Lista nº 6 – Distribuição Normal Multivariada e Multinomial.

1. Suponha que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm uma distribuição normal bivariada e que $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2)$. Mostre que a soma $X_1 + X_2$ e a diferença $X_1 – X_2$ são variáveis aleatórias independentes.

2. Suponha que X_1 e X_2 têm distribuição normal bivariada, sendo que $\text{E}(X_1|X_2) = 3,7 - 0,15X_2$, $\text{E}(X_2|X_1) = 0,4 - 0,6X_1$ e $\text{Var}(X_2|X_1) = 3,64$. Encontre:
   a. A média e a variância de X_1. *Resp.: 4 e 1.*
   b. A média e a variância de X_2. *Resp.: -2 e 2.*
   c. A correlação entre X_1 e X_2. *Resp.: -0,3.*

3. Seja $f(x, y)$ a função de densidade de probabilidade de uma distribuição normal bivariada. Mostre que seu valor máximo é atingido no ponto $x_1 = \mu_1$ e $x_2 = \mu_2$.

4. Suponha que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm uma distribuição normal bivariada e que duas outras variáveis aleatórias sejam definidas como:
$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1$$
$$Y_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + b_2$$
onde:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$
Mostre que Y_1 e Y_2 têm distribuição normal bivariada.

5. Suponha que uma variável aleatória X tem uma distribuição normal e que para todo x, a distribuição de uma outra variável aleatória Y dado $X = x$ é uma distribuição normal com média $ax + b$ e variância σ^2, onde a, b e σ^2 são constantes. Prove que a distribuição conjunta de X e Y é uma distribuição normal bivariada.

6. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Defina a média amostral $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Desejamos encontrar a distribuição de X_i dado $\bar{X}_n$.
   a. Mostre que X_i e $\bar{X}_n$. Têm uma distribuição normal bivariada, ambas com média μ e variâncias σ^2 e σ^2/n, respectivamente e correlação $1/\sqrt{n}$. Dica: seja $Y = \sum_{i \neq j} X_i$. Mostre agora que Y e X_i são normais independentes e que $\bar{X}_n$ e X_i são combinações lineares de Y e X_i.
   b. Mostre que a distribuição condicional de X_i dado $\bar{X}_n = \bar{x}_n$ é uma nomral com média $\bar{x}_n$ e variância $\sigma^2(1 - 1/n)$.

7. Suponha que X tenha uma distribuição normal padrão e que a distribuição de Y dado X seja uma distribuição normal com média $2X - 3$ e variância 12. Determine a distribuição marginal de Y e o valor da correlação entre X e Y. *Resp.:* $Y \sim \text{N}(\mu = -3, \sigma^2 = 16)$ e $\rho(X, Y) = 1/2$.

8. Suponha que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm uma distribuição normal bivariada com médias μ_1 e μ_2, variâncias σ_1^2 e σ_2^2, correlação ρ. Determine a distribuição de $X_1 – 3X_2$.

9. Num certo instante de tempo, as taxas de juros de 30 e 60 dias têm, conjuntamente, uma distribuição normal bivariada com médias 16% e 16,8% ao ano e desvios padrão 4% e 5% a0 ano, respectivamente. A correlação entre as taxas é 0,90. Calcule:
   a. A probabilidade de a taxa de 30 dias estar entre 14% e 18%.
   b. A probabilidade de a taxa de 60 dias estar entre 14% e 18%.
   c. A probabilidade de a taxa de 30 dias estar entre 14% e 18%, sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 22%.
   d. A probabilidade de a taxa de 30 dias estar entre 14% e 18%, sabendo que a taxa de 60 dias está hoje em 15%.
   e. A probabilidade de a taxa de 60 dias estar entre 14% e 18%, sabendo que a taxa de 30 dias está hoje em 18%.

10. Faz-se uma pesquisa de preços de roupas masculinas num shopping center. Uma amostra dos produtos existentes revela que o preço das calças é uma variável normal com média R$80 e desvio padrão R$30. O preço da camisa é, por sua vez, uma variável aleatória normal com média R$60 e desvio padrão R$25. A correlação entre os preços de calças e camisas é 0,6. Calcule as seguintes probabilidades:
    a. De um par de calças custar entre R$60 e R$95.
    b. De um par de calças custar entre R$60 e R$95, sabendo que uma camisa custa R$75 nesta loja.
    c. De um par de calças custar entre R$60 e R$95, sabendo que uma camisa custa R$50 nesta loja
    d. Qual é a distribuição condicional dos preços das camisas, sabendo que o preço das caças é R$100.

11. Dado que:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}..$$

   a. Escreva a função de densidade de probabilidade de **X**.
   b. Determine a matriz de correlações **P** do vetor aleatório **X**.
   c. Determine a distribuição marginal de X_2.
   d. Determine a distribuição marginal do vetor aleatório $[X_1, X_3]'$.
   e. Determine a distribuição marginal do vetor aleatório $[X_1, X_2]'$.
   f. Determine a distribuição condicional de $X_1 \mid X_3 = -1$.
   g. Determine a distribuição condicional de $X_1 \mid X_2 = 1; X_3 = -1$.
   h. Determine a distribuição condicional de $[X_1, X_2]' \mid X_3 = -1$.
   i. $[X_1, X_3]'$ e X_2 são independentes?

j. $a_1X_1 + a_3X_3$ e a_2X_2 são independentes para quaisquer constantes a_1, a_2 e a_3?
k. $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ são independentes?
l. Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \boldsymbol{a}$ onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine a distribuição de $\mathbf{Y}$.
m. Seja $W = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$. Qual é a distribuição, a média e a variância de W?

12. (Meyer – ex. 10.16, pág. 262.*) Distribuições de Poisson e multinomial*. Suponha que X_i , i = 1, 2, ..., n, sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson, com parâmetros λ_i, i = 1, 2, ..., *n*. Faça $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Prove que, nesse caso, a distribuição de probabilidade conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dado $X = x$, é dada por uma distribuição multinomial. Isto é:
$$\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | X = x) = \frac{x!}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!} \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \right)^{x_1} \cdots \left(\frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \right)^{x_n}$$
13. Suponha que $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ tenha uma distribuição multinomial. Prove $\mathrm{E}(X_i) = np_i$ e $\mathrm{Var}(X_i) = np_i(1 - p_i)$, i = 1, 2, ..., *k*.
14. (Ross – ex. 6.11, pág. 344.) O proprietário de uma loja de televisores imagina que 45% dos clientes que entram em sua loja comprarão um televisor comum, 15% comprarão um televisor de plasma e 40% estarão apenas dando uma olhada. Se 5 clientes entrarem nesta loja em um dia , qual é a probabilidade de que ele venda exatamente 2 televisores comuns e um de plasma naquele dia? *Resp.: 0,1458.*