Fundamentos do Controle Estatístico do Processo

Roteiro

Introdução

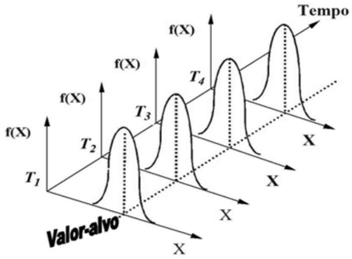
Variabilidade do Processo

- Relaciona-se com a diferença entre as unidades produzidas
  - √ Variabilidade grande
    Fácil observar as diferenças
  - √ Variabilidade pequena
    Difícil observar as diferenças

Variabilidade Natural

- Resultados de pequenas perturbações (ou causas aleatórias)
  - √ Não é possível ser evitada
  - √ Estado de controle estatístico (sob controle)
    Apresenta apenas variabilidade natural
  - √ Isento de causas especiais

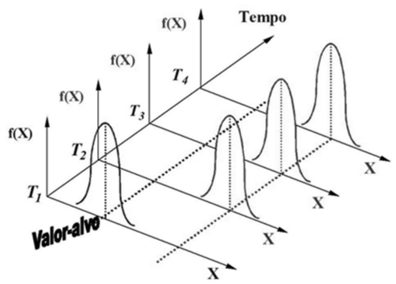
- Processo sob Controle



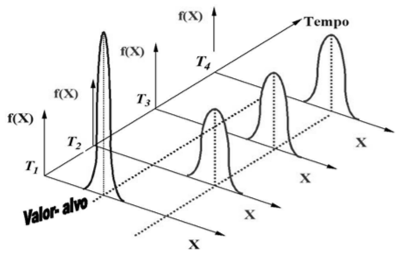
Causa Especial

- Problema ou modo anormal de operação do processo
  - √ Desloca a distribuição da variável aleatória de interesse
    Tira a média do valor-alvo e/ou aumenta sua dispersão
  - √ Pode ser corrigida ou eliminada
  - √ Processo fora de controle
    Opera em presença de causas especiais

- Processo fora de controle:
  - √ Desajuste: causa especial desloca a média do processo



- Processo fora de controle:
  - √ Desajuste e instabilidade: causa especial desloca a média e aumenta a variabilidade do processo

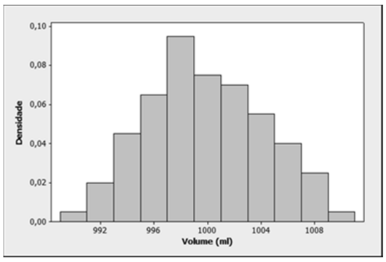


Processo de Produção

- Exemplo: Latícinio
  - √ Característica de Qualidade (X):
    - – Volume de cada saco
  - √ Valor-alvo: 1000 ml
  - √ Amostra de tamanho 100
  - √ Resultados amostrais:

Média	999,84 ml
Desvio-Padrão	4,34 ml

- Histograma dos valores de *X*



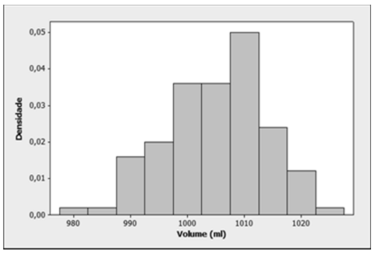
  - √ *X* aparenta ser normal

Processo de Produção

- Processo de produção sob influência de causas especiais
  - √ Característica de Qualidade (X):
    - – Volume de cada saco
  - √ Valor-alvo: 1000 ml
  - √ Amostra de tamanho 100
  - √ Resultados amostrais:

Média	1004,92 ml
Desvio-Padrão	8,60 ml

- Histograma dos valores de X



  √ X aparenta ser normal

Monitoramento de Processos

Monitoramento de Processos

- Os processos devem ser monitorados para detectar a presença de causas especiais
  - √ Detectada sua presença, investigar a causa especial
  - √ Identificada, intervém-se para eliminá-la

Gráficos de Controle

- Principal ferramenta para monitorar processos
  - √ Análise periódica
    - amostra de *n* itens retiradas a cada intervalo de tempo
  - √ Forma do gráfico de controle:
    - Linha média
    - Limites de controle (superior e inferior)

Teste de Hipóteses e Gráficos de Controle

- Gráficos de controle:
  - √ representação gráfica de uma estatística amostral g(**X**) como uma função do tempo
- Sua aplicação é equivalente a executar repetidamente um teste de hipóteses
  - √ Teste de hipóteses:
    - H_0: processo de produção está sob controle estatístico
    - H_1: processo de produção está fora de controle estatístico

- Região de rejeição para H_0:
  - √ Conjunto de todas as realizações da estatística de teste que se encontram fora dos limites de controle
- Regra de decisão do teste:
  - √ Intervém-se no processo se a estatística de teste g(**X**) se encontra sob ou fora dos limites de controle
  - √ Não há nenhuma ação se a estatística de teste g(**X**) se encontra dentro dos limites de controle

Hipótese Nula

- H_0 é uma afirmação sobre o parâmetro de locação (μ, λ, p) ou sobre o parâmetro de escala (σ) da característica de qualidade monitorada
  - √ Esses valores podem ser:
    - Valor nominal (valor-alvo, valor de referência), ou
    - Estimativa obtida a partir de uma pré-execução do processo

Escolha da Estatística de Teste

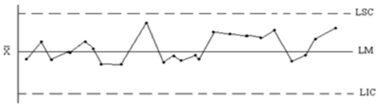
- Depende do aspecto monitorado do processo:
  - √ Locação ou dispersão de uma característica de qualidade
- Outros critérios:
  - √ Eficiência da estatística de teste
  - √ Tempo e complexidade envolvidos nos cálculos da estatística de teste
  - √ Qualificações exigidas do pessoal da inspeção

- Importante:
  - √ Um gráfico de controle não identifica quais as causas especiais atuando no processo
  - √ Gráficos de controle processam e dispõem informações que podem ser utilizadas na identificação

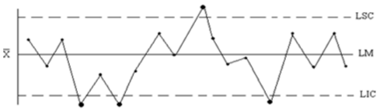
Regra de Decisão

- Processo sob controle
  - √ Os pontos distribuem-se aleatoriamente em torno da linha média
  - √ Não se intervém no processo
- Suspeita de ocorrência de causa especial
  - √ Um dos pontos cai na região de ação do gráfico
  - √ Afastamento excessivo da linha média
  - √ Intervém-se no processo
    - Identificação e ação corretiva

- Processo sob controle



- Processo fora de controle



  - √ Pontos fora dos limites de controle
  - √ Pontos não apresentam configuração aleatória

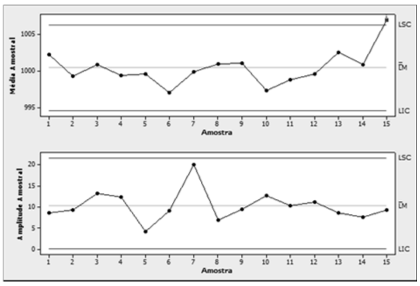
Exemplo

- Produção de leite
  - √ Característica de qualidade: Volume (ml)
  - √ Amostras de tamanho 5 (n = 5) coletadas a cada 30 min (h = 30)
  - √ Estatísticas amostrais:
    - Média da i-ésima amostra: $\bar{X}_i$
    - Amplitude da i-ésima amostra: R_i

- Valores amostrais

Amostra	X_i1	X_i2	X_i3	X_i4	X_i5	Xbar	R
1	1001,7	1004,0	1004,8	996,3	1004,3	1002,2	8,5
2	999,7	1000,3	1003,2	993,9	998,9	999,2	9,3
3	990,9	1004,0	1003,0	1004,0	1002,0	1000,8	13,1
4	1000,7	1007,3	998,1	995,5	994,9	999,3	12,4
5	1000,7	998,3	998,9	997,8	1001,9	999,5	4,1
6	998,6	993,7	1002,8	995,5	994,1	996,9	9,1
7	1002,7	1010,5	990,5	992,5	1003,0	999,8	20,0
8	1000,4	1004,0	1003,0	999,8	997,2	1000,9	6,8
9	999,9	1005,6	996,1	1005,5	998,1	1001,0	9,5
10	994,3	993,2	1005,8	996,4	996,7	997,3	12,6
11	997,4	997,1	998,0	995,6	1005,8	998,8	10,2
12	1003,5	992,3	1000,8	1000,0	1001,2	999,6	11,2
13	1003,4	1004,6	1001,3	997,3	1005,8	1002,5	8,5
14	997,7	1004,6	997,0	1001,0	1003,9	1000,8	7,6
15	1012,0	1007,0	1002,7	1008,0	1005,0	1006,9	9,3

Gráfico de Controle de $\bar{X}$ e *R*



√ Afastamento de $\bar{X}_{15}$ deve-se provavelmente a causa especial

Construção de Gráficos de Controle $\bar{X}$

- Parâmetros do processo sob controle
  - √ μ_0: média da distribuição de X
  - √ σ_0: desvio-padrão da distribuição de X
- Parâmetros do processo determinam os limites de controle
  - √ A média deve coincidir com o valor-alvo especificado
  - √ Se não estiver definido, deve ser estimado
  - √ O desvio-padrão do processo é estimado
  - √ As estimativas devem ocorrer em período em que o processo permanece isento de causas especiais

Uso dos Gráficos de Controle

- Valores observados da variável de interesse devem ser independentes
- Há processos em que os valores da variável X são correlacionados entre si
- É possível usar os gráficos de Shewhart mesmo quando a distribuição não for normal

Tipos de Gráficos de Controle

- Gráfico de Variáveis
  - √ Monitoram características de qualidade medidas em uma escala contínua
- Gráfico de Atributo:
  - √ Monitoram característica de qualidade categórica ou de contagem

Gráficos de Variável

√ Gráfico $\bar{X}$
√ Gráfico R
√ Gráfico S
Gráfico $\bar{X}$ - R ou $\bar{X}$ - S

√ Gráfico de medidas individuais
√ Gráfico de amplitude móvel
Gráfico X-AM

√ Outros tipos
- Gráfico CUSUM
- Gráfico EWMA

Em geral, têm como pressupostos normalidade e independência

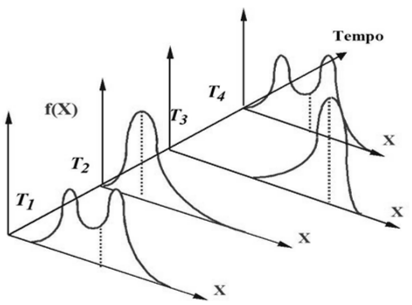
Gráficos de Atributos

- Gráfico p — Modelo Binomial
  - √ Monitora proporção de defeituosos
- Gráfico np
  - √ Monitora número de itens não-conformes
- Gráfico c — Modelo Poisson
  - √ Monitora número de não-conformidades em unidade de produto
- Gráfico u
  - √ Monitora número médio de não conformidades por unidade de produto

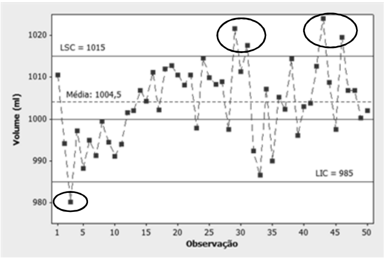
Etapa Inicial: Estabilização e Ajuste do Processo

Processo Instável

- Distribuição do volume de leite (processo instável)



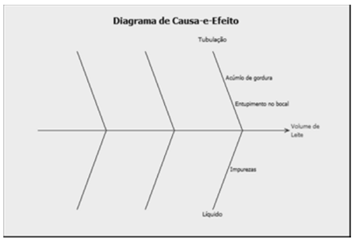
- Limites de especificação: 1000 ± 15 (ml)
- Volume medido a cada 15 min.



√ A característica de qualidade não é estável

Ajuste do Processo – Diagnóstico

- Diagrama de Causa e Efeito
  - √ Causas especiais que afetam o volume de leite



√ Acúmulo de gordura
√ Entupimento no boal
√ Impurezas no líquido

Ajuste do Processo – Correção/Prevenção

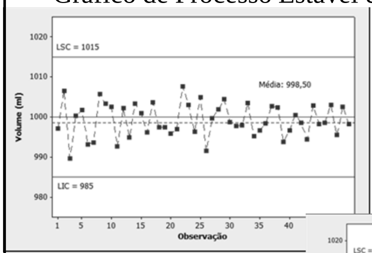
- Após o diagnóstico, eliminam-se as causas especiais

Causa Especial	Medida Corretiva/Preventiva
Gordura na tubulação	Limpeza mensal da tubulação
Entupimento do bocal	Troca semanal do bocal
Impurezas no leite	Utilização de filtros

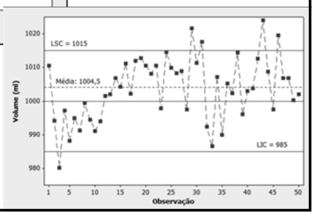
Processo Estável e Ajustado

- √ Os valores de X devem vir de uma distribuição com média constante
  - Coincidindo com o valor-alvo
- √ Valores variam em torno da média com maior incidência de pontos mais próximos de seu valor
  - Pontos afastados são menos frequentes
- √ Dispersão limitada e com padrão aleatório
- √ Não deve haver dependência entre valores consecutivos de X

- Gráfico de Processo Estável e Ajustado – Leite



Antes



Construção do Gráfico de Controle

- μ_0 e σ_0 são desconhecidos e devem ser estimados
- Certeza de processo sob controle durante amostragem
  - √ $\bar{X}$ estima μ_0
  - √ S^2 estima σ^2
  - √ Na prática, não se sabe se o processo permanece isento de causas especiais durante amostragem

Estimação da Variabilidade do Processo

Subgrupos Racionais

- Retiram-se pequenas amostras a intervalos de tempos regulares
  - √ Cada amostra (ou subgrupo racional) constitue-se de unidades produzidas quase no mesmo instante
  - √ Dificilmente ocorrerá uma causa especial durante a formação do subgrupo
  - √ O procedimento minimiza a probabilidade de amostra com elementos de populações diferentes

Importante

- Perturbação entre a retirada de amostras não aumentará a variabilidade **em cada** amostra, mas **entre** amostras
  - √ Aumento da variabilidade de média amostrais
- Estima-se a variabilidade do processo com base na dispersão de valores **dentro** da amostra

Estimação de σ – Desvio-padrão Amostral (S)

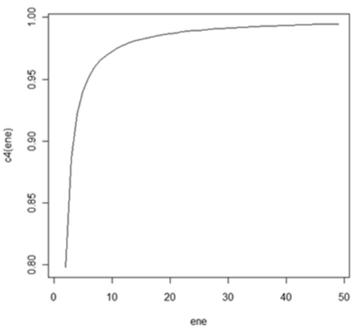
- Dada amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n com $Var(X_1) = \sigma^2$
  - √ S: desvio-padrão amostral $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$
  - √ S é viciado para σ ➔ $E(S) \neq \sigma$
- Se a amostra aleatória provém de uma normal:
  - √ $E(S)= c_4\,\sigma$, com $c_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$
  - √ $c_4 < 1, \forall n,$ e $c_4 \to 1,$ quando n cresce

- $Var(S) = E(S^2) – [E(S)]^2 = (1-c_4^2)\,\sigma^2$
- Valor aproximado de c4:

$$c_4 \approx \frac{4(n-1)}{4n-3}$$

  - √ A aproximação melhora a medida em que *n* cresce

Comportamento de c_4



Amplitude Amostral Relativa

- Definida como: $W = \frac{R}{\sigma} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\sigma}$
- Se amostra provém de população normal:

$$W = Z_{(n)} - Z_{(1)}$$

  - √ W é amplitude de amostra de tamanho *n* de população normal padrão
- Distribuição de W relaciona-se com distribuição das estatísticas de ordem da normal padrão.

Distribuição Normal Padrão

- Parâmetros:
  - √ Média: $\mu = 0$
  - √ Desvio padrão: $\sigma = 1$
- Função de densidade de probabilidade:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\}$$

- Função de distribuição acumulada:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx$$

Estatística de Ordem da Normal Padrão

- Amostra aleatória $Z_1, Z_2, ..., Z_n$
- Estatísticas de ordem:
  - √ $Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq ... \leq Z_{(n)}$
- Função de densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{Z_{(1)},\ldots Z_{(n)}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n!\,\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n),$$
$$\text{para } x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

- Função de densidade marginal da r-ésima estatística de ordem:

$$f_{Z_{(r)}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\Phi(x)\right]^{r-1}\left[1-\Phi(x)\right]^{n-r}\varphi(x)$$

- Função de densidade marginal entre as r-ésima e a s-ésima estatísticas de ordem:

$$f_{Z_{(r)},Z_{(s)}}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[\Phi(x)\right]^{r-1}\left[1-\Phi(x)\right]^{n-r}$$
$$\left[\Phi(x)-\Phi(y)\right]^{s-n-1}\varphi(x)\varphi(y),$$

para $r < s$

Amplitudes Relativas Amostrais

√ n= 2 $\mathrm{E}\left(Z_{(2)}\right) = -\mathrm{E}\left(Z_{(1)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ➔ $\mathrm{E}(W) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

√ n = 3 $\mathrm{E}\left(Z_{(3)}\right) = -\mathrm{E}\left(Z_{(1)}\right) = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ ➔ $\mathrm{E}(W) = \frac{6}{2\sqrt{\pi}}$

√ n = 4 $\mathrm{E}\left(Z_{(4)}\right) = -\mathrm{E}\left(Z_{(1)}\right) = \frac{6}{\pi\sqrt{\pi}}\mathrm{arctg}\sqrt{2}$

➔ $\mathrm{E}(W) = \frac{12\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}$

√ n = 5 $\mathrm{E}\left(Z_{(5)}\right) = -\mathrm{E}\left(Z_{(1)}\right) = \frac{15\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{5}{2\sqrt{\pi}}$

$$\mathrm{E}(W) = 2 \times \left[\frac{15\,\mathrm{arctg}\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} - \frac{5}{2\sqrt{\pi}}\right]$$

√ Resultados obtidos adotando uma abordagem por equação diferencial

√ Não há expressões explícitas para n > 5

√ Fonte: Johnson, N. L.; Kotz, S. e Balakrishnan, N. *Continuous Univariate Distributions*

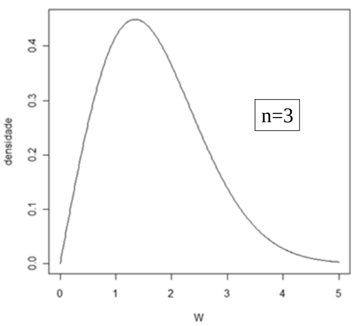
- Função de distribuição acumulada de W

$$F_W(x) = n\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(z+x) - \Phi(z)]^{n-1}\varphi(z)dz$$

- Função de densidade de probabilidade de W:

$$f_W(x) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi(z+x) - \Phi(z)]^{n-2}\varphi(z)\varphi(z+x)dz$$

- Gráfico da densidade da amplitude relativa



Estimação de σ – Amplitude Amostral (R)

- Dada amostra aleatória X_1, X_2, ..., X_n com $Var(X_1) = \sigma^2$
  - √ R: amplitude amostral

$$R = \max\{X1, \ldots, X_n\} - \min\{X1, \ldots, X_n\}$$

  - √ R é viciado para σ ➔ $E(R) \neq \sigma$
- Se a amostra aleatória provém de uma normal:
  - √ $E(R) = d_2\,\sigma$
  - √ $\bar{R}$ é estimador não viesado de E(R) ➔ $\frac{\bar{R}}{d_2}$ é não viciado para estimar σ

Valores de c_4 e d_2

n	c_4	d_2
2	0,798	1,128
3	0,886	1,693
4	0,921	2,059
5	0,940	2,326
6	0,952	2,534
7	0,959	2,704
8	0,965	2,847
9	0,969	2,970
10	0,973	3,078
11	0,975	3,173
12	0,978	3,258
13	0,979	3,336
14	0,981	3,407
15	0,982	3,472

- Package (IQCC)
  - √ comandos:
    - d2
    - d3
    - c4
    - table.const (d3 não funciona!)
  - √ Correção
    - d3.corr
    - tabela.corrigida
    - (scripts próximo slide)

```
> library(IQCC)
> d3(25)
[1] 0.7084408
> c4(25)
[1] 0.9896404
> tabela.corrigida(25)
         d2        d3        c4
2  1.128379 0.8525025 0.7978846
3  1.692569 0.8883680 0.8862269
4  2.058751 0.8798082 0.9213177
5  2.325929 0.8640819 0.9399856
6  2.534413 0.8480397 0.9515329
7  2.704357 0.8332053 0.9593688
8  2.847201 0.8198311 0.9650305
9  2.970026 0.8078343 0.9693107
10 3.077505 0.7970507 0.9726593
11 3.172873 0.7873146 0.9753501
12 3.258455 0.7784783 0.9775594
13 3.335980 0.7704162 0.9794056
14 3.406763 0.7630231 0.9809714
15 3.471827 0.7562114 0.9823162
16 3.531983 0.7499081 0.9834835
17 3.587884 0.7440518 0.9845064
18 3.640064 0.7385908 0.9854100
19 3.688963 0.7334815 0.9862141
20 3.734949 0.7286908 0.9869343
21 3.778336 0.7241733 0.9875829
22 3.819385 0.7199148 0.9881703
23 3.858323 0.7158868 0.9887045
24 3.895348 0.7120682 0.9891927
25 3.930629 0.7084408 0.9896404
```

- Ajuste no cálculo de d_3 para correção na tabela

```
d3.corr<-function (n)
            {
                d2 <- d2(n)
                e <- vector()
                for (i in 1:length(n)) {
                    int <- integrate(function(w) {
                                w * (1 - ptukey(w, n[i], Inf))
                                }, 0, Inf)
                    e <- append(e, sqrt(2 * int[[1]] - (d2[i])^2))
                }
                return(e)
            }

    tabela.corrigida<- function (n)
                {
                    n <- 2:n
                    u <- matrix(c(d2(n), d3.corr(n), c4(n)),
                                max(n)- 1, 3, byrow = FALSE)
                    colnames(u) <- c("d2", "d3", "c4")
                    rownames(u) <- n
                    return(u)
                }
```

Amplitude e Desvio Padrão Amostrais

√ Antes do advento do computador, a utilização da amplitude para estimar σ era popular pela facilidade de cálculo

√ Em geral o estimador baseado em S é preferível

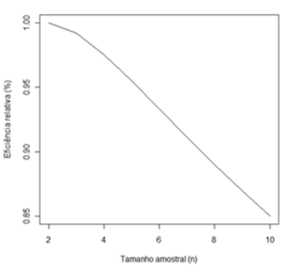
√ Se o tamanho da amostra é relativamente pequeno, o método da amplitude funciona bastante bem

- Eficiência relativa de R comparada com S

$$
\begin{aligned}
e_\sigma(\hat\sigma_S, \hat\sigma_R) &= \frac{\mathrm{EQM}(\hat\sigma_S)}{\mathrm{EQM}(\hat\sigma_R)} \\
&= \frac{\mathrm{bias}(\hat\sigma_S)^2 + \mathrm{Var}(\hat\sigma_S)}{\mathrm{bias}(\hat\sigma_R)^2 + \mathrm{Var}(\hat\sigma_R)} \\
&= \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{\bar S}{c_4}\right)}{\mathrm{Var}\left(\frac{\bar R}{d_2}\right)} = \frac{\frac{(1-c_4^2)}{c_4^2}\sigma^2}{\frac{d_3^2}{d_2^2}\sigma^2} \\
e_\sigma(\hat\sigma_S, \hat\sigma_R) &= \frac{(1-c_4^2)\, d_2^2}{c_4^2\, d_3^2}
\end{aligned}
$$

- $e_\sigma(\hat\sigma_S, \hat\sigma_R) \;=\; \dfrac{[1-c_4(n)^2]\, d_2(n)^2}{c_4(n)^2\, d_3(n)^2}$ depende de *n*:

Tamanho Amostral (n)	Eficiência Relativa
2	1,000000
3	0,991860
4	0,975189
5	0,954761
6	0,933035
7	0,911231
8	0,889948
9	0,869463
10	0,849897



- Comentários:
  - √ Para valores moderados de n ($n \geq 10$), o método da amplitude perde eficiência rapidamente
    - – ignora toda a informação da amostra compreendida entre máximo e mínimo
  - √ Para valores pequenos de n ($n \leq 6$) ele funciona satisfatoriamente

Simulações

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Simulação de Processo sob Controle:
  - √ Distribuição: X ~ N(1000, 4)
  - √ m = 8 – quantidade de subgrupos
  - √ n = 5 – tamanho do subgrupo

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		*999,8*	*9,2*	*3,9*

Estimador S_A

- Considera uma única amostra de *mn* elementos

$$S_A = \frac{1}{c_4}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\bar{\bar{X}})^2}{mn-1}}$$

√ x_{ij}: *j*-ésimo elemento do *i*-ésimo subgrupo
√ *n*: tamanho do subgrupo
√ *m*: número de subgrupos
√ média global: $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\bar{X}_i}{m}$
√ c_4: correção de vício
depende de *mn*

√ Estimativa de S_A : X_{ij} ~ N(1.000, 4)

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
s = 4,0657				Médias		999,8	9,2	3,9

$$S_A = \frac{1}{c_4}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\bar{\bar{X}})^2}{mn-1}}$$

$$S_A = \frac{1}{c_4(40)}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{5}(X_{ij}-999,8)^2}{8(5)-1}} = \frac{4,0657}{0,9936} = 4,09$$

Estimador S_B

- Considera desvio-padrão das médias dos *m* subgrupos

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_i-\bar{\bar{X}})^2}{m-1}}\right]\sqrt{n}$$

√ $\sigma = \sigma_{\bar{X}}\sqrt{n}$
√ **[.]**: estimador de $\sigma_{\bar{X}}$
√ c_4: correção de vício
depende de *m*

√ Estimativa de S_B

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		*999,8*	*9,2*	*3,9*

s = 1,8208

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m-1}}\right]\sqrt{n}$$

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4(8)}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(\bar{X}_i - 999,8)^2}{8-1}}\right]\sqrt{5} = \frac{1,8208}{0,96503}\sqrt{5} = 4,22$$

Estimador S_C

- Considera o desvio-padrão dos *m* subgrupos

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

√ $$\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

√ c_4: correção de vício
 depende de *n*

√ $\bar{S}$ é mais preciso que S_i para estimar $c_4\sigma$
 variância *m* vezes menor

√ Estimativa de S_C

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		*999,8*	*9,2*	*3,9*

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4(5)} = \frac{3,880}{0,9399} = 4,13$$

$$\bar{S} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

Estimador S_D

- Considera a amplitude amostral R

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

√ $\bar{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i$

√ R_i: amplitude amostral do *i*-ésimo subgrupo

√ d_2: correção de vício
depende de *n*

√ Estimativa de S_D

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		999,8	$\boxed{9,2}$	3,9

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i$$

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{9,2}{2,32593} = 3,94$$

√ Estimação Variabilidade do Processo (σ_0) – Resumo

Variabilidade entre amostras				Variabilidade dentro Amostras			
S_A =	4,0918462	S_B =	4,21896	S_C =	4,12796	S_D =	3,93929
s_{global} =	4,066	$s_{médias}$ =	1,8208	s_{barra} =	3,880	R_{barra} =	9,2
c4(40) =	0,99361	c4(8) =	0,96503	c4(5) =	0,93999	d2(5) =	2,32593
m x n =	40	m =	8		n =	5	

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X_bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		999,8	9,2	3,9

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Simulação de Processo com Influência de Causa Especial
  - √ X ~ N(1000,4) para i ≠ 2 e X ~ N(1010,4) para i=2
  - √ m=8
  - √ n = 5

- Estimação Variabilidade do Processo (σ_0)

	Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	X _bar	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	**1008,2**	**1009,3**	**1010,8**	**1008,4**	**1010,8**	**1009,5**	**2,6**	**1,3**
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		*1001,2*	*8,7*	*3,7*

Variabilidade entre amostras		Variabilidade dentro Amostras	
S_A = 5,1136338	S_B = 8,70713	S_C = 3,98076	S_D = 3,75656
s_{global} = 5,081	$s_{médias}$ = 3,75778	s_{barra} = 3,742	R_{barra} = 8,7
c4(40) = 0,99361	c4(8) = 0,96503	c4(5) = 0,93999	d2(5) = 2,32593
m x n = 40	m = 8	n =5	

Simulações – Comparação

	Causa Especial		Comentários
	isento	com	
S_A	4,1	5,1	Afetados pela causa especial
S_B	4,2	8,7	(superestimam σ_0)
S_C	4,1	4,0	Não afetados pela causa especial
S_D	3,9	3,8	Mais robustos a desajustes da média

Comentários

- S_A e S_B são muito afetados por deslocamentos da média
  - √ S_A: baseado na dispersão de todos os pontos
  - √ S_B: baseado nas diferenças entre médias amostrais
- S_C e S_D são insensíveis a causas especiais que altera, a média do processo
  - √ Baseiam-se apenas na dispersão **dentro** das amostras

- Para subgrupos grandes ($n \geq 10$)
  - √ S_C usa mais informações que S_D (apenas duas)
  - √ S_C é mais eficiente que S_D
- Para subgrupos pequenos ($n < 10$)
  - √ S_D é praticamente tão preciso quanto S_C
- S_D será adotado como estimador de σ por ser robusto a alterações na média e por simplicidade de cálculo
  - √ Estimador mais usado em CEP

Referências

Bibliografia Recomendada

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade,* 4ª. edição. LTC, 2004
- MITTAG, H.-J. e RINNE, H. *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapmann & Hall, 1993.