

**Gráfico de Controle por Variáveis**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Roteiro**

1. Construção de Gráficos de Controle de  $\bar{X}$  e R
2. Análise de Desempenho dos Gráficos  $\bar{X}$  e R
3. Alternativas para Monitoramento da Dispersão
4. Regras Suplementares de Decisão para Gráficos  $\bar{X}$
5. Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras
6. Referências

---

---

---

---

---

---

---

---

**Principais Gráficos de Variáveis**

- Gráfico de Média ( $\bar{X}$ )
- Gráfico de Amplitude (R)
- Gráfico de Variância ( $S^2$ )
- Gráfico de Desvio-Padrão (S)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção dos Gráficos de Controle $\bar{X}$ e R

---

---

---

---

---

---

---

---

### Variáveis Contínuas

- Para monitoramento de característica de qualidade contínua são usuais:
  - √ Gráfico de Média  $\bar{X}$  :
    - monitorar centralidade do processo
    - ajuste do processo
  - √ Gráfico de Amplitude R:
    - monitorar dispersão do processo
    - estabilidade do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

### Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a variabilidade” (Shewhart);
- Processo sob controle:
  - √ Deseja-se que raramente caia um ponto na região de ação do gráfico
    - depende da abertura do gráfico
  - √ Busca-se não intervir equivocadamente em um processo sob controle
    - Em geral, intervenções desnecessárias geram custos

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$$

- Parâmetros da Média Amostral:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_0$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

✓  $\mu_0$ : média do processo sob controle

✓  $\sigma_0$ : desvio-padrão do processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

- $\mu_0$  e  $\sigma_0$  não conhecidos com precisão absoluta

- Limites de controle estimados:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Escolha da Abertura do Gráfico

- Processo sob controle (estável e ajustado)

✓ Intervalo  $\pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$  engloba 99,73% dos valores de  $\bar{X}$

- Caso algum valor de X caia fora desse intervalo

✓ É mais verossímil que a alteração da média do processo ( $\mu$ ) seja devido a alguma causa especial

---

---

---

---

---

---

---

---

**Amplitude Amostral**

$$R = X_{\text{máx}} - X_{\text{mín}}$$

- Distribuição amostral da amplitude
  - √ Hipótese:
    - população normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$
  - √  $E(R) = \mu_R = d_2\sigma$
  - √  $DP(R) = \sigma_R = d_3\sigma$

---

---

---

---

---

---

---

---

**Amplitude Relativa**

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

- Distribuição amostral da amplitude
  - √ Hipótese:
    - população normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$
  - √  $E(W) = \mu_W = d_2$
  - √  $\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$
  - √ Parâmetros dependem apenas do tamanho amostral
  - √ Distribuição acumulada de W:
    - Tabela B

---

---

---

---

---

---

---

---

**Valores de  $d_2$  e  $d_3$**

n	$d_2$	$d_3$
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,763
15	3,472	0,756

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de R

- Limites de Controle (exatos):

$$LSC_R = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = (d_2 + 3d_3)\sigma_0$$

$$LM_R = d_2\sigma_0$$

$$LIC_R = d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 = (d_2 - 3d_3)\sigma_0$$

- Se  $LIC_R < 0$ 
  - √ Adota-se  $LIC_R = 0$
- Quando R for maior que LSCR
  - √ Alarme de aumento do desvio-padrão do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

### Uso dos Gráficos de Controle

- Fases no uso de um gráfico de controle:
  - √ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle
    - testar se o processo estava ou não sob controle quando os  $m$  subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas
    - obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2
  - √ Fase 2: Monitoramento da produção futura

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (1)

- Limites de controle obtidos quando são usadas amostras preliminares
  - √ Permitem determinar se o processo estava sob controle durante seleção de  $m$  amostras iniciais
- Para testar hipótese de controle do processo no passado:
  - √ Plotar valores de  $\bar{X}$  e R

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (2)

- √ Se todos os pontos caem dentro limites de controle e não se observa comportamento sistemático;
  - Processo está sob controle e limites de controle tentativos são apropriados
- √ Se um ou mais pontos caem na zona de ação do gráfico
  - Procuram-se causas especiais relacionadas com cada ponto na zona de ação dos gráficos
  - Identificada a causa especial, o ponto é descartado e os limites são recalculados
  - Prossegue-se com o procedimento até que todos os pontos caiam dentro dos limites de controle

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (3)

- √ Se causa especial não é identificada
  - Descarta-se o ponto se houver indícios de que o ponto veio de distribuição característica de processo fora de controle
  - Retém-se os pontos, considerando-se apropriados os limites tentativos  
(Se os pontos representam situação fora de controle, os limites resultantes serão folgados)
- √ Em geral, um ou dois pontos fora de controle não distorcem significativamente os limites de controle
- √ Se amostram futuras futuras ainda indicarem o controle do processo, então os pontos inexplicáveis podem ser seguramente descartados

---

---

---

---

---

---

---

---

### Limites Tentativos (4)

- √ Caso ocorram vários pontos na zona de ação dos gráficos
  - Descarte de todos os pontos pode prejudicar o estabelecimento dos limites de controle  
(Abordagem ignorará informação relevante contida nos dados)
  - É improvável o sucesso na procura da causa atribuível para cada um dos pontos fora de controle
  - Em geral é melhor se concentrar no *padrão* formado por esses pontos  
(Causa atribuível associada ao padrão dos pontos foras de controle é identificada mais facilmente)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Estimativas Iniciais do Processo

- Estimadores dos parâmetros do processo  
(conjunto inicial de  $m$  amostras)
  - √ Média do processo  $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$  Sensível a desajustes devido causas especiais
  - √ Estimador desvio-padrão do processo
    - $\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$  Insensível a desajustes devido causas especiais
- Gráfico de R
  - √ Pode ser construído com o processo desajustado
  - √ Em geral, a construção dos gráficos de controle é iniciada pelo Gráfico de R

---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo
  - √ Característica de qualidade: Volume de Sacos de leite:
  - √ Conjunto de dados para estimação inicial:
    - 25 subgrupos racionais de tamanho 5 ( $m = 25$  e  $n = 5$ )
    - Banco de dados: *BD\_CQL.xls/guia: leite*
  - √ Tabela 3.2 (Branco Costa et. al)

X1	X2	X3	X4	X5	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	15,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9

- √ Estimação variabilidade do processo sob controle:

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,996}{2,326} = 4,729$$

---

---

---

---

---

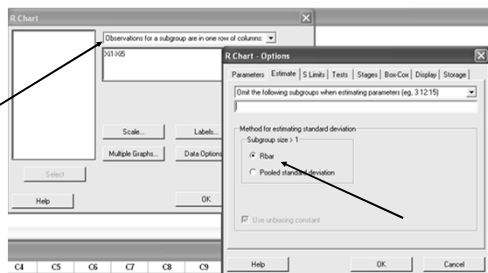
---

---

---

- Construção Gráfico de R das 25 observações

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R




---

---

---

---

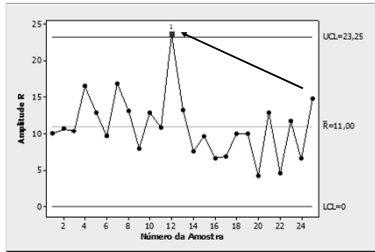
---

---

---

---

- Gráfico de R:



- Estimativas

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,727 = 23,25$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 11,00$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,26$$

$$LIC_R = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### 1ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo  
 $\hat{\sigma}_0 = 4,727$
- Amplitude da 12ª amostra é grande  
  - √ Necessária investigação para encontrar justificativa para aumento da variabilidade do processo
- Se for possível diagnosticar causa especial que afetou variabilidade  
  - √ Elimina-se amostra e estima-se novamente  $\sigma_0$ .
  - (Se causa especial influenciou apenas essa amostra)

---

---

---

---

---

---

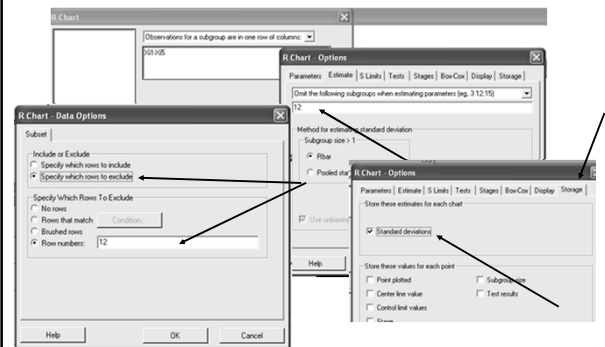
---

---

- Volume de sacos de Leite – Eliminação R<sub>12</sub>

$$\sqrt{m = 24 \text{ e } n = 5}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R




---

---

---

---

---

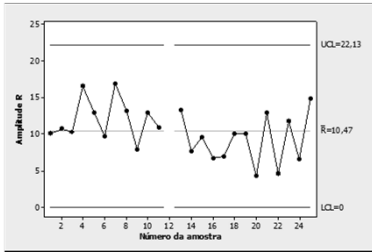
---

---

---



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,500 = 22,13$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 10,467$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,20$$

$$LIC_R = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo  
 $\hat{\sigma}_0 = 4,500$
- A amplitude dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média  
 $\sqrt{\bar{R}/d_2}$  é estimativa confiável do desvio-padrão do processo  
 $\checkmark$  Processo aparenta estar sob controle durante Fase 1

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção do Gráfico de $\bar{X}$

- É afetado por causas especiais que afetam:  
 $\checkmark$  média do processo, ou  
 $\checkmark$  dispersão do processo
- Só pode ser construído com o processo ajustado e estável  
 $\checkmark$  isento de todo tipo de causas especiais  
 $\checkmark$  Nesse caso, preocupação será apenas com estimativa da média do processo

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

- Estimativa dos Parâmetros do Processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

---

---

---

---

---

---

---

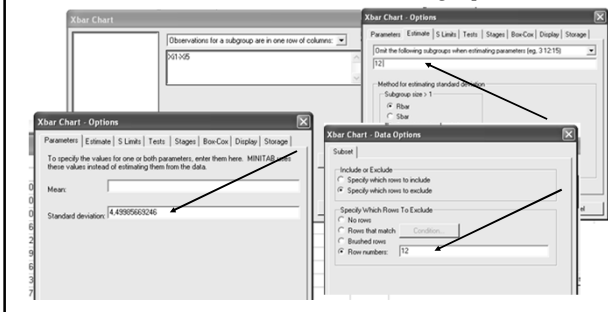
---

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de  $\bar{X}$

$$\sqrt{m = 24; n = 5}$$

$$\sqrt{\text{Estimativas Parâmetros: } \bar{\bar{X}} = 1000,0; \hat{\sigma}_0 = 4,500}$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X




---

---

---

---

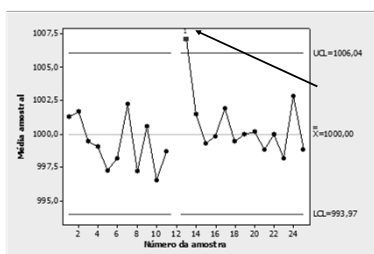
---

---

---

---

- Gráfico de  $\bar{X}$ :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 106,04$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 1000,0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,97$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Comentários

- O ponto  $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$
- Comentários similares àqueles efetuados para  $R_{12}$   
√ Elimina-se  $\bar{X}_{13}$

---

---

---

---

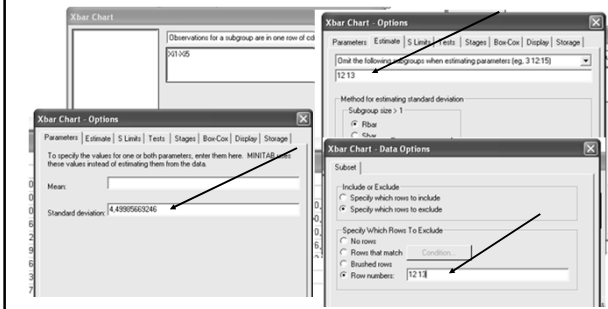
---

---

---

---

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de  $\bar{X}$   
√  $m = 23; n = 5$   
√ Estimativas Parâmetros:  $\bar{X} = 999,7; \hat{\sigma}_0 = 4,500$   
**Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X**




---

---

---

---

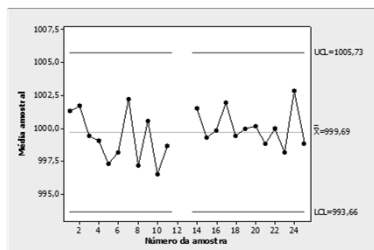
---

---

---

---

- Gráfico de  $\bar{X}$ :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{X} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1005,73$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{X} = 999,69$$

$$LIC_R = \bar{X} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,66$$

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Comentários:**

- √ As médias dos 23 subgrupos distribuem-se aleatoriamente em torno da média e nenhuma excede os limites de controle
- √ Considera-se o processo ajustado e estável

---

---

---

---

---

---

---

---

**Estimativa dos Parâmetros –  
Recomendações**

- Se identificada a causa especial e seu período de atuação, todas as amostras afetadas devem ser eliminadas
  - √ Mesmo que nem todas estejam na zona de ação
- Se houver poucas amostras restantes após descarte das afetadas
  - √ Prolongar o período de coleta das amostras destinadas à construção dos limites de controle

---

---

---

---

---

---

---

---

- Nem sempre é possível a causa especial que atuou no passado
  - √ É ainda mais difícil saber quais as amostras afetadas
- **Importante:**
  - √ Mesmo com o processo sob controle, há uma maior chance de um ou mais pontos caírem na zona de ação do gráfico, quando houver muitas amostras disponíveis  
(maior que 25 ou 30 subgrupos)

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Recomendação:**

- √ Se em uma sequência de 25 ou 30 pontos apenas um estiver fora dos limites de controle e não for possível diagnosticar nenhuma causa especial, o melhor é mantê-lo, construindo o gráfico de controle com base em todas as amostras

---

---

---

---

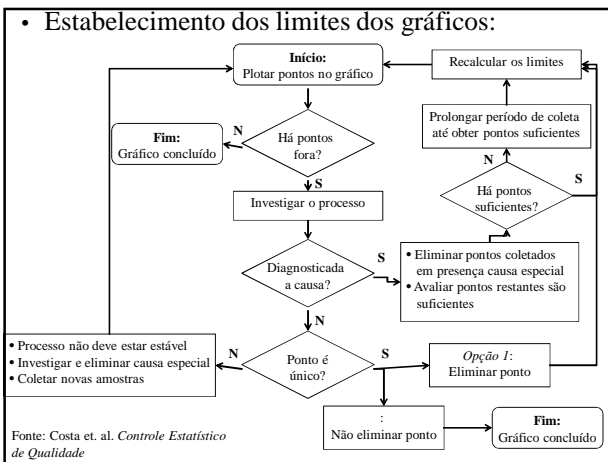
---

---

---

---

• **Estabelecimento dos limites dos gráficos:**




---

---

---

---

---

---

---

---

**Fase 2 – Monitoramento do Processo**

- **Estimação dos parâmetros (fase 1)**
  - √ só deve ser encerrada quando o processo encontrar-se estável e ajustado
- **Monitoramento do processo (fase 2)**
  - √ Os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra alterações permanentes
  - √ Decisão para detecção e eliminação de causa especial
    - Basta um valor de  $\bar{X}$  ou de R estar na zona de ação para que decida-se pela intervenção no processo

---

---

---

---

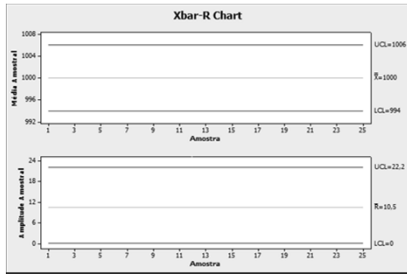
---

---

---

---

- Volume de Sacos de Leites  
 √ Gráfico  $\bar{X}$  e R para monitoramento do processo




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Limites de Controle – Notação Alternativa**

- Limites de Controle do Gráfico  $\bar{X}$ :

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} \quad A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R}$$

- Limites de Controle do Gráfico R

$$LSC_R = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = D_4\bar{R} \quad D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$$

$$LM_R = \bar{R}$$

$$LIC_R = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} = D_3\bar{R} \quad D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Apêndice VI: Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis

√ Montgomery, pág. 489

Observações Amostrais	Gráficos para Médias			Gráficos para Desvios Padrão					Gráficos para Amplitudes							
	Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central		Fatores para Limites de Controle			Fatores para Linha Central			Fatores para Limites de Controle				
	A	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	c <sub>1</sub>	U <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2333	0	3.267	0	2.066	1.328	0.8865	0.833	0	3.686	0	3.267
3	1.732	1.623	1.954	0.8662	1.1284	0	2.568	0	2.278	1.693	0.9807	0.888	0	4.158	0	2.292
4	1.500	1.529	1.828	0.9213	1.0514	0	2.266	0	2.088	2.059	0.9837	0.880	0	4.498	0	2.282
5	1.342	1.377	1.627	0.9409	1.0038	0	2.099	0	1.964	2.326	0.9299	0.864	0	4.818	0	2.215
6	1.225	1.263	1.527	0.9515	1.0510	0.0393	1.970	0.029	1.874	2.514	0.8966	0.848	0	5.078	0	2.084
7	1.134	1.179	1.432	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.8698	0.833	0.204	5.264	0.078	1.924
8	1.061	1.113	1.309	0.9650	1.0763	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.8512	0.828	0.388	5.366	0.136	1.864
9	1.000	1.037	1.232	0.9693	1.0917	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.8367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816
10	0.949	0.988	1.179	0.9727	1.0981	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.8249	0.797	0.687	5.409	0.223	1.771
11	0.905	0.945	1.132	0.9754	1.0922	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.8152	0.787	0.811	5.415	0.256	1.734
12	0.866	0.906	1.086	0.9782	1.0794	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.8069	0.778	0.922	5.414	0.283	1.717
13	0.832	0.873	1.040	0.9804	1.0704	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.7998	0.770	1.025	5.407	0.307	1.693
14	0.802	0.843	1.000	0.9819	1.0629	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.7935	0.763	1.114	5.396	0.328	1.672
15	0.775	0.823	0.970	0.9823	1.0580	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.7880	0.756	1.201	5.381	0.347	1.653
16	0.750	0.802	0.946	0.9825	1.0548	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.7831	0.750	1.282	5.362	0.363	1.637
17	0.728	0.783	0.925	0.9824	1.0537	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.7787	0.744	1.356	5.339	0.378	1.622
18	0.707	0.764	0.906	0.9821	1.0540	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.7747	0.739	1.424	5.314	0.391	1.608
19	0.688	0.747	0.888	0.9816	1.0540	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.7711	0.734	1.487	5.291	0.403	1.597
20	0.671	0.731	0.869	0.9810	1.0539	0.510	1.489	0.504	1.470	3.735	0.7677	0.729	1.549	5.269	0.415	1.585
21	0.655	0.717	0.853	0.9807	1.0536	0.521	1.477	0.516	1.459	3.778	0.7647	0.724	1.605	5.251	0.425	1.575
22	0.640	0.703	0.840	0.9802	1.0531	0.531	1.466	0.528	1.449	3.819	0.7620	0.720	1.659	5.235	0.434	1.566
23	0.626	0.692	0.828	0.9800	1.0528	0.540	1.456	0.539	1.440	3.858	0.7595	0.716	1.710	5.220	0.441	1.557
24	0.612	0.681	0.818	0.9800	1.0525	0.548	1.446	0.549	1.432	3.895	0.7572	0.712	1.759	5.205	0.445	1.548
25	0.600	0.671	0.809	0.9800	1.0523	0.555	1.438	0.559	1.426	3.931	0.7554	0.708	1.806	5.196	0.449	1.541

Para n > 25:

$$A = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \quad A_1 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \quad A_2 = \frac{3(n-1)}{d_2\sqrt{n}}$$

$$B_1 = 1 - \frac{3}{c_1\sqrt{2(n-1)}} \quad B_2 = 1 + \frac{3}{c_1\sqrt{2(n-1)}}$$

$$D_1 = c_1 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad D_2 = c_1 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Análise de Desempenho dos Gráficos $\bar{X}$ e R

---

---

---

---

---

---

---

---

### Desempenho dos Gráficos de Controle

- Capacidade de detectar perturbações no processo
- É importante para planejamento do gráfico:
  - √ Determinação do plano de amostragem
    - tamanho amostra; intervalo entre amostras
  - √ Estabelecimento dos Limites de Controle
    - abertura do gráfico

---

---

---

---

---

---

---

---

### Teste de Hipóteses

		Decisão		
		Não Rejeitar $H_0$		Rejeitar $H_0$
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I	$\alpha$
F	Erro Tipo II	$\beta$	Decisão Correta	$1 - \beta$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Teste de Hipóteses do Gráfico de $\bar{X}$

- $H_0: \mu = \mu_0$  vs.  $H_1: \mu \neq \mu_0$
- $H_0$ :
  - √ Processo em controle
  - √ Processo ajustado
  - √ Processo centrado no valor-alvo
  - √ Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita  $H_0$  toda vez em que  $\bar{X}$  cai fora da zona de ação do gráfico (dentro dos limites de controle)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Erros de Decisão

- Alarme Falso (Erro tipo I)
  - √ considerar erroneamente o processo fora de controle
  - √ Consequência: intervir na hora errada
- Não detecção (Erro tipo II)
  - √ considerar erroneamente o processo em controle
  - √ Consequência: não intervir na hora certa

---

---

---

---

---

---

---

---

### Medidas de Desempenho

- Supondo-se que as causas especiais não alterem  $\sigma$ 
  - √  $\alpha = P\{\text{Erro tipo I}\}$   
 $\alpha = P(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0)$
  - √  $\beta = P\{\text{Erro tipo II}\}$   
 $\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$
  - √ Poder do Gráfico de Controle:  $P_d = 1 - \beta$

---

---

---

---

---

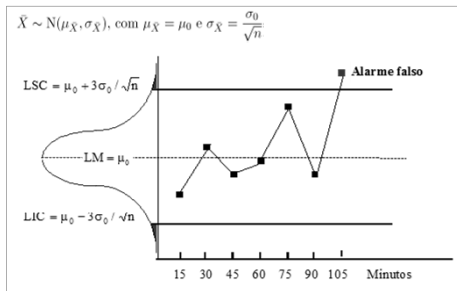
---

---

---



• Gráfico de  $\bar{X}$  – Ocorrência de Alarme Falso




---

---

---

---

---

---

---

---

**Alarme Falso**

- Para muitas distribuições,  $\bar{X}$  tenderá para uma Normal mesmo para  $n$  pequeno
- Processo em controle com desempenho  $3\sigma$

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{\frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= P\{|Z| > 3\} \\ &= 0,0027 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

**Número Médio de Amostras**

$L$ : Quantidade de amostras antes de alarme falso

✓  $L \sim$  geométrica ( $\alpha$ )

$$P\{L = x\} = \alpha(1 - \alpha)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

✓ Número médio de amostras antes de alarme falso

$CMS_0$ : Comprimento médio da sequência com o processo sob controle

$$CMS_0 = E(L) = \frac{1}{\alpha}$$

✓ Para limites  $3\sigma$ ,  $CMS_0 = 370,4$

---

---

---

---

---

---

---

---

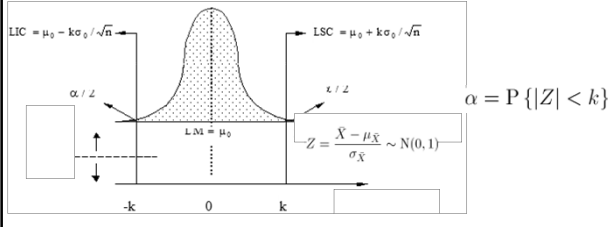
### Influência da Abertura do Gráfico

- Semi-amplitude da região de controle:

$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

√ Diminuição da frequência de alarmes falsos

- adotar  $k > 3$




---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo: Para  $k = 3,10$

√ Risco de alarme falso:

$$\alpha = P\{|Z| < k\} = P\{|Z| < 3,10\} = 0,0019$$

√ Número médio até alarme falso (tempo discreto) :

$$CMS_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0019} = 516,7$$

√ TMA: tempo médio entre alarmes (tempo contínuo)

$$TMA = 516,7 \times h$$

---

---

---

---

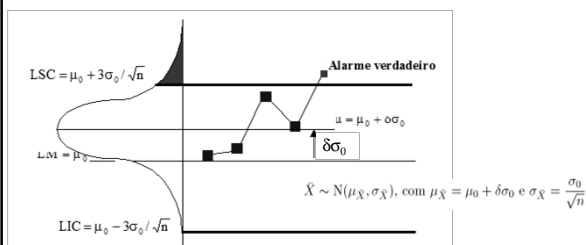
---

---

---

---

### Gráfico de $\bar{X}$ – Alarme Verdadeiro



√ Processo sob influência de causa especial ( $H_1$  Verdadeira)  
o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico

---

---

---

---

---

---

---

---

### Deslocamento da Média

- Sejam

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_0 + \delta\sigma_0 \\ \delta &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}\end{aligned}$$

- Se  $\delta \geq 1,5$  o valor de  $\bar{X}$  cairá na zona de ação rapidamente
- Se  $\delta < 1,5$  haverá uma certa inércia para a média amostral cair na zona de ação

---

---

---

---

---

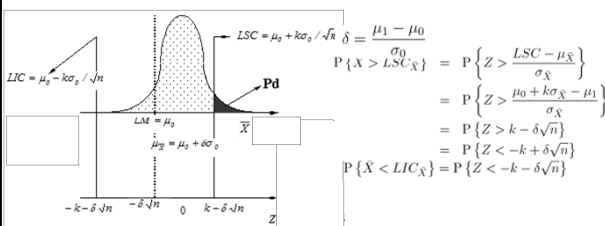
---

---

---

### Poder do Gráfico de $\bar{X}$

$P_d$ : P{um valor de  $\bar{X}$  cair na zona de ação}



$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- No caso em que  $k = 3$ ,  $\delta = 1$  e  $n = 4$

$$\begin{aligned}P_d &= P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\} \\ &= P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\} \\ &= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587\end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Alarme Verdadeiro

$M$ : Qte. de amostras antes de um alarme verdadeiro

✓  $M \sim$  geométrica ( $P_d$ )

$$P\{M = x\} = P_d(1 - P_d)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

✓ Número médio de amostras para detectar desajuste

-  $CMS_1$ : comprimento médio de sequência com o processo fora de controle

$$CMS_1 = E(M) = \frac{1}{P_d}$$

- Necessárias, em média, 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar deslocamento de 1 desvio-padrão da média

- Necessárias em média 2 amostras de tamanho 9 para perceber o mesmo deslocamento ( $P_d = 0,5$ )

---

---

---

---

---

---

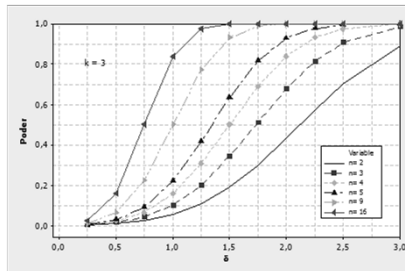
---

---

---

---

### • Curvas de poder vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão	
Amostra	Poder
2	0,06
4	0,159
9	0,50

✓  $n$  não afeta a probabilidade de alarme falso

✓ Tamanho amostral tem grande influência no poder do gráfico de controle (erro tipo II)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Rapidez de Sinalização

NMA: número médio de amostras até o sinal

$$CMS_i = \frac{1}{p_i}$$

✓ Se  $H_0: \mu = \mu_0$  for verdadeira,  $p_0 = \alpha$  e  $CMS_0 = 1/\alpha$

✓ Se  $H_0: \mu = \mu_0$  for falsa,  $p_1 = P_d$  e  $CMS_1 = 1/P_d$

---

---

---

---

---

---

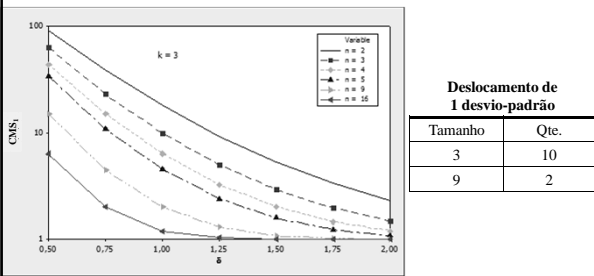
---

---

---

---

• Curvas de  $CMS_1$  vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Tamanho	Qte.
3	10
9	2

√ Deslocamento na média de 1 desvio-padrão

- Em média, para detecção: 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Alternativas para Monitoramento da Dispersão**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Monitoramento da Variabilidade**

- O gráfico de R tem sido mais utilizado por sua simplicidade
  - √ Para amostras grandes, o gráfico de  $S^2$  ou de S são mais eficientes
  - √ Para amostras pequenas, o gráfico de R é tão eficiente quanto eles
  - √ A diferença começa a ser sensível para amostras maiores que 10 unidades

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico do Desvio-Padrão S**

- Pontos Amostrais:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

√ Distribuição amostral não é tabelada. Pela tabela  $\chi^2$ :

$$P\{S > x\} = P\{S^2 > x^2\}, \text{ com } \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

√ Parâmetros da Estatística:

$$\begin{aligned} \mu_S &= c_4 \sigma \\ \sigma_S^2 &= (1 - c_4^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico do Desvio-Padrão S**

- Limites de Controle do Gráfico de S:

$$\begin{aligned} LSC_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 + 3\hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_6 \hat{\sigma}_0 & B_5 &= c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2} \\ LM_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 & B_6 &= c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2} \\ LIC_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 - 3\hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \hat{\sigma}_0 \end{aligned}$$

- Se  $S_C$  é o estimador de  $\sigma$

$$S_C = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{c_4} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$\begin{aligned} LSC_S &= \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_4 \bar{S} & B_3 &= 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \\ LM_S &= \bar{S} & B_6 &= 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} \\ LIC_S &= \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \bar{S} \end{aligned}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites  $3\sigma$  do Gráfico de S:

$$\begin{aligned} LSC_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 + 3\hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} \\ LM_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 \\ LIC_S &= c_4 \hat{\sigma}_0 - 3\hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} \end{aligned}$$

√  $\hat{\sigma}_0$ : valor estimado do desvio-padrão do processo isento de causas especiais

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráficos de R e de S**

- Gráficos  $\bar{X} - S$  são preferidos aos  $\bar{X} - R$  quando:
  - √ Amostra moderadamente grande ( $n > 10$ )
    - uso de amplitude para estimar  $\sigma$  perde eficiência ( $n > 10$ )
  - √ Tamanho da amostra é variável
- Disponibilidade atual de microcomputadores tem eliminado dificuldades computacionais na implementação dos gráficos de S

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráficos de  $\bar{X}$  – Regras Suplementares**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Regras Suplementares**

- Em geral, definidas apenas para o gráfico de  $\bar{X}$ 
  - √ Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
  - √ Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;

---

---

---

---

---

---

---

---

**Notação das Regras**

- $(L, m, a, b)$ : sinal ocorre quando ao menos  $L$ , dentre os  $m$  últimos pontos, estiverem entre  $\mu_0 + a \sigma_{\bar{X}}$  e  $\mu_0 + b \sigma_{\bar{X}}$
- Regra Básica de Controle;  
 $\checkmark C_1 : (1; 1; k; \infty)$  ou  $(1; 1; -\infty; -k)$   
 1 ponto fora dos limites de controle ( $k = 3$ : limites 3);

---

---

---

---

---

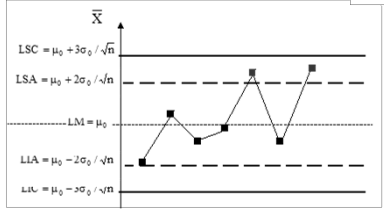
---

---

---

• Gráfico de  $\bar{X}$  – Regras Suplementares de Decisão

- $C_2 : (2; 2; 2; \infty)$  ou  $(2; 2; -\infty; -2)$
- $C_3 : (2; 3; 2; \infty)$  ou  $(2; 3; -\infty; -2)$
- $C_4 : (3; 4; 1, 6; \infty)$  ou  $(3; 4; -\infty; -1, 6)$
- $C_5 : (8; 8; 0; \infty)$  ou  $(8; 8; -\infty; 0)$
- $C_6 : (10; 10; 0; \infty)$  ou  $(10; 10; -\infty; 0)$




---

---

---

---

---

---

---

---

• Algumas Regras Suplementares:

- $\checkmark C_2 : (2; 2; 2; \infty)$  ou  $(2; 2; -\infty; -2)$
- $\checkmark C_3 : (2; 3; 2; \infty)$  ou  $(2; 3; -\infty; -2)$
- $\checkmark C_4 : (3; 4; 1, 6; \infty)$  ou  $(3; 4; -\infty; -1, 6)$
- $\checkmark C_5 : (8; 8; 0; \infty)$  ou  $(8; 8; -\infty; 0)$
- $\checkmark C_6 : (10; 10; 0; \infty)$  ou  $(10; 10; -\infty; 0)$

---

---

---

---

---

---

---

---



### Alarmes Falsos

- Regras agilizam a detecção de mudanças, mas s diminuem a proteção contra alarmes falsos  
 √ risco  $\alpha$  aumenta
- Exemplo:  
 √ Alarme sempre que 6 pontos consecutivos caírem em qualquer dos lados da linha média:  
 $0,5^6=0,0313$  (12 vezes o valor de  $\alpha = 0,0027$ ;
- Devem-se alargar os limites de controle para se manter o nível de proteção contra alarmes falsos

---

---

---

---

---

---

---

---

- Frequência de alarmes falsos no gráfico de  $\bar{X}$  com regras suplementares

Regras Utilizadas	Probabilidade de Alarme Falso	Frequência Esperada de Alarmes Falsos
$C_1$	0,0027	1 a cada 370,4 inspeções
$C_1$ e $C_2$	0,0036	1 a cada 278,0 inspeções
$C_1$ e $C_3$	0,0044	1 a cada 225,5 inspeções
$C_1$ e $C_4$	0,0035	1 a cada 286,2 inspeções
$C_1$ e $C_5$	0,0065	1 a cada 152,8 inspeções
$C_1$ e $C_6$	0,0037	1 a cada 273,8 inspeções

---

---

---

---

---

---

---

---

- Valores de  $k$  que garantem  $\alpha = 0,0027$

Regras Utilizadas	Novo Valor para $k$
$C_1$	3,0000
$C_1$ e $C_2$	3,1274
$C_1$ e $C_3$	3,3492
$C_1$ e $C_4$	3,1072
$C_1$ e $C_5$	-----
$C_1$ e $C_6$	3,1316

---

---

---

---

---

---

---

---

**Planejamento dos Gráficos de Controle**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Planejamento de Gráfico de Controle**

- Parâmetros de planejamento:
  - √ k: abertura dos limites de controle
  - √ n: tamanho da amostra
  - √ h: intervalo entre as amostras

---

---

---

---

---

---

---

---

- Abordagens de planejamento
  - √ Planejamento estatístico:
    - minimização do número de alarmes falsos
    - maximização da capacidade de detectar mudanças
  - √ Planejamento econômico:
    - Minimização do custo esperado do sistema de controle
    - Custos:
      - amostragem
      - envio não conformes ao mercado
      - custos de ajuste
      - etc.

---

---

---

---

---

---

---

---

**Intervalo de Tempo entre Amostras ( $h$ )**

- É função de:
  - √ tempo de produção de cada item;
  - √ custo da inspeção;
  - √ tempo de inspeção;
  - √ estabilidade do processo;
  - √ custo de operar sob causa especial.

---

---

---

---

---

---

---

---

**Planejamento Estatístico – Resumo**

- Para definição do tamanho da amostra ( $n$ ) e frequência de amostragem ( $h$ )
  - √ Magnitude da mudança no processo a ser detectada
  - √ Rapidez desejada para detectar essa mudança
- Situação ideal (inviável):
  - √ grandes amostras tomadas mais frequentemente  
 $n$  grande e  $h$  pequeno
- Prática adequada:
  - √ pequenas amostras em intervalos de tempo menores
    - mais usada em indústrias
  - √ grandes amostras em intervalos de tempo maiores

---

---

---

---

---

---

---

---

**Intervalo de Tempo entre Amostras**

- É função de:
  - √ tempo de produção de cada item;
  - √ custo da inspeção;
  - √ tempo de inspeção;
  - √ estabilidade do processo;
  - √ custo de operar sob causa especial.

---

---

---

---

---

---

---

---

• Problemas:

- √ obtenção de valores precisos para estes parâmetros;
- √ estabilidade do processo está associada ao tempo médio isento de causas especiais;
- √ operação sob causa especial implica aumento da PFE, dependendo da intensidade da perturbação.
- √ Valores pequenos de  $h$  implicam custos elevados com amostragem e maior incidência de alarmes falsos.

---

---

---

---

---

---

---

---

**Referências**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bibliografia Recomendada**

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, 1993.

---

---

---

---

---

---

---

---