Lista nº 7 – Teoremas Limite

1. (Ex. 7.34, pág. 183). Suponha que a variável aleatória X tome os valores –1 e 1, cada um deles com probabilidade ½. Considere $\mathrm{P}\{|X-\mathrm{E}(X)|\geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\}$ como uma função de *k*. Em um gráfico, marque essa função de *k* e, no mesmo sistema de coordenadas, marque o limite superior da probabilidade acima, tal como é dada pela desigualdade de TChebycheff. Repita, com $\mathrm{P}\{X=-1\}=1/3$ e $\mathrm{P}\{X=1\}=2/3$.

2. (Ex. 7.35, pág. 183). Compare o limite superior da probabilidade $\mathrm{P}\{|X-\mathrm{E}(X)|\geq 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\}$, obtido pela desigualdade de Tchebycheff, com a probabilidade exata se X for uniformemente distribuída sobre (–1, 3).

3. (Ex. 9.13, pág. 242). Compare o limite superior da probabilidade $\mathrm{P}\{|X-\mathrm{E}(X)|\geq 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\}$, obtido pela desigualdade de Tchebycheff, com a probabilidade exata, em cada um dos seguintes casos:

   a. X tem distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.
   b. X tem distribuição de Poisson, com parâmetro λ.
   c. X tem distribuição exponencial, com média β.

4. (Ex. 12.3, pág. 306) Resolva:

   a. Um sistema complexo é constituído de 100 componentes que funcionam independentemente. A probabilidade de que qualquer um dos componentes venha a falhar durante o período de operação é igual a 0,10. A fim de que o sistema completo funcione, ao menos 85 dos componentes deve trabalhar. Calcule a probabilidade de que isso aconteça.

   b. Suponha que o sistema acima seja constituído de *n* componentes, cada um deles tendo uma confiabilidade de 0,90. O sistema funcionará se ao menos 80% dos componentes funcionarem adequadamente. Determine *n*, de maneira que o sistema tenha uma confiabilidade de 0,95. Obs.: Considere confiabilidade do componente (sistema) como sendo a probabilidade de o componente (sistema) funcionar.

5. (Ex. 12.4, pág. 306). Suponha que 30 dispositivos eletrônicos, D_1, D_2, ..., D_{30} sejam empregados da seguinte maneira: tão logo D_1 falhe, D_{30} entra em operação; quando D_2 falhar, D_3 entrará em operação etc. Suponha que a duração até falhar do dispositivo i, D_i, seja uma variável aleatória exponencialmente distribuída, com parâmetro $\lambda = 0{,}1$ hora^{-1}. Seja T o tempo total de operação dos 30 dispositivos. Qual é a probabilidade de que T ultrapasse 350 horas?

6. (Ex. 12.6, pág. 306). Suponha que X_i, $i = 1, 2, ..., 50$ sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma delas tendo distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0{,}03$. Faça $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}$.

   a. Aplicando o Teorema Central do Limite, calcule $\mathrm{P}\{S \geq 3\}$.

   b. Compare a resposta obtida em (a), com o valor exato dessa probabilidade.

7. Seja $f(x, y)$ a função de densidade de probabilidade de uma distribuição normal bivariada. Mostre que seu valor máximo é atingido no ponto $x_1 = \mu_1$ e $x_2 = \mu_2$.

8. Suponha que X é uma variável aleatória para a qual $\mathrm{E}(X) = 10$, $\mathrm{P}\{X \leq 7\} = 0,2$ e $\mathrm{P}\{X \geq 13\} = 0,3$. Prove que $\mathrm{Var}(X) \geq 4,5$.

9. Suponha que X_1, X_2, ..., X_n forme uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição com média 6,5 e variância 4. Determine quão grande deva ser o valor de n de maneira que a seguinte relação seja satisfeita: $\mathrm{P}\{6 \leq \bar{X}_n \leq 7\} \geq 0,8$.

10. Um físico faz 25 medidas independentes da gravidade específica de um certo corpo celeste. Ele sabe que as limitações de seu equipamento são tais que o desvio padrão de cada medida é σ unidades.

    a. Usando a desigualdade de Chebyshev, encontre um limite inferior para a probabilidade de que a média de suas medidas não difiram por menos que $\dfrac{\sigma}{4}$ unidades da gravidade específica real do corpo.

    b. Usando o Teorema Central do Limite, encontre um valor aproximado para a probabilidade do item (a).

11. Seja X_n uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p_n. Assuma que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Prove que a função geradora de momentos de X_n converge para a função geradora de momentos de uma distribuição de Poisson com média λ.

Fonte: MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.