

**Gráfico de Controle por Atributos**

---

---

---

---

---

---

---

---

- Roteiro**
1. Gráfico de  $np$
  2. Gráfico de  $p$
  3. Gráfico de  $C$
  4. Gráfico de  $u$
  5. Referências

---

---

---

---

---

---

---

---

- Gráficos de Controle por Atributos**
- São usados em processos que:
    - √ Produz itens defeituosos mesmo em controle
    - √ Produz itens com pequenos defeitos que podem ser sanados
    - √ Produz itens com alguns pequenos defeitos que não inutilizam o todo
  - São muito usados em controle de qualidade de serviços

---

---

---

---

---

---

---

---

### Principais Gráficos de Atributos

- Gráfico de controle do número de defeituosos ( $np$ )
- Gráfico de controle da fração defeituosa ( $p$ )
- Gráfico de controle do número de não-conformidades na amostra ( $C$ )
- Gráfico de controle do número médio de não-conformidades na amostra ( $u$ )

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de $np$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Monitoramento de qualidade de serviço em um restaurante
  - √ Características da qualidade de interesse:
    - Comida
    - Atendimento
    - Limpeza
  - √ Pesquisa diária com 200 clientes sobre o grau de satisfação (Bom/Ruim)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $np$

- Monitora a quantidade de itens considerados não conformes em uma amostra de tamanho fixo ( $n$ )
- Situação geral:
  - √ Cada item pode ter várias características de qualidade que são examinadas simultaneamente
  - √ Item é classificado como defeituoso caso ele satisfaça o padrão de qualidade em uma ou mais dessas características

---

---

---

---

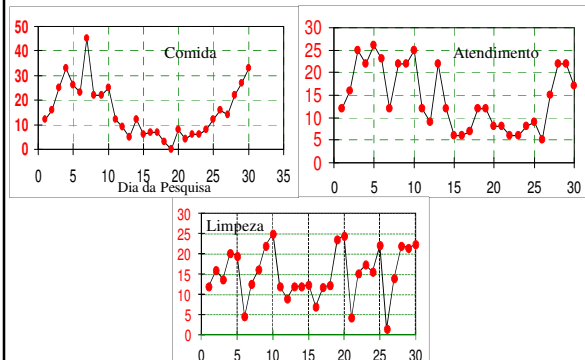
---

---

---

---

- Restaurante – Números de Clientes Insatisfeitos
  - √ Clientes pesquisados diariamente: 200



---

---

---

---

---

---

---

---

### Comentários

- Comida:
  - √ qualidade deixou a desejar no 10 dias iniciais
  - √ Equilibrou-se, com piora gradativa a partir do 21º dia
- Atendimento:
  - √ Diminuiu a quantidade de insatisfação entre os 15º e 26º dias
- Limpeza:
  - √ Apresenta sazonalidade (redução da insatisfação a cada 5 dias)
- Todos esses processos encontram-se fora de controle

---

---

---

---

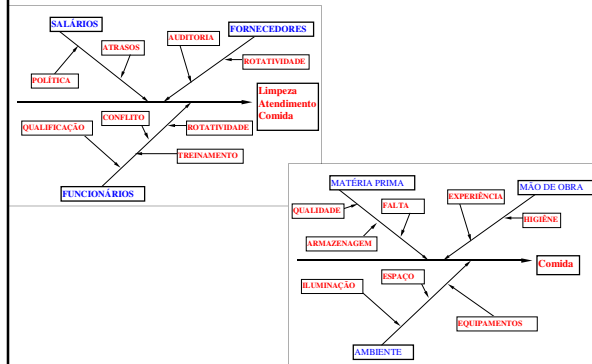
---

---

---

---

• Restaurante – Diagramas de Causa e Efeito




---

---

---

---

---

---

---

---

• Restaurante – Plano de ação

Causa Especial	Medida de Prevenção
Surgimento de insetos	Dedetização periódica
Materia prima de má qualidade	Auditoria do fornecimento
Conflitos internos	Treinamento para trabalho em equipe

---

---

---

---

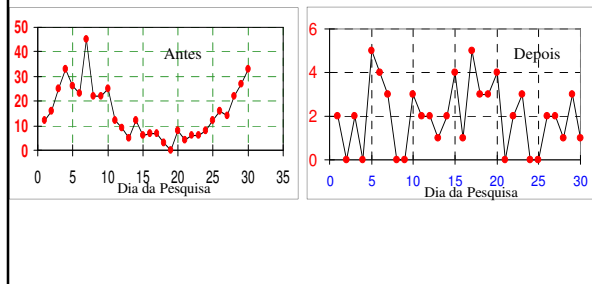
---

---

---

---

• Restaurante – Insatisfação com comida após ações para controlar do processo  
 √ Qte. clientes pesquisados: 200




---

---

---

---

---

---

---

---

### Modelo Probabilístico do Processo

- √ Se processo opera de forma estável:
  - É constante a probabilidade de que uma unidade não esteja de acordo com especificações ( $p$ )
  - São independentes as sucessivas unidades produzidas
- √ Amostra aleatória com  $n$  unidades amostrais
- √  $D_i$ : variável aleatória que conta quantidade de unidades amostrais não-conformes do produto da  $i$ -ésima amostra
- √ Distribuição amostral de  $D_i$ :  
 $D_i \sim \text{binomial}(n, p)$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Monitoramento do Processo – Fase 1

- Estimador de  $p$  (desconhecido) :

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn}$$

- √  $\hat{p}$ : estimativa da probabilidade de defeituosos ( $p$ )
- √  $D_i$ : quantidade de defeituosos da  $i$ -ésima amostra
- √  $m$ : quantidade de amostras
- √  $n$ : tamanho da amostra
- Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então, com alta probabilidade,  $\hat{p}$  estará próximo de  $p$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

- Restaurante – Construção do Gráfico  $np$

√ Banco de dados: *BD\_CQI.xls*/ guia: *comida*

Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação
1	2	11	2	21	0
2	0	12	2	22	2
3	2	13	1	23	3
4	0	14	2	24	0
5	5	15	4	25	0
6	4	16	1	26	2
7	3	17	5	27	2
8	0	18	3	28	1
9	0	19	3	29	3
10	3	20	4	30	1
	19		27		14

Insatisfação total = 60  
 Clientes pesquisados= 6000

√ Estimação do Parâmetro:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{60}{(30)(200)} = 0,01$$

Número esperado de insatisfação  
 $np = (200)(0,01) = 2,0$  (p/dia)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção do Gráfico $np$

- $D_i$ : Quantidade de defeituosos na amostra  $i$
- $D_i \sim$  binomial  $(n, p)$ 
  - √  $p$ : fração de defeituosos do processo durante coleta amostra  $i$
  - √ Os resultados devem ser independentes  
(Restaurante: opinião de um cliente não pode interferir na opinião de outro)
  - √ Parâmetros de  $D_i$ :

$$\mu_D = np$$

$$\sigma_D^2 = np(1 - p)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $np$

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):

$$LSC_{np} = np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p)}$$

$$LM_{np} = np_0$$

$$LIC_{np} = np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p)}$$

- √  $p_0$ : valor de  $p$  para processo sob controle
  - pode ser valor padrão especificado pela gerência
  - se for desconhecido, adota-se  $\hat{p}$

- Se  $LIC_{np} < 0$ , adota-se  $LIC_{np} = 0$

---

---

---

---

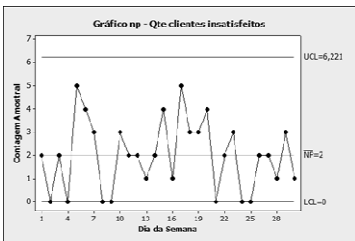
---

---

---

---

- Restaurante – Gráfico de  $np$ :



- Estimativas ( $\hat{p}_0 = 0,01$ )

$$LSC_{np} = n\hat{p}_0 + 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) + 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = 6,221$$

$$LM_{np} = n\hat{p}_0 = 200(0,01) = 2,000$$

$$LIC_{np} = n\hat{p}_0 - 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) - 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = -2,221$$

$$LIC_{np} = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- **Comentários:**

- √ O processo está em estado de controle estatístico
  - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
- √ Se mais de 6 clientes mostrarem-se insatisfeitos com a comida, deve-se buscar causas especiais

---

---

---

---

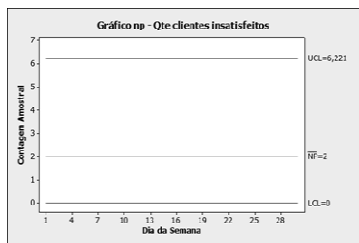
---

---

---

---

- **Restaurante – Gráfico de  $np$  para monitoramento do processo (Fase 2)**



---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico de Controle de  $p$**

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de p

- Característica da qualidade de interesse:
  - √ Proporção de itens defeituosos produzidos pelo processo (fração não-conforme)
  - √ Fração não conforme da amostra  $i$ :  $D_i/n_i$

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):

$$LSC_p = p_0 + 3\sqrt{\frac{p_0(1-p)}{n}}$$

$$LM_p = p_0$$

$$LIC_p = p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0(1-p)}{n}}$$

- √ Dividir por  $n$  nos limites de controle do gráfico  $np$

---

---

---

---

---

---

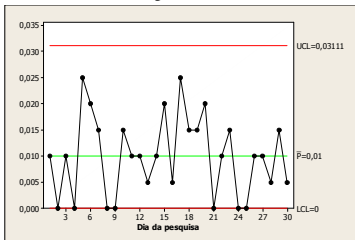
---

---

---

---

- Restaurante - Gráfico de p:



- Estimativa dos limites para padrão desconhecido ( $\hat{p}_0 = 0,01$ )

$$LSC_p = \hat{p}_0 + 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 + 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,031$$

$$LM_p = \hat{p}_0 = 0,01$$

$$LIC_p = \hat{p}_0 - 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 - 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,011$$

$$LIC_p = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Comentários:

- √ O processo está em estado de controle estatístico
  - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
- √ Se a proporção de clientes insatisfeitos com a comida for maior que 0,031, deve-se buscar causas especiais

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Gráfico de $np$ & Gráfico de $p$

- Para um mesmo valor de  $n$ , o gráfico de  $p$  equivale ao gráfico de  $np$ 
  - √ Diferem apenas na escala do eixo vertical
- $LM_p$  indica diretamente o nível de qualidade do processo
- Opta-se pelo gráfico de  $p$  quando o tamanho da amostra não pode ser mantido constante

---

---

---

---

---

---

---

---

### Variação do Tamanho Amostral

- Quando  $n$  varia, o gráfico apresentará vários limites de controle
- Se a variação for pequena, pode-se adotar os limites na maior amostra
  - √ Sempre que um ponto cair na região de ação do gráfico, compara-se seu valor com o limite exato
  - √ (considerar tamanho da amostra que gerou o ponto)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Estimador de  $p_0$  (desconhecido)

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

- √  $n_i$ : tamanho da  $i$ -ésima amostra
- √  $D_i$ : quantidade de defeituosos da  $i$ -ésima amostra

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Processo que quando isento de causa especial produz 5% de defeituosos

√ Amostras de tamanhos variáveis

√ Limite de controle superior:  $LSC_p = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{n}}$

√ Cálculos limites de controle:

Amostra	n <sub>i</sub>	p <sub>0</sub> = 0,05		LIC <sub>p</sub>	LSC <sub>p</sub>
		D <sub>i</sub>	p <sub>i</sub>		
1	200	8	0,0400	0,0038	0,0962
2	240	13	0,0542	0,0078	0,0922
3	220	8	0,0364	0,0059	0,0941
4	240	12	0,0500	0,0078	0,0922
5	200	19	0,0950	0,0038	0,0962

---

---

---

---

---

---

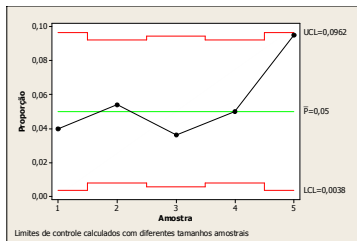
---

---

---

---

- Gráfico *p* com limites variáveis




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráficos de *p* – Tamanho Amostral Variável

- Pode-se construir o gráfico *p* com base na maior amostra

√  $n = 240$

- A abertura do gráfico é conservativa

- Caso haja sinal de alarme

√ Comparar o valor de  $\hat{p}_i$  com os limites de controle exatos

---

---

---

---

---

---

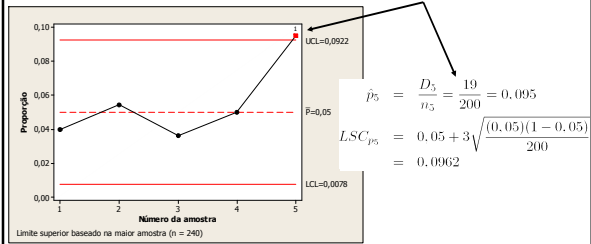
---

---

---

---

- Gráfico de  $p$  com limite superior fixo:



$$\hat{p}_5 = \frac{D_5}{n_5} = \frac{19}{200} = 0,095$$

$$LSC_{p_5} = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{200}} = 0,0962$$

√ Não se confirma o alarme pois  $\hat{p}_5 < LSC_{p_5}$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de C

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de C

- Também conhecido como gráfico do número de não-conformidades (ou de defeitos)
  - √ Mostra o número de não conformidades na amostra
  - √ Produtos com muitos componentes
    - Número de não-conformidades para monitorar o processo (medida de qualidade é a frequência média de defeitos)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Unidade de inspeção:
  - √ Quantidade básica de produto em que a frequência de defeitos é expressa
- Tamanho amostral  $n$  não é necessariamente inteiro
  - √ Condicionado ao custo, poder desejado, etc.
- Processo sob controle
  - √ Espera-se que as não-conformidades ocorram de maneira aleatória e com baixa frequência

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modelo Probabilístico

- C: Qte. de não-conformidades por unidade de inspeção
- √ Espera-se que  $C \sim \text{Poisson}(\lambda)$
  - $\lambda$ : média de não-conformidades por amostra

$$\Pr\{C = x\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

- √ Suposições:
  - independência na ocorrência de não-conformidades
  - evento raro associado à não-conformidade com uma infinidade de chances de ocorrências
- √ Parâmetros de C:
  - $\mu_C = \sigma_C^2 = \lambda$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de C

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exato):
  - $LSC_C = \lambda_0 + 3\sqrt{\lambda_0}$
  - $LM_C = \lambda_0$
  - $LIC_C = \lambda_0 - 3\sqrt{\lambda_0}$
- √  $\lambda_0$ : média de não-conformidades por amostra com o processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

- Quantidades amostrais:

- √  $u$ : número médio de não-conformidades por unidade de inspeção

- √  $n$ : quantidade de unidades de inspeção na amostra

- √  $\lambda$ : média de não-conformidades por amostra

$$\lambda = n u$$

- Estimativa de  $\lambda_0$  (desconhecido)

- √  $\bar{u}$  estima  $u_0$  e  $\bar{C} = n \bar{u}$  estima  $\lambda_0$ , já que  $\lambda_0 = n u_0$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{mn}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites de Controle  $3\sigma$  (estimados)

$$LSC_C = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$$

$$LM_C = \bar{C}$$

$$LIC_C = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo – Produção de Geladeiras

- Não-conformidades em 40 amostras de 5 geladeiras

- √ Banco: *BD\_CQI.xls*/guia: *geladeiras*

Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$
1	2	11	5	21	1	31	5
2	4	12	4	22	5	32	1
3	2	13	2	23	2	33	2
4	0	14	4	24	6	34	1
5	3	15	5	25	3	35	6
6	1	16	1	26	2	36	2
7	2	17	1	27	3	37	1
8	4	18	1	28	0	38	2
9	2	19	1	29	3	39	4
10	2	20	3	30	1	40	1

- √ unidade inspeção: 1 geladeira

- √ Tamanho amostra:  $n = 5$

- √ Quantidade de amostras:  $m = 40$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Geladeiras – Estimação Parâmetros

√ Quantidade de defeitos em 40 amostras ( $m = 40$ )

$$\sum_{i=1}^{40} C_i = 100$$

√  $\bar{u}$ : número médio de não-conformidades por unidade de inspeção (por geladeira)

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{mm} = \frac{\sum_{i=1}^{40} C_i}{(40)(5)} = \frac{100}{200} = 0,5$$

√  $\bar{c}$ : número médio de não-conformidades por amostra (por 5 geladeiras)

$$\bar{c} = m\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{m} = \frac{200}{40} = 2,5$$

---

---

---

---

---

---

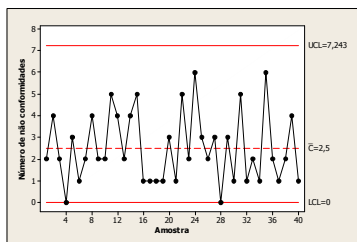
---

---

---

---

• Geladeiras – Gráfico de Controle de C:



• Estimativas dos Limites de Controle

$$\begin{aligned} LSC_C &= \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 + 3\sqrt{2,5} = 7,243 \\ LM_C &= \bar{C} = 2,5 \\ LIC_C &= \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 - 3\sqrt{2,5} = -2,243 \\ LIC_C &= 0 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Comentários:

√ O processo está em estado de controle estatístico  
 - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média

√ Hipóteses:

-  $H_0: u = 0,5$  vs.  $H_1: u \neq 0,5$   
 para  $n = 5$ ,  $LSC_C = 7,24$

√ Distribuição admitida para as não-conformidades:

-  $C_i \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$ , com  $\lambda_0 = 5 \times 0,5 = 2,5$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico de Controle de  $u$**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico de Controle de  $u$**

- Gráfico do número de não-conformidades por unidade de inspeção
  - √ Também usado para amostras de tamanho variável
- Pontos do gráfico ( $u_i$ ):  $u_i = \frac{C_i}{n_i}$
- Parâmetros da distribuição de  $U_i$  (sob controle)
 
$$E(U_i) = E\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = u_0$$

$$\text{Var}(U_i) = \text{Var}\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = \frac{E\left(\frac{C_i}{n_i}\right)}{n_i}$$

$$\sigma(U_i) = \sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

**Construção do Gráfico de  $u$**

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):
 
$$LSC_{u_i} = u_0 + 3\sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$

$$LM_{u_i} = u_0$$

$$LIC_{u_i} = u_0 - 3\sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$
  - √  $u_0$ : valor de  $u$  para processo sob controle
    - pode ser valor padrão especificado pela gerência
    - se for desconhecido, adota-se  $\bar{u}$ , estimado com base em  $m$  amostras iniciais de tamanho variável
 
$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$
- √  $LM_C$  é fixo e os limites variam de acordo com o tamanho amostral

---

---

---

---

---

---

---

---





### Exemplo

- Defeitos em Tecido Tingido:
  - Inspeção de defeitos a cada 50 m<sup>2</sup>, em 10 rolos de tecido tingido
  - unidade de inspeção: 50 m<sup>2</sup> de tecido;  $m = 10$

Numero do rolo	Area do rolo (m <sup>2</sup> )	Cte. Defeitos por amostra (C <sub>i</sub> )	Cte. unidades de inspeção por rolo	Média defeitos por unidade (u <sub>i</sub> )
1	500	14	10,0	1,40
2	400	12	8,0	1,50
3	650	20	13,0	1,54
4	500	11	10,0	1,10
5	475	7	9,5	0,74
6	500	10	10,0	1,00
7	600	21	12,0	1,75
8	525	16	10,5	1,52
9	600	19	12,0	1,58
10	625	23	12,5	1,84
Total	5.375	153	107,5	1,42

Unidade de inspeção: áreas de 50 m<sup>2</sup>

Tamanho da amostra  
Não é inteiro!

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{10} C_i}{\sum_{i=1}^{10} n_i} = \frac{153}{107,5} = 1,423$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Estimação dos Limites de Controle – Gráfico de  $u$

$$LSC_{u_i} = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

$$LM_{u_i} = \bar{u}$$

$$LIC_{u_i} = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

Rolo (i)	Amostra (n <sub>i</sub> )	Limites	
		Inferior	Superior
1	10,0	0,291	2,555
2	8,0	0,158	2,689
3	13,0	0,431	2,416
4	10,0	0,291	2,555
5	9,5	0,262	2,584
6	10,0	0,291	2,555
7	12,0	0,390	2,456
8	10,5	0,319	2,528
9	12,0	0,390	2,456
10	12,5	0,411	2,436

---

---

---

---

---

---

---

---

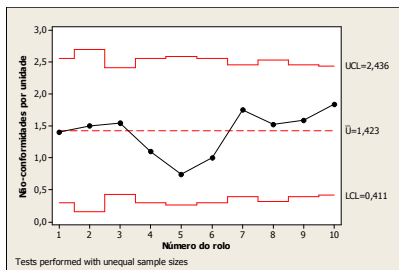
---

---

---

---

- Gráfico de Controle para Não-Conformidade por Unidade – Tamanho Variável da Amostra




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle Padronizado

- Estatística padronizada:

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

- Limites de Controle:

$$\begin{aligned} LSC_Z &= 3 \\ LM_Z &= 0 \\ LIC_Z &= -3 \end{aligned}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Tecido – Cálculo do Escore

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

Número do rolo	Qte. unidades de inspeção por rolo (n <sub>i</sub> )	Média defeitos por unidade (u <sub>i</sub> )	Desvio-padrão por amostra	Escore z <sub>i</sub>
1	10,0	1,40	0,377	-0,062
2	8,0	1,50	0,422	0,182
3	13,0	1,54	0,331	0,348
4	10,0	1,10	0,377	-0,857
5	9,5	0,74	0,387	-1,773
6	10,0	1,00	0,377	-1,122
7	12,0	1,75	0,344	0,949
8	10,5	1,52	0,369	0,273
9	12,0	1,58	0,344	0,465
10	12,5	1,84	0,337	1,235
<b>Média global:</b>		<b>1,423</b>		

---

---

---

---

---

---

---

---

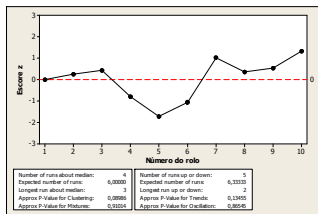
---

---

---

---

- Tecido – Gráfico de Controle Padronizado para Defeitos por unidade



✓ É a opção preferida

✓ Adequado quando paralelamente são usados testes sequenciais e métodos de reconhecimento de padrão

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Referências**

---

---

---

---

---

---

---

---

**Bibliografia Recomendada**

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- WERKEMA, M.C.C. *Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento de Processos*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.

---

---

---

---

---

---

---

---