2ª. Prova – 2013/1

1. (40 %) Suponha que a duração da vida (em horas) de certo componente eletrônico seja uma variável aleatória contínua *X* com função de distribuição acumulada dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

   a. Determine a função de densidade de probabilidade de *X*.
   b. Mostre que $\mathrm{P}_j = \mathrm{P}\{j \leq X \leq j+1\}$, $j \in \mathrm{N}_0$, é da forma $(1-a)a^j$, $j \in (0,1)$.
   c. Calcule a probabilidade de que o componente dure pelo menos sete horas depois do início de seu funcionamento.
   d. Calcule a probabilidade de que o componente dure no máximo 3 horas (ou seja, não dure 3 horas)..
   e. Qual é a probabilidade de que o componente dure mais de 10 horas, dado que ele está funcionando há 3 horas?
   f. Suponha que o custo de fabricação de um desses componentes seja \$2,00. O fabricante vende a peça por \$5,00, mas garante o reembolso total se $X \leq 7$. Qual será o lucro esperado por componente do fabricante?
   g. Escolhem-se ao acaso seis desses componentes, qual é a probabilidade de que pelo menos um deles não tenha de ser coberto pela garantia (ou seja, o comprador não precisa ser reembolsado pelo fabricante).

2. (18 %) Seja X uma variável aleatória associada a um espaço amostral Ω, com função de acumulada dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} & , 0 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

   Considere os seguintes subconjuntos do contradomínio de X:

   $A = \{0 \leq X < 2\} (ou\ seja,\ A = \{w \in \Omega : 0 \leq X(w) < 2\}),$

   $B = \{X = 0\}, e$

   $C = A \cap B^c$

   Determine:
   a. P(A);
   b. P(B);
   c. P(C|A).

3. (24 %) Sabe-se que a função de distribuição acumulada da variável aleatória *X* é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

   Seja *Y* a variável aleatória definida por $Y = e^{-\lambda X}$. Obtenha a distribuição de *Y*.

4. (18 %) X é uma variável aleatória com E(*X*) = 100 e Var (*X*) = 15. Determine:
   a. $E(X^2)$.
   b. E(3*X* + 10).
   c. E(−*X*).
   d. Var(−X).
   e. E(*Z*) e Var(*Z*), sabendo-se que a variável aleatória $Z = \dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$.