

Lista nº 1 – Distribuições Bivariadas

1. Suponha que a função de densidade de probabilidade de (X, Y) é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y & , \text{ para } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Determine o valor da constante c . *Resp.: 21/4.*
 - Determinar $P\{X \geq Y\}$. *Resp.: 3/20.*
2. Suponha que em mostrador de sinal elétrico haja três bulbos luminosos na primeira linha e quatro, na segunda linha. Seja X o número de bulbos que estarão acesos em um instante de tempo específico t e Y , o número de bulbos que estarão acesos na segunda linha, no mesmo instante de tempo. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y está especificada de acordo com a tabela abaixo:

X	Y				
	0	1	2	3	4
0	0,08	0,07	0,06	0,01	0,01
1	0,06	0,10	0,12	0,05	0,02
2	0,05	0,06	0,09	0,04	0,03
3	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04

Determine cada uma das seguintes probabilidades:

- $P\{X = 2\}$.
 - $P\{Y \geq 2\}$.
 - $P\{X \leq 2; Y \leq 2\}$.
 - $P\{X = Y\}$.
 - $P\{X > Y\}$.
3. Suponha que a função de densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} c|x + y| & , \text{ para } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ & \text{ e } y = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Determine o valor de c . *Resp.: 1/40.*
 - A probabilidade de $X = 0$ e $Y = 2$. *Resp.: 1/20.*
 - $P\{X = 1\}$. *Resp.: 7/40.*
 - $P\{X = 3Y\}$. *Resp.: 0.*
4. Suponha X e Y tenham uma distribuição conjunta para a qual a função de densidade de probabilidade é definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2 & , \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Determine o valor da constante c . *Resp.: 3/2.*
- $P\{X + Y > 2\}$. *Resp.: 3/8.*
- $P\{Y < 1/2\}$. *Resp.: 1/8.*
- $P\{X \leq 1\}$. *Resp.: 1/2.*
- $P\{X = 3Y\}$. *Resp.: 0.*

5. Suponha que a função de densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y) & , \text{ para } 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Determine o valor da constante c . *Resp.: 5/4.*
 - $P\{0 \leq X \leq 1/2\}$. *Resp.: 79/256.*
 - $P\{Y \leq X + 1\}$. *Resp.: 13/16.*
 - $P\{Y = X^2\}$. *Resp.: 0.*
6. Seja Y a taxa de chamadas (chamadas/hora) que chegam em uma central. Seja X o número de chamadas durante um período de duas horas. Neste tipo de problema, uma escolha usual de uma função de densidade/função de probabilidade conjunta para (X, Y) é dada por uma função do tipo:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(2y)^x}{x!} e^{-3y} & , \text{ se } y > 0 \text{ e } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Verifique que f é uma função de densidade de probabilidade / função de probabilidade conjunta. *Resp.: Dica: Use a fórmula de expansão em série de potências de e^{2y} .*
- Encontre $P\{X = 0\}$. *Resp.: 1/3.*