

## Gráfico de Controle por Atributos

---

---

---

---

---

---

---

---

## Roteiro

1. Gráfico de  $np$
2. Gráfico de  $p$
3. Gráfico de  $C$
4. Gráfico de  $u$
5. Referências

---

---

---

---

---

---

---

---

## Gráficos de Controle por Atributos

- São usados em processos que:
  - √ Produz itens defeituosos mesmo em controle
  - √ Produz itens com pequenos defeitos que podem ser sanados
  - √ Produz itens com alguns pequenos defeitos que não inutilizam o todo
- São muito usados em controle de qualidade de serviços

---

---

---

---

---

---

---

---

### Principais Gráficos de Atributos

- Gráfico de controle do número de defeituosos ( $np$ )
- Gráfico de controle da fração defeituosa ( $p$ )
- Gráfico de controle do número de não-conformidades na amostra ( $C$ )
- Gráfico de controle do número médio de não-conformidades na amostra ( $u$ )

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de $np$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Monitoramento de qualidade de serviço em um restaurante
  - √ Características da qualidade de interesse:
    - Comida
    - Atendimento
    - Limpeza
  - √ Pesquisa diária com 200 clientes sobre o grau de satisfação (Bom/Ruim)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de np

- Monitora a quantidade de itens considerados não conformes em uma amostra de tamanho fixo ( $n$ )
- Situação geral:
  - √ Cada item pode ter várias características de qualidade que são examinadas simultaneamente
  - √ Item é classificado como defeituoso caso ele satisfaça o padrão de qualidade em uma ou mais dessas características

---

---

---

---

---

---

---

---

### Monitoramento do Processo – Fase 1

- Estimador de  $p$  (desconhecido) :

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn}$$

- √  $\hat{p}$ : estimativa da probabilidade de defeituosos ( $p$ )
- √  $D_i$ : quantidade de defeituosos da  $i$ -ésima amostra
- √  $m$ : quantidade de amostras
- √  $n$ : tamanho da amostra
- Se  $m$  é grande ( $m \geq 30$ ) então, com alta probabilidade,  $\hat{p}$  estará próximo de  $p$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

- Restaurante – Construção do Gráfico np

√ Banco de dados: *BD\_CQI.xls/ guia: comida*

Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação	Dia	Insatisfação
1	2	11	2	21	0
2	0	12	2	22	2
3	2	13	1	23	3
4	0	14	2	24	0
5	5	15	4	25	0
6	4	16	1	26	2
7	3	17	5	27	2
8	0	18	3	28	1
9	0	19	3	29	3
10	3	20	4	30	1
	19		27		14

Insatisfação total = 60  
Clientes pesquisados= 6000

√ Estimação do Parâmetro:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{60}{(30)(200)} = 0,01$$

Número esperado de insatisfação  
 $np = (200)(0,01) = 2,0$  (p/dia)

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção do Gráfico $np$

- $D_i$ : Quantidade de defeituosos na amostra  $i$
- $D_i \sim \text{binomial}(n, p)$ 
  - √  $p$ : fração de defeituosos do processo durante coleta amostra  $i$
  - √ Os resultados devem ser independentes (Restaurante: opinião de um cliente não pode interferir na opinião de outro)
  - √ Parâmetros de  $D_i$ :
 
$$\mu_D = np$$

$$\sigma_D^2 = np(1 - p)$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $np$

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):

$$LSC_{np} = np_0 + 3\sqrt{np_0(1-p)}$$

$$LM_{np} = np_0$$

$$LIC_{np} = np_0 - 3\sqrt{np_0(1-p)}$$

- √  $p_0$ : valor de  $p$  para processo sob controle
  - pode ser valor padrão especificado pela gerência
  - se for desconhecido, adota-se  $\hat{p}$

- Se  $LIC_{np} < 0$ , adota-se  $LIC_{np} = 0$

---

---

---

---

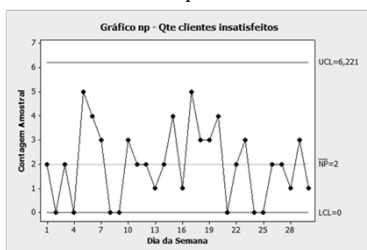
---

---

---

---

- Restaurante – Gráfico de  $np$ :



- Estimativas ( $\hat{p}_0 = 0,01$ )

$$LSC_{np} = n\hat{p}_0 + 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) + 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = 6,221$$

$$LM_{np} = n\hat{p}_0 = 200(0,01) = 2,000$$

$$LIC_{np} = n\hat{p}_0 - 3\sqrt{n\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)} = 200(0,01) - 3\sqrt{200(0,01)(1-0,01)} = -2,221$$

$$LIC_{np} = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Comentários:**

- √ O processo está em estado de controle estatístico
  - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
- √ Se mais de 6 clientes mostrarem-se insatisfeitos com a comida, deve-se buscar causas especiais

---

---

---

---

---

---

---

---

**Análise de Desempenho de Gráficos *np***

- Hipóteses associadas;
  - √  $H_0: p = p_0$  vs.  $p \neq p_0$
- Comentários:
  - √ Identificação de causas especiais para eliminação
    - Hipótese unilateral
  - √ Identificação de causas especiais benéficas:
    - Hipótese bilateral

---

---

---

---

---

---

---

---

**Riscos**

$$\alpha = 1 - P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} \mid p = p_0\}$$
$$\beta = P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} \mid p = p_1\}$$

- √ Limites  $3\sigma$  são demasiados estreitos
  - Alarmes falsos com frequência maior que a 'nominal' ( $\alpha = 0,0027$ )

---

---

---

---

---

---

---

---

- Cálculo de probabilidades para o gráfico de  $np$ 
  - √ Probabilidades calculadas pela binomial
  - √ Podem ser aproximadas pela Poisson ( $p \leq 0,10$  e  $n \geq 50$ ).
  - √ Função de distribuição acumulada da Poisson (Tabela C)

$$P\{D \leq d | \lambda\} = \sum_{x=1}^d \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- Exemplo de cálculo de  $\alpha$  e  $\beta$ 
  - √  $LSC = 3,98$  e  $n = 100$  (para  $p_0 = 0,01$ ):  
 $\alpha = 1 - P\{D \leq 3 | \lambda = 1\} = 1 - 0,9810 = 0,019$   
 $CMS_0 = 52,6$
  - √ Nessa situação, para  $p_1 = 0,02$

$$\beta = P\{D \leq 3 | \lambda = 2\} = 0,857$$

- √ Toma-se  $LSC = 4,50$  para reduzir  $\alpha$ 
  - $\alpha = 1 - P\{D \leq 4 | \lambda = 1\}$   
 $= 1 - 0,963 = 0,0037$
  - $CMS_0 = 270,27$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $np$ – Análise de Sensibilidade

$$\alpha = 1 - P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} | p = p_0\}$$

$$\beta = P\{LIC_{np} \leq D \leq LSC_{np} | p = p_1\}$$

Valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para  $n = 100$  e  $LSC = 3,98$

$p$	Exata	Aproximação pela Poisson			
	$P\{D \leq 3\}$	$\lambda = np$	$P\{D \leq 3\}$	$\alpha$	$\beta$
0,01	0,9816	1	0,9810	0,019	
0,02	0,8590	2	0,8571		0,857
0,03	0,6472	3	0,6472		0,647
0,05	0,2578	5	0,2650		0,265
0,10	0,0078	10	0,0103		0,010

---

---

---

---

---

---

---

---

Comparação de planejamentos								
p	n = 100 e LSC = 4,50				n = 200 e LSC = 6,20			
	$\lambda=np$	$P\{D \leq 4\}$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda=np$	$P\{D \leq 6\}$	$\alpha$	$\beta$
0,01	1	0,996	<b>0,004</b>		2	0,995	<b>0,005</b>	
0,02	2	0,947		0,947	4	0,889		0,889
0,03	3	0,815		<b>0,815</b>	6	0,606		0,606
0,05	5	0,440		0,440	10	0,130		0,130
0,10	10	0,029			20	0		0

n = 100 e LSC = 3,98				
p	$\lambda = np$	$P\{D \leq 3\}$	$\alpha$	$\beta$
0,01	1	0,9810	<b>0,019</b>	
0,02	2	0,8571		0,857
0,03	3	0,6472		<b>0,647</b>
0,05	5	0,2650		0,265

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Determinação gráfico  $np$  para  $\alpha$  e  $\beta$  fixos:

√ Supondo-se LIC = 0

$$1 - \alpha = 1 - P\{D \leq LSC \mid p = p_0\}$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{j} p_0^j (1 - p_0)^{n-j}$$

$$\beta = P\{D \leq LSC \mid p = p_1\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\lfloor LSC \rfloor} \binom{n}{j} p_1^j (1 - p_1)^{n-j}$$

√ Para  $\alpha$  e  $\beta$  não exceder valores especificados:

- Utilizar  $n$  e  $LSC$  que satisfaçam as duas equações
- Solução não é trivial

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Roteiro para solução analítica:

√ (pela função de distribuição acumulada da Poisson)

√ Dados  $\alpha$  e  $\beta$ :

- Escolher um valor inicial para  $d$  ( $d_0$ );
- Procurar  $p_{ac}^0$ , tal que  $p_{ac}^0 \geq 1 - \alpha$  e ler o valor de  $\lambda$  correspondente ( $\lambda_0$ );
- Calcular  $n = \frac{\lambda_0}{p_0}$ ;
- Calcular  $\lambda_1 = np_1$ ;
- Procurar  $p_{ac}^1$  para  $\lambda_1$  e  $d_0$ ;
- Se  $p_{ac}^1 = \beta$  ou pouco menor, a solução foi encontrada;
- Se  $p_{ac}^1 > \beta$ , aumente  $d_0$  e reinicie;
- Se  $p_{ac}^1 < \beta$ , diminua  $d_0$  e reinicie.
- Encontrada a solução, usar  $LSC = d_0 + 0,5$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- √ Este algoritmo nem sempre leva a uma solução ótima
- √ Leva a uma boa solução!
  - LSC da solução ótima
  - $n$  um pouco maior que o da solução ótima

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Determinação parâmetros de planejamento de gráfico de controle de  $np$  ( $\alpha$  e  $\beta$  especificados):

√  $p_0 = 0,01$ ;  $\alpha \leq 0,002$  e  $p_1 = 0,05$ ;  $\alpha \leq 0,50$

√ Escolhido  $d_0 = 3$

$$n = \frac{\lambda_0}{P_0} \quad \alpha_i = P\{D \leq d_i | \lambda = \lambda_0\}$$

$$\beta_i = P\{D \leq d_i | \lambda = \lambda_1\}$$

Aproximação pela Poisson						
$d$	$P_{ac}^0(=\alpha)$	$\lambda_0$	$n$	$\lambda_1=np$	$P_{ac}^1(=\beta)$	Status
3	0,9982	0,50	50	2,50	0,7578	>0,5
4	0,9982	0,85	85	4,25	0,5801	>0,5
5	0,9985	1,20	120	6,00	0,4457	Solução

√ Solução: LSC = 5,5 e  $n = 120$

---

---

---

---

---

---

---

---

- Uso de planilha Excel para busca de boa solução:

√  $n = 50$

Determinação Parâmetros do Gráfico de $np$										
Entradas	$p_0 =$	0,01	$p_1 =$	0,05						
	alpha =	0,002	beta =	0,5						
$n =$	50									
$d =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alfa =	-	-	-	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
beta =	0,077	0,279	-	-	-	-	-	-	-	-

√  $n = 120$

Determinação Parâmetros do Gráfico de $np$										
Entradas	$p_0 =$	0,01	$p_1 =$	0,05						
	alpha =	0,002	beta =	0,5						
$n =$	120									
$d =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alfa =	-	-	-	-	-	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
beta =	0,002	0,016	0,058	0,144	0,278	0,442	-	-	-	-

---

---

---

---

---

---

---

---



- Refinando a busca de uma boa solução:

√  $n = 114$  (proximidades de 120)

Determinação Parâmetros do Gráfico de $np$										
Entradas	$p_0 =$	0,01	$p_1 =$	0,05						
	alpha =	0,002	beta =	0,5						
	$n =$	114								
	$\sigma =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	alfa =	-	-	-	-	-	0,001	0,000	0,000	0,000
	beta =	0,002	0,020	0,072	0,173	0,321	0,492	-	-	-

√ Comparação com solução dada pro algoritmo:

- Mesmo limite ( $LSC = 5$ )
- Tamanho amostral um pouco menor ( $n = 114$ )

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de $p$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $p$

- Característica da qualidade de interesse:
  - √ Proporção de itens defeituosos produzidos pelo processo (fração não-conforme)
  - √ Fração não conforme da amostra  $i$ :  $D_i/n_i$

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):

$$LSC_p = p_0 + 3\sqrt{\frac{p_0(1-p)}{n}}$$

$$LM_p = p_0$$

$$LIC_p = p_0 - 3\sqrt{\frac{p_0(1-p)}{n}}$$

√ Dividir por  $n$  os limites de controle do gráfico  $np$

---

---

---

---

---

---

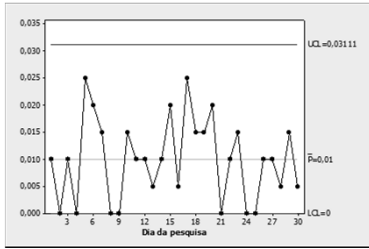
---

---

---

---

- Restaurante - Gráfico de  $p$ :



- Estimativa dos limites para padrão desconhecido ( $\hat{p}_0 = 0,01$ )

$$LSC_p = \hat{p}_0 + 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 + 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,031$$

$$LM_p = \hat{p}_0 = 0,01$$

$$LIC_p = \hat{p}_0 - 3\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n}} = 0,01 - 3\sqrt{\frac{(0,01)(1-0,01)}{200}} = 0,011$$

$$LIC_p = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Comentários:

- ✓ O processo está em estado de controle estatístico
  - Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média
- ✓ Se a proporção de clientes insatisfeitos com a comida for maior que 0,031, deve-se buscar causas especiais

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de $np$ & Gráfico de $p$

- Para um mesmo valor de  $n$ , o gráfico de  $p$  equivale ao gráfico de  $np$ 
  - ✓ Diferem apenas na escala do eixo vertical
- $LM_p$  indica diretamente o nível de qualidade do processo
- Opta-se pelo gráfico de  $p$  quando o tamanho da amostra não pode ser mantido constante

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Varição do Tamanho Amostral

- Quando  $n$  varia, o gráfico apresentará vários limites de controle
- Se a variação for pequena, pode-se adotar os limites na maior amostra
  - √ Sempre que um ponto cair na região de ação do gráfico, compara-se seu valor com o limite exato
  - √ (considerar tamanho da amostra que gerou o ponto)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Estimador de  $p_0$  (desconhecido)

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

- √  $n_i$ : tamanho da  $i$ -ésima amostra
- √  $D_i$ : quantidade de defeituosos da  $i$ -ésima amostra

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Processo que quando isento de causa especial produz 5% de defeituosos
  - √ Amostras de tamanhos variáveis
  - √ Limite de controle superior:  $LSC_p = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{n}}$
  - √ Cálculos limites de controle:

Amostra	n	p <sub>0</sub> = 0,05		LIC <sub>p</sub>	LSC <sub>p</sub>
		D <sub>i</sub>	p <sub>i</sub>		
1	200	8	0,0400	0,0038	0,0962
2	240	13	0,0542	0,0078	0,0922
3	220	8	0,0364	0,0059	0,0941
4	240	12	0,0500	0,0078	0,0922
5	200	19	0,0950	0,0038	0,0962

---

---

---

---

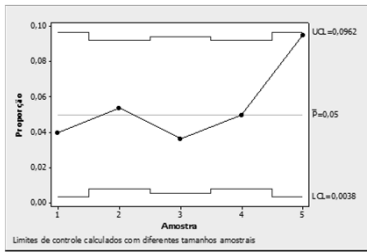
---

---

---

---

- Gráfico  $p$  com limites variáveis




---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráficos de $p$ – Tamanho Amostral Variável

- Pode-se construir o gráfico  $p$  com base na maior amostra  
 $\checkmark n = 240$
- A abertura do gráfico é conservativa
- Caso haja sinal de alarme  
 $\checkmark$  Comparar o valor de  $\hat{p}_i$  com os limites de controle exatos

---

---

---

---

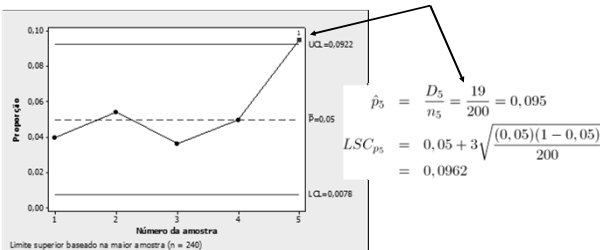
---

---

---

---

- Gráfico de  $p$  com limite superior fixo:



$$\hat{p}_5 = \frac{D_5}{n_5} = \frac{19}{200} = 0,095$$

$$LSC_{p_5} = 0,05 + 3\sqrt{\frac{(0,05)(1-0,05)}{200}}$$

$$= 0,0962$$

$\checkmark$  Não se confirma o alarme pois  $\hat{p}_5 < LSC_{p_5}$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de C

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de C

- Também conhecido como gráfico do número de não-conformidades (ou de defeitos)
  - √ Mostra o número de não conformidades na amostra
  - √ Produtos com muitos componentes
    - Número de não-conformidades para monitorar o processo (medida de qualidade é a frequência média de defeitos)

---

---

---

---

---

---

---

---

- Unidade de inspeção:
  - √ Quantidade básica de produto em que a frequência de defeitos é expressa
- Tamanho amostral  $n$  não é necessariamente inteiro
  - √ Condicionado ao custo, poder desejado, etc.
- Processo sob controle
  - √ Espera-se que as não-conformidades ocorram de maneira aleatória e com baixa frequência

---

---

---

---

---

---

---

---

### Modelo Probabilístico

C: Qte. de não-conformidades por unidade de inspeção

√ Espera-se que  $C \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$\lambda$ : média de não-conformidades por amostra

$$\Pr\{C = x\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

√ Suposições:

- independência na ocorrência de não-conformidades
- evento raro associado à não-conformidade com uma infinidade de chances de ocorrências

√ Parâmetros de C:

$$\mu_C = \sigma_C^2 = \lambda$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de C

• Limites de Controle  $3\sigma$  (exato):

$$LSC_C = \lambda_0 + 3\sqrt{\lambda_0}$$

$$LM_C = \lambda_0$$

$$LIC_C = \lambda_0 - 3\sqrt{\lambda_0}$$

√  $\lambda_0$ : média de não-conformidades por amostra com o processo sob controle

---

---

---

---

---

---

---

---

• Quantidades amostrais:

√  $u$ : número médio de não-conformidades por unidade de inspeção

√  $n$ : quantidade de unidades de inspeção na amostra

√  $\lambda$ : média de não-conformidades por amostra

$$\lambda = n u$$

• Estimativa de  $\lambda_0$  (desconhecido)

√  $\bar{u}$  estima  $u_0$  e  $\bar{C} = n \bar{u}$  estima  $\lambda_0$ , já que  $\lambda_0 = n u_0$

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{mn}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

- Limites de Controle  $3\sigma$  (estimados)

$$LSC_C = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}}$$

$$LM_C = \bar{C}$$

$$LIC_C = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo – Produção de Geladeiras

- Não-conformidades em 40 amostras de 5 geladeiras

√ Banco: *BD\_CQL.xls/guia: geladeiras*

Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$	Amostra	$C_i$
1	2	11	5	21	1	31	5
2	4	12	4	22	5	32	1
3	2	13	2	23	2	33	2
4	0	14	4	24	6	34	1
5	3	15	5	25	3	35	6
6	1	16	1	26	2	36	2
7	2	17	1	27	3	37	1
8	4	18	1	28	0	38	2
9	2	19	1	29	3	39	4
10	2	20	3	30	1	40	1

√ unidade inspeção: 1 geladeira

√ Tamanho amostra:  $n = 5$

√ Quantidade de amostras:  $m = 40$

---

---

---

---

---

---

---

---

- Geladeiras – Estimação Parâmetros

√ Quantidade de defeitos em 40 amostras ( $m = 40$ )

$$\sum_{i=1}^{40} C_i = 100$$

√  $\bar{u}$ : número médio de não-conformidades por unidade de inspeção (por geladeira)

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^{40} C_i}{(40)(5)} = \frac{100}{200} = 0,5$$

√  $\bar{c}$ : número médio de não-conformidades por amostra (por 5 geladeiras)

$$\bar{c} = n\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{m} = \frac{200}{40} = 2,5$$

---

---

---

---

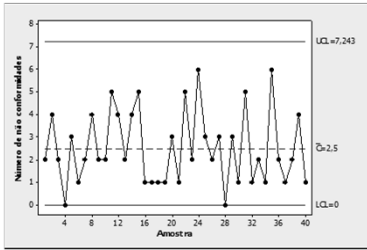
---

---

---

---

- Geladeiras – Gráfico de Controle de C:



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_C = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 + 3\sqrt{2,5} = 7,243$$

$$LM_C = \bar{C} = 2,5$$

$$LIC_C = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 2,5 - 3\sqrt{2,5} = -2,243$$

$$LIC_C = 0$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Comentários:

✓ O processo está em estado de controle estatístico

- Todos os pontos estão dentro dos limites de controle, com um comportamento aleatório em torno da média

✓ Hipóteses:

- $H_0: u = 0,5$  vs.  $H_1: u \neq 0,5$   
para  $n = 5$ ,  $LSC_C = 7,24$

✓ Distribuição admitida para as não-conformidades:

- $C_i \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$ , com  $\lambda_0 = 5 \times 0,5 = 2,5$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Gráfico de Controle de $u$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



### Gráfico de Controle de $u$

- Gráfico do número de não-conformidades por unidade de inspeção
  - √ Também usado para amostras de tamanho variável
- Pontos do gráfico ( $u_i$ ):  $u_i = \frac{C_i}{n_i}$
- Parâmetros da distribuição de  $U_i$  (sob controle)

$$E(U_i) = E\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = u_0$$

$$\text{Var}(U_i) = \text{Var}\left(\frac{C_i}{n_i}\right) = \frac{E\left(\frac{C_i}{n_i}\right)}{n_i}$$

$$\sigma(U_i) = \sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Construção do Gráfico de $u$

- Limites de Controle  $3\sigma$  (exatos):

$$LSC_{u_i} = u_0 + 3\sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$

$$LM_{u_i} = u_0$$

$$LIC_{u_i} = u_0 - 3\sqrt{\frac{u_0}{n_i}}$$

- √  $u_0$ : valor de  $u$  para processo sob controle
  - pode ser valor padrão especificado pela gerência
  - se for desconhecido, adota-se  $\bar{u}$ , estimado com base em  $m$  amostras iniciais de tamanho variável

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

- √  $LM_C$  é fixo e os limites variam de acordo com o tamanho amostral

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Fabricação de PC's:
  - √ Inspeção de produto acabado com 20 amostras de 5 computadores ( $m = 20$  e  $n = 5$ )
  - √ Banco de dados: *BD\_CQI.xls*/guia: *computadores*

Número da amostra	Tamanho da amostra	Qtd. Defeitos por amostra ( $C_i$ )	Média defeitos por unidade ( $u_i$ )
1	5	10	2,00
2	5	12	2,40
3	5	8	1,60
4	5	14	2,80
5	5	10	2,00
6	5	16	3,20
7	5	11	2,20
8	5	7	1,40
9	5	10	2,00
10	5	15	3,00
11	5	9	1,80
12	5	6	1,20
13	5	7	1,40
14	5	11	2,20
15	5	12	2,40
16	5	8	1,60
17	5	9	1,80
18	5	10	2,00
19	5	7	1,40
20	5	6	1,20
Total	100	193	1,93

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{20} C_i}{\sum_{i=1}^{20} n_i} = \frac{193}{100} = 1,93$$

---

---

---

---

---

---

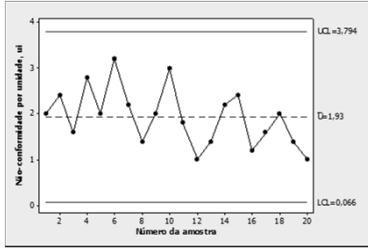
---

---

---

---

- Computadores – Gráfico de Controle de  $u$ :



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_u = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 + 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 3,794$$

$$LM_u = \bar{u} = 1,93$$

$$LIC_u = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} = 1,93 - 3\sqrt{\frac{1,93}{5}} = 0,066$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Amostra de Tamanho Variável – Procedimento

- Coleta de amostras para gráficos de controle para não-conformidades pode ocorrer por meio de inspeção 100% do produto
  - √ Quantidade de unidades de inspeção por amostra poderá ser variável
  - √ Correto seria usar gráfico de controle por unidade ( $u$ )
    - linha central constante
    - limites de controle variando inversamente com  $\sqrt{n_i}$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Exemplo

- Defeitos em Tecido Tingido:
  - √ Inspeção de defeitos a cada 50 m<sup>2</sup>, em 10 rolos de tecido tingido
  - unidade de inspeção: 50 m<sup>2</sup> de tecido;  $m = 10$

Número do rolo	Área do rolo (m <sup>2</sup> )	Qte. Defeitos por amostra (C <sub>i</sub> )	Qte. unidades de inspeção por rolo	Média defeitos por unidade (u <sub>i</sub> )
1	500	14	10,0	1,40
2	400	12	8,0	1,50
3	850	20	13,0	1,54
4	500	11	10,0	1,10
5	475	7	9,5	0,74
6	500	10	10,0	1,00
7	800	21	12,0	1,75
8	525	18	10,5	1,52
9	800	19	12,0	1,58
10	625	23	12,5	1,84
Total	5.375	153	107,5	1,42

Unidade de inspeção: áreas de 50 m<sup>2</sup>

Tamanho da amostra Não é inteiro!

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{10} C_i}{\sum_{i=1}^{10} n_i} = \frac{153}{107,5} = 1,423$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Estimação dos Limites de Controle – Gráfico de  $u$

$$LSC_{u_i} = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

$$LM_{u_i} = \bar{u}$$

$$LIC_{u_i} = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}$$

Rolo (i)	Amostra (n <sub>i</sub> )	Limites	
		Inferior	Superior
1	10,0	0,291	2,555
2	8,0	0,158	2,689
3	13,0	0,431	2,416
4	10,0	0,291	2,555
5	9,5	0,262	2,584
6	10,0	0,291	2,555
7	12,0	0,390	2,456
8	10,5	0,319	2,528
9	12,0	0,390	2,456
10	12,5	0,411	2,436

---

---

---

---

---

---

---

---

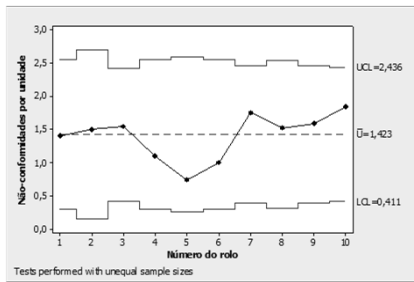
---

---

---

---

• Gráfico de Controle para Não-Conformidade por Unidade – Tamanho Variável da Amostra




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Gráfico de Controle Padronizado**

• Estatística padronizada:

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

• Limites de Controle:

$$LSC_Z = 3$$

$$LM_Z = 0$$

$$LIC_Z = -3$$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

• Tecido – Cálculo do Escore

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}}}$$

Número do rolo	Qte. unidades de inspeção por rolo (n <sub>i</sub> )	Média defeitos por unidade (u <sub>i</sub> )	Desvio-padrão por amostra	Escore z <sub>i</sub>
1	10,0	1,40	0,377	-0,062
2	8,0	1,50	0,422	0,182
3	13,0	1,54	0,331	0,348
4	10,0	1,10	0,377	-0,857
5	9,5	0,74	0,387	-1,773
6	10,0	1,00	0,377	-1,122
7	12,0	1,75	0,344	0,949
8	10,5	1,52	0,368	0,273
9	12,0	1,58	0,344	0,465
10	12,5	1,84	0,337	1,235
<b>Média global:</b>		<b>1,423</b>		

---

---

---

---

---

---

---

---

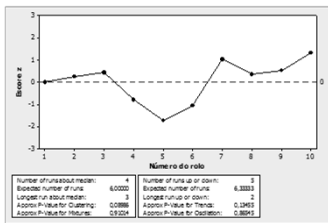
---

---

---

---

• Tecido – Gráfico de Controle Padronizado para Defeitos por unidade



- ✓ É a opção preferida
- ✓ Adequado quando paralelamente são usados testes sequenciais e métodos de reconhecimento de padrão

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Referências

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### **Bibliografia Recomendada**

- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K. e CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas, 2004
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4ª. edição. LTC, 2004
- WERKEMA, M.C.C. *Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento de Processos*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.

---

---

---

---

---

---

---

---