}$.
   Resp.: $3e^{-2}$

3. A função

$$F_X(x) = k\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{[x]}\right), \quad x > 0$$

   é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X, onde $[x]$ denota a parte inteira de x, ou seja, o maior inteiro menor ou igual a x.
   a. Determine o valor de k.
   b. Especifique a função de probabilidade de X.

4. A função

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{6}, & 0 \leq x < 2, \\ -ax + 3a, & x \geq 2 \end{cases}$$

   é a função de distribuição de uma variável aleatória X.

   a. Determine a função de densidade generalizada de X.
   b. Calcule P$\{0 \leq X < 2\}$ e P$\{0 < X < 2\}$. *Resp.: 1/3 e 1/2.*
   c. Calcule P$\{X = 2\}$. *Resp.: 1/3.*

5. A função de distribuição acumulada de X é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{3}{4}e^{-x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

   Determine P$\{0 \leq X < 1\}$.
   Resp.: $1 - 3/4e^{-1}$

6. A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

   Seja Y = máximo$\{X, c\}$, $c > 0$. Determine a função de distribuição de Y.
   Resp.: $y/(1+y)$, $y \geq c$; 0, caso contrário.

7. Seja X uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade $f(x) = cx^2$, $-1 \le x \le 1$ e $f(x) = 0$, caso contrário.

    a. Determinar o valor da constante c.
    Resp: 3/2.
    b. calcule P{ $|X| > 1/2$}.
    Resp.: 7/8
    c. Ache α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$.
    Obs.: O valor de a que satisfaz esta relação é denominado primeiro quartil da distribuição de X.
    Resp: $-2^{-1/3}$

8. Dizemos que uma variável aleatória tem distribuição triangular no intervalo [0, 1] se sua função de densidade de probabilidade é dada por $f(x) = cx$, para $0 \le x \le 1/2$, $f(x) = c(1 - x)$, para $1/2 < x \le 1$ e $f(x) = 0$, para os demais valores de x.
    a. Determine o valor da constante c. *Resp.: 4.*
    b. Esboce o gráfico de $f(x)$.
    c. Calcule P{ $X > 8/10$}. *Resp.:1/25*
    d. P{ $1/4 < X < 3/4$}. *Resp.:*

9. Suponha que a função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

    Determine:
    a. P{ $X > 2$ }. *Resp.:* $1 - e^{-4}$.
    b. P{ $1 < X < 3$}. *Resp.:* $e^{-1} - e^{-4}$.

10. Seja a função:

$$f_Y(y) = 2\frac{\ln y}{y}.$$

    Para que valores de $y > 1$ f_Y será função de densidade de probabilidade?