Lista nº 4 – Esperanças e Covariâncias de Variáveis Aleatórias

1. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com variâncias finitas tais que E(X) = E(Y). Mostre que
$$\mathrm{E}(X-Y)^2 = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

2. Sejam X uma variável aleatória discreta uniforme dos números inteiros 1, 2, ..., n. Determine a variância de X. Dica:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Resp.: $(n^2 + 1)/12$.

3. (Ex.: 7.33, pág. 183). Mostre que se *X* for uma variável aleatória contínua, com função de densidade de probabilidade *f*, tendo a propriedade de que o gráfico de *f* seja simétrico em relação a *x* = *a*, então E(*X*) = *a*, desde que E(*X*) exista:

4. (Ex.: 7.38, pág. 183). Suponha que a variável aleatória dimensional (*X*, *Y*) seja uniformemente distribuída sobre *R*, onde *R* é definida por $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$. Calcule o coeficiente de correlação entre *X* e *Y*.

5. (Ex.: 7.46, pág. 184). Se *X*, *Y* e *Z* forem variáveis aleatórias não-correlacionadas, com desvios padrão 5, 12 e 9, respectivamente e se *U* = *X* + *Y* e *V* = *Y* + *Z*, calcule o coeficiente de correlação entre *U* e *V*.

6. Suponha que *X* tem distribuição uniforme no intervalo (–2, 2) e $Y = X^6$. Mostre que *X* e *Y* são não correlacionadas.

7. Suponha que *X* e *Y* tem uma distribuição conjunta tal que sua função de densidade de probabilidade conjunta é dada por:
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) & \text{, para } 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 2; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$
Determine $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 8)$.

8. Suponha que *X* e *Y* são variáveis aleatórias tais que $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$ e $\rho(X,Y) = -1/6$. Determine:
    a. $\mathrm{Var}(X+Y)$.
    b. $\mathrm{Var}(3X - Y + 2Z + 1)$.

9. Sejam as variáveis aleatórias $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.
    a. Determine $E(Z^3)$ e $E(Z^4)$.
    b. Determine $E(X^3)$ e $E(X^4)$..

10. (Ex.: 7.29, pág. 182). Suponha que a variável aleatória bidimensional (*X*, *Y*) seja uniformemente distribuída sobre o triângulo com vértices (0, 0), (1, 3) e (–1, 3). Calcule Var(*X*) e Var(*Y*).

11. Sejam X_1 e X_2, variáveis aleatórias independentes, $X_i \sim \mathrm{Lognormal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$.
    a. Usando o método do Jacobiano, determine a função de densidade de probabilidade de $X_1 X_2$.
    b. Determine a função de densidade de probabilidade de $\frac{1}{X_1}$.

12. Seja *n* um número inteiro positivo. Mostre que:

$$\int_{\beta}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-y}\, y^{n}}{n!}\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\beta}\left[\frac{\beta^{n}}{n!} + \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1\right]$$

13. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1 e Z uma variável aleatória uniforme entre 0 e 0,1. Suponha que X e Z sejam independentes. Seja Y = X + Z e considere o vetor aleatório (X, Y).
    a. Determine a função de densidade conjunta de X e Y. Considere usar a expressão $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$.
    b. Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

Fonte: MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.