Lista nº 3 – Funções de Variáveis Aleatórias

1. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população exponencial com parâmetro. Defina a média amostral:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

   Determine a função de densidade de probabilidade de $\bar{X}$.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal padrão. Defina:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   a. Prove que S_n tem distribuição normal com média 0 e variância n.
   b. Determine a função de densidade de probabilidade de $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal padrão. Defina:

$$S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

   a. Prove que S_n tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade.
   b. Determine a função de densidade de probabilidade de $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$.

4. Determine a esperança de uma distribuição exponencial dupla com parâmetro λ.

5. (Ex.: 6.7, pág. 135). Suponha que as dimensões X e Y de uma chapa retangular de metal possam ser consideradas variáveis aleatórias contínuas independentes, com as seguintes funções de densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1 & \text{, para } 1 < x \leq 2; \\ -x+3 & \text{, para } 2 < x < 3; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, para } 2 < y < 4; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade da área da chapa $A = XY$.

6. (Ex.: 6.11, pág 135). A força magnetizante H no ponto P, distante X unidades de um condutor que conduza uma corrente I é dada por $H = 2\frac{I}{X}$. Suponha que P seja um ponto móvel, isto é, seja uma variável aleatória contínua uniformemente distribuída sobre o intervalo (3, 5). Suponha que a corrente *I* seja também uma

variável aleatória contínua, uniformemente distribuída sobre o intervalo (10, 20). Suponha ademais que as variáveis aleatórias X e I sejam independentes.

   a. Estabeleça a função de densidade de probabilidade da variável aleatória *H*.

7. Sejam as variáveis aleatórias independentes Z e X, Z com distribuição normal padrão e X com distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Defina a variável aleatória T_n dada pela expressão abaixo:

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade de T_n, usando o método do Jacobiano.
   b. Identifique a distribuição de probabilidade de T_n.
   c. Determine a função de densidade de probabilidade do denominador de T_n.

8. Sejam as variáveis aleatórias independentes X e Y. X tem distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade e Y, distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Defina a variável aleatória F dada pela expressão abaixo:

$$F = \frac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade de F, usando o método do Jacobiano
   b. Identifique a distribuição de probabilidade de F.

9. Seja a quantidade aleatória $T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n}}}$, com Z e X, em que Z tem distribuição normal padrão e X, distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade. Considere a variável aleatória T_n^2 ou seja:

$$T_n^2 = \frac{Z^2}{\frac{X}{n}}$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade de T_n^2.
   b. Identifique a distribuição encontrada.

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes. X têm distribuição gama com parâmetros m e λ e Y, distribuição gama com parâmetros n e λ. Seja a variável aleatória W definida por:

$$W = \frac{X}{X+Y}$$

   a. Prove que W tem distribuição beta com parâmetros m e n.

11. Suponha U_1 e U_2 variáveis aleatórias independentes e identicamente e uniformemente distribuídas no intervalo (0, 1).
   a. Determine a função de densidade de probabilidade de Z_1, Z_2, R^2 e θ, definidas como:

$$Z_1 = R\cos(\theta)$$
$$Z_2 = R\sin(\theta)$$
$$R^2 = -2\ln(U_1)$$
$$\theta = 2\pi U_2.$$

   b. Z_0 e Z_1 são independentes?

   c. Qual a distribuição de R^2?
   d. Qual a distribuição de θ?
   e. R^2 e θ são independentes?

12. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes normais padrão. Considere as transformações:

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$$
$$Y_2 = |X_2|.$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade de Y_1 e Y_2.
   b. Y_1 e Y_2 São independentes?

Fonte: MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.