Cálculo de Probabilidades I (EST029)

Prof. Lupércio F. Bessegato

Lista nº 09 – Valor Esperado de Variável Aleatória

1. Dada uma variável aleatória geométrica com parâmetro *p*, prove que seu valor esperado é *1/p*. Usar a função geradora de momentos da geométrica ou a definição de esperança.
2. (Ex. 4.28, Ross, pág. 218) Uma amostra de 3 itens é selecionada aleatoriamente de uma caixa contendo 20 itens, dos quais 4 são defeituosos. Determine o número esperado de itens defeituosos na amostra. *Resp.: 3/5*
3. (Ex. 4.32, Ross, pág. 219) Cem pessoas terão seu sangue examinado para determinar se possuem ou não determinada doença. Entretanto, em vez de testar cada indivíduo separadamente, decidiu-se primeiro colocar as pessoas em grupos de 10. As amostras de sangue das 10 pessoas de cada grupo serão analisadas em conjunto. Se o teste der negativo, um teste apenas terá sido suficiente para as 10 pessoas. Por outro lado, se o teste der positivo, cada uma das demais pessoas também será examinada e, no total, 11 testes serão feitos no grupo em questão. Suponha que a probabilidade de se ter a doença seja de 0,1 para qualquer pessoa, de forma independente. Calcule o número esperado de testes necessários para cada grupo (observe que supomos que o teste conjunto dará positivo se pelo menos uma pessoa no conjunto tiver a doença). *Resp.: 7,51*
4. (Exemplo 4b, Problemas 4.34 e 5.9; Ross, págs. 165, 219 e 274) Um produto que é vendido sazonalmente, resulta em um ganho líquido de b reais para cada unidade vendida e em uma perda líquida de l reais para cada unidade que não tenha sido vendida no final da temporada. A quantidade de unidades do produto demandada em uma loja de departamentos específica durante qualquer estação do ano é uma variável aleatória que tem função de probabilidade $p(i)$, $i \geq 0$.
    a. Se a loja deve estocar esse produto com antecedência, determine o número de unidades que a loja deveria estocar para maximizar seu lucro esperado.
    b. Suponha que a loja de departamentos embuta um custo adicional c por cada unidade de demanda não atingida (esse tipo de custo é frequentemente chamado de custo '*goodwill*' porque a loja perde a boa vontade dos consumidores cuja demanda ela não foi capaz de suprir). Calcule o lucro esperado quando a loja armazena s unidades, e determine o valor de s que maximiza o lucro esperado.
    c. Considere o item (a) e suponha agora que a demanda sazonal seja uma variável. aleatória contínua com função de densidade de probabilidade f. Mostre que o estoque ótimo é o valor s^* que satisfaz

    $$F(s^*) = \frac{b}{b+l},$$

    onde b é o lucro líquido por venda, l é a perda líquido por unidade não vendida e F é a função de distribuição acumulada da demanda sazonal.
5. Um homem praticando tiro ao alvo recebe 10 pontos se o tiro estiver a 1 cm do alvo, 5 pontos se estiver entre 1 e 3 cm do alvo e 3 pontos se estiver entre 3 e 5 cm do alvo. Determine o número esperado de pontos que ele receberá se a distância do ponto de tiro até o alvo for uniformemente distribuída entre 0 e 10. *Resp.: 1,8.*
6. (Ex. 7.4, Meyer, pág. 180) Na produção de petróleo, a temperatura de destilação T (ºC) é decisiva na determinação da qualidade do produto final. Suponha que T seja considerada uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre (150, 300).

   Admita que produzir um galão de petróleo custe C_1 dólares. Se o óleo for destilado a uma temperatura menor que 200 ºC, o produto é conhecido como nafta e se vende por C_2 dólares por galão. Se o óleo for destilado a uma temperatura maior que 200 ºC, o produto é denominado óleo refinado destilado e se vende por C_1 dólares por galão. Determinar o lucro líquido esperado (por galão).

7. (Ex. 7.6, Meyer, pág. 180) Suponha que um dispositivo eletrônico tenha uma duração de vida X (em unidades de 1.000 horas), a qual é considerada como uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade de probabilidade: $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, ou $f(x) = 0$, caso contrário.

   Suponha que o custo de fabricação de um desses dispositivos seja \$ 2,00. O fabricante vende a peça por \$ 5,00, mas garante o reembolso total se $X \leq 0{,}9$. Qual será o lucro esperado por peça fabricada?
8. (Ex. 7.7, Meyer, pág. 180) As cinco primeiras repetições de um experimento custam \$ 10,00 cada uma. Todas as repetições subsequentes custam \$ 5,00 cada uma. Suponha que o experimento seja repetido até que o primeiro resultado bem-sucedido ocorra. Se a probabilidade de um resultado bem-sucedido for sempre igual a 0,9, e se as repetições forem independentes, qual será o custo esperado da operação completa?
9. (Ex. 7.9, Meyer, pág. 180) Um lote de dez motores elétricos deve ser ou totalmente rejeitado ou vendido, dependendo do resultado do seguinte procedimento: dois motores são escolhidos ao acaso e inspecionados. Se um ou mais forem defeituosos, o lote será rejeitado; caso contrário, será aceito. Suponha que cada motor custe \$ 75 e seja vendido por \$ 100. Se o lote contiver um motor defeituoso, qual será o lucro esperado o fabricante?
10. (Ex. 7.10, Meyer, pág. 181) Suponha que D, a demanda diária de uma peça, seja uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\mathrm{P}(D = d) = C\,\frac{2^d}{d!}, \quad d = 1, 2, 3, 4$$

   a. Calcule a constante C.
   b. Calcule a demanda esperada.
   c. Suponha que uma peça seja vendida por \$ 5,00. Um fabricante produz diariamente K peças. Qualquer peça que não tenha sido vendida ao fim do dia, deve ser abandonada, com um prejuízo de \$ 3,00.
      i. Determine a função de probabilidade do lucro diário, como uma função de K.
      ii. Quantas peças devem ser fabricadas para tornar máximo o lucro diário esperado?