Questão A

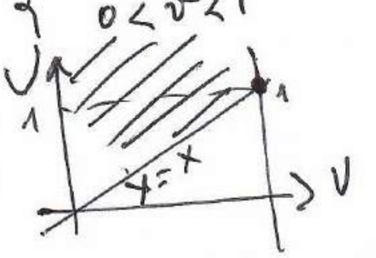
$X \sim$ uniforme$(0,1)$ $\quad$ X e Y independentes

$Y \sim \exp(1)$

$J(U,V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$U = X+Y \implies X = V$
$V = X \qquad\quad Y = U - V$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{|-1|} f_X(v) f_Y(u-v) = e^{-(u-v)} \quad \begin{cases} v < u < \infty \\ 0 < v < 1 \end{cases}$$



① $f_U(u) = \int_{RU} e^{-(u-v)} dv$

se $0 < u < 1$

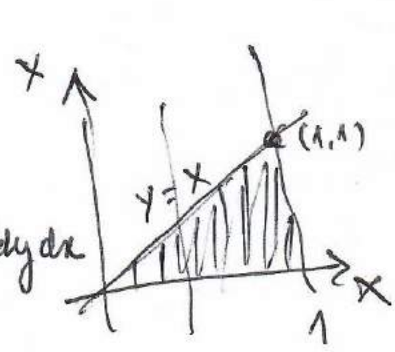
$$f_U(u) = \int_0^u e^{-u} e^{v} dv = 1 - e^{-u}$$

se $u > 1$

$$f_U(u) = \int_0^1 e^{-(u-v)} dv = e^{-u}[e-1]$$

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u}, & 0 < u < 1 \\ e^{-u+1} - e^{-u}, & u \geq 1 \\ 0, & cc \end{cases}$$

② $$P\{Y < X\} = \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x e^{-y} dy\, dx$$



$$P\{Y < X\} = e^{-1}$$

③ $W = \min\{X, Y\}$ $\quad$ Conceito de mínimo $\quad \{W > t\} \Leftrightarrow \{X > t\} \cap \{Y > t\}$

X e Y são independentes, mas não são identicamente distribuídas

$P\{W > t\} \overset{ind}{=} P\{X > t\} . P\{Y > t\}$ ou pode-se calcular usando a fdp conjunta.

$$P\{X > t\} = \begin{cases} 1, & \text{se } t < 0 \\ 1-t, & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases} \qquad P\{Y > t\} = \begin{cases} e^{-t}, & \text{se } t > 0 \\ 1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$P\{W > t\} = \begin{cases} 1, & \text{se } t < 0 \\ (1-t)e^{-t}, & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases} \implies !!$$

(Continua)

A função de distribuição acumulada de W é
$F_W(t) = P\{W \leq t\} = 1 - P\{W > t\} = (1-t)e^{-t}$, se $0<t<1$;
1 se $t<0$ e 0 se $t>1$.

Pede-se a fdp de W

$$f_W(t) = \frac{d}{dt} F_W(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - (1-t)e^{-t}\right] = \begin{cases} e^{-t}[2-t], & 0<t<1 \\ 0, & cc \end{cases}$$

QUESTÃO B

$Z \sim N(0,1)$ e $Y = a + bZ + cZ^2$

$$corr(Z,Y) = \frac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{Var(Z)}\sqrt{Var(Y)}}$$

$$Cov(Z,Y) = cov(Z, a+bZ+cZ^2) = cov(Z,bZ) + cov(Z,cZ^2)$$

$$= b\underbrace{cov(Z,Z)}_{Var(Z)} + c\,cov(Z,Z^2) \quad (*)$$

$$Cov(Z,Z^2) = \cancelto{0}{E(Z^3)} - \cancelto{0}{E(Z)}\cancelto{1}{E(Z^2)} = 0$$

logo em (*)

$$\boxed{Cov(Z,Y) = b\,\cancelto{1}{Var(Z)} = b}$$

$$\boxed{Var(Z) = 1}$$

$$Var(Z^2) = \underbrace{\cancelto{3}{E(Z^4)}}_{3 \text{ (lista 4)}} - [\underbrace{E(Z^2)}_{1}]^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\boxed{Var(Z^2) = 2}$$

$$Var(Y) = Var(a + bZ + cZ^2) = Var(bZ) + Var(cZ^2) + \cancelto{0}{2bc\,Cov(Z,Z^2)}$$

$$= b^2 Var(Z) + c^2 Var(Z^2)$$

$$\boxed{Var(Y) = b^2 + 2c^2}$$

$$Corr(Z,Y) = \frac{b}{\sqrt{1}\sqrt{b^2+2c^2}}$$

$$\boxed{Cor(Z,Y) = \frac{b}{\sqrt{b^2+2c^2}}}$$

Questão c

$X \sim \text{Uniforme}(-1,1)$ $\qquad$ X e Y independentes

$Z \sim \text{Uniforme}(0;0,1)$

$Y = X^2 + Z$, Dado $X=x$, $Y = x^2 + Z \sim \text{Uniforme}(x^2, x^2+0{,}1)$

(5) $f_{XY}(x,y) = f_{Y/X}(y/x) \cdot f_X(x) = \frac{1}{0{,}1} \times \frac{1}{2}$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 5, & \text{se } -1 < x < 1 \text{ e } x^2 < y < x^2+0{,}1 \end{cases}$$

(6.) $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(X, X^2 + Z) = \text{cov}(X,X^2) + \underbrace{\cancel{\text{cov}(X,Z)}}_{X \text{ e } Y \text{ independentes}} \to 0$

$\text{cov}(X,X^2) = \underbrace{E(X^3)}_{X \text{ é simétrica em torno de } 0,\ E(X^3)=0.} - \cancel{E(X)}^{\,0} E(X^2) =$

$$E(X^3) = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{2}\, dx = 0$$

$\boxed{\text{cov}(X,Y) = 0}$

7- Embora $\text{cov}(X,Y)=0$, X e Y não são independentes pois há restrição para a variação de Y ($x^2 \leq y \leq x^2+0{,}1$)

IMPORTANTE: $\text{cov}(X,Y)$ é condição necessária, mas não suficiente para a independência entre X e Y.

Questão D

X e Y independentes e identicamente distribuídos

com $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $\cancel{dx}$, $x \in \mathbb{R}$

8- Distribuição de $X+Y = Z$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+(z-y)^2)(1+y^2)}\, dy$$

A solução se dá por frações parciais e

$$f_Z(z) = \frac{2}{\pi(4+z^2)}, \quad z \in \mathbb{R}$$

9- $Y_2 = \frac{1}{X_2}$ $\quad x = \frac{1}{y}$ $\quad \frac{dY}{dx} = \frac{-1}{x^2} = -y^2$

$$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{|-y^2|} \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{\pi y^2\left(\frac{y^2+1}{y^2}\right)}$$

$$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in \mathbb{R}$$

10- $E(Y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy$, com $u = y^2+1$, $du = 2y\,dy$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi}\left[\ln|u|\right]_0^{\infty}$$ a integral não converge

logo não existe $E(Y_2)$

Obs.: não existe nenhum momento de Y_2, nem há função geradora de momentos para Y_2