EST039 – Análise Multivariada – 2017

Prof. Lupércio F. Bessegato

Lista nº 4 – Distribuição Normal Multivariada

A. Dado que:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}..$$

1. Escreva a função de densidade de probabilidade de X.
2. Determine a matriz de correlações **P** do vetor aleatório **X**.
3. Determine a distribuição marginal de X_2.
4. Determine a distribuição marginal do vetor aleatório $[X_1, X_3]'$.
5. Determine a distribuição marginal do vetor aleatório $[X_1, X_2]'$.
6. Determine a distribuição condicional de $X_1 \mid X_3 = -1$.
7. Determine a distribuição condicional de $X_1 \mid X_2 = 1; X_3 = -1$.
8. Determine a distribuição condicional de $[X_1, X_2]' \mid X_3 = -1$.
9. $[X_1, X_3]'$ e X_2 são independentes?
10. $a_1X_1 + a_3X_3$ e a_2X_2 são independentes para quaisquer constantes a_1, a_2 e a_3?
11. $X_1 + X_2$ e $X_1 - X_2$ são independentes?
12. Seja $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \boldsymbol{a}$ onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine a distribuição de **Y**.
13. Seja $W = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$. Qual é a distribuição, a média e a variância de W?
14. Determine o elipsoide com 95% de confiança para **X**.
15. Seja $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$. Determine a distribuição de $\mathbf{X}^*$.
16. Desenhar a elipse com 95% de confiança para **X***. Determine inicialmente os autovalores e autovetores de **X***.
17. Seja $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{GG}' = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$. Mostre que $\mathbf{G}'\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_3(\mathbf{G}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ e $\mathbf{G}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathrm{N}_3(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Dica: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

B. Exercício 4.10 (Johnson & Wichern, pág. 202).

C. Exercício 4.13 (Johnson & Wichern, pág. 203).

D. Exercício 4.15 (Johnson & Wichern, pág. 204).

Bons estudos!