

Lista nº 5 – Esperança e Variância Condicionais

1. Suponha que 20% dos estudantes que prestam um determinado teste são da escola A e que a média aritmética de suas notas no teste seja 80. Suponha também que 30% dos estudantes são da escola B e que a média aritmética de suas notas foi 76. Suponha finalmente que os outros 50% de estudantes são da escola C e que a média aritmética de suas notas foi 84. Se um estudante for escolhido ao acaso de todo o grupo que prestou o teste, qual é o valor esperado de sua nota.
2. Suponha que um ponto X_1 é escolhido de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ e que, após a observação do valor $X_1 = x_1$, escolhe-se um ponto X_2 de uma distribuição uniforme no intervalo $[x_1, 1]$. Suponha que variáveis aleatórias adicionais X_3, X_4, \dots são geradas da mesma maneira. Generalizando, para $j = 1, 2, \dots$, após o valor $X_j = x_j$ ter sido observado, escolhe-se X_{j+1} de uma distribuição uniforme no intervalo $[x_j, 1]$. Encontre o valor de $E(X_n)$.
3. Suponha que X e Y são distribuídas uniformemente no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Encontre $E(Y|X)$ e $\text{Var}(Y|X)$.
4. Suponha que X e Y a função de densidade de probabilidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y & , \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- a. Encontre $E(Y|X)$ e $\text{Var}(Y|X)$.
 - b. Se o valor observado de X é $\frac{1}{2}$, qual o valor predito de Y terá o menor erro quadrático médio (EQM)? Qual é o valor desse EQM?
 - c. Se o valor de Y será predito do valor de X , qual será o menor valor de todos os EQM?
 - d. Considerando a situação do item (c), uma pessoa ou paga um valor $\$c$ pela oportunidade de observar o valor de X , antes de predizer o valor de Y ou pode simplesmente predizer o valor de Y sem observar anteriormente o valor de X . Se a pessoa considerar que sua perda total será o custo total mais o EQM de seu valor predito, qual é o máximo valor de c que ela deveria estar disposta a pagar.
5. Suponha que X e Y são variáveis tais que $E(Y|X) = aX + b$. Assumindo que $\text{Cov}(X, Y)$: existe e que $0 < \text{Var}(X) < \infty$, determine expressões para a e b em termos de $E(X)$, $E(Y)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$ e $\text{Cov}(X, Y)$.
 6. Suponha que a variável aleatória relacionada com a aptidão de uma pessoa em Matemática seja um valor X , entre 0 e 1. Suponha também que sua aptidão em Música, Y , seja também um valor no intervalo $(0, 1)$. Suponha também que, em toda a população de estudantes os escores X e Y são distribuídos de acordo com a seguinte função de densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & , \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

- a. Se um estudante é selecionado ao acaso, qual valor predito de seu escore no teste de música tem o menor EQM?
- b. Qual valor predito de seu escore em matemática tem o menor EQM?

- c. Os escores dos estudantes nos testes de matemática e música são positivamente correlacionados, negativamente correlacionados ou não correlacionados?
- d. Se o valor do escore de um estudante em matemática for 0,8, qual o valor predito do seu escore no teste de música que tem o menor EQM?
- e. Se o valor do escore de um estudante em música for $1/3$, qual o valor predito do seu escore no teste de música que tem o menor EQM?
7. (Ex.: 7.61, pág. 447). Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias com mesma função de distribuição F e suponha que elas sejam independentes de N , uma variável aleatória geométrica com parâmetro p . Seja $M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$.
- a. Determine $P\{M \leq x\}$ condicionado em N .
- b. Determine $P\{M \leq x | N = 1\}$.
- c. Determine $P\{M \leq x | N > 1\}$.
- d. Use (b) e (c) para deduzir novamente a probabilidade que você obteve em (a).
8. (Ex.: 7.65, pág. 448) O número de tempestades de inverno em um ano bom é uma variável aleatória de Poisson com média 3, enquanto o número em um ano ruim é uma variável de Poisson com média 5. Se o próximo ano tem probabilidade 0,4 de ser um ano bom e 0,6 de ser um ano ruim, determine o valor esperado e a variância do número de tempestades no próximo ano.
9. (Ex.: 7.68, pág. 448). O número de acidentes que uma pessoa sofre em um ano é uma variável aleatória de Poisson com média λ . Entretanto, suponha que o valor de λ mude de pessoa para pessoa, sendo igual a 2 em 60% da população e 3 nos 40% restantes. Se uma pessoa é escolhida aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ela sofra:
- a. 0 acidentes em um ano.
- b. Exatamente 3 acidentes em um ano.
- c. Qual é a probabilidade condicional de que ela sofra 3 acidentes em certo ano, dado que não tenha sofrido acidentes no ano anterior.
10. (Ex.: 7.17, pág. 451). Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes com média μ . Suponha também que $\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2$ e $\text{Var}(X_2) = \sigma_2^2$. O valor de μ é desconhecido e se propõe que μ seja estimado por uma média ponderada de X_1 e de X_2 . Isto é, $\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$, será usado como uma estimativa para μ para algum valor apropriado de λ . Que valor de λ resulta em uma estimativa com menor variância possível? Explique por que é desejável usar esse valor de λ .
11. (Ex.: 7.40, pág. 453). Use a fórmula da variância condicional para determinar a variância de uma variável aleatória geométrica X com parâmetro p .
12. (Ex. 7.41, pág. 453). Suponha que X seja uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ e considere I , independente de X , tal que $P\{I = 1\} = \frac{1}{2} = P\{I = 0\}$. Defina Y como:

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } I = 1; \\ -X & \text{se } I = 0. \end{cases}$$

Colocando em outras palavras, Y tem a mesma probabilidade de ser igual a X ou $-X$.

- a. X e Y são independentes?
- b. I e Y são independentes?
- c. Mostre que Y é normal com média 0 e variância 1.
- d. Mostre que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Fonte: ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2010.