

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de Controle por Variáveis



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Principais Gráficos de Variáveis

- Gráfico de Média \bar{X}
- Gráfico de Amplitude R
- Gráfico de Variância S^2
- Gráfico de Desvio-padrão S



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Construção dos Gráficos de Controle \bar{X} e R



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Monitoramento de Variáveis Contínuas

Quando a característica de qualidade é contínua, é comum usar-se

- Gráfico de Média \bar{X} : monitorar centralidade
- Gráfico de Amplitude R : monitorar dispersão do processo



Gráfico por variáveis

Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a variabilidade” (**Shewhart**);
- Procura-se não intervir equivocadamente em um processo em controle, ou seja, deseja-se que, nestas condições, raramente caia um ponto na região de ação do gráfico (depende da abertura do gráfico);
- Intervenções desnecessárias em geral incorrem em custos.

Gráfico por variáveis

Gráfico de \bar{X} - Limites de Controle

- $LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$
 $LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$
 $LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$
- Sendo:
 $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_X = \mu$
 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Gráfico por variáveis

Parâmetros do Processo em Controle

- Considere
 - μ_0 : média do processo em controle
 - σ_0 : desvio-padrão do processo em controle;
- μ_0 e σ_0 não são conhecidos com precisão absoluta

- Desta maneira:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}$$

Gráfico por variáveis

Escolha da Abertura

- Caso o processo esteja sob controle (estável e ajustado), o intervalo $\pm 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}$ engloba a maioria dos valores de \bar{X} (99,73%).
- Se ocorrer um valor de \bar{X} fora desse intervalo é mais verossímil que a alteração da média do processo μ seja devida a alguma causa especial.

Gráfico por variáveis

Amplitude Amostral

$$R = X_{max} - X_{min}$$

- Se a distribuição de X for normal, com desvio-padrão σ , então a distribuição da amplitude amostral R terá parâmetros:

$$E(R) = \mu_R = d_2\sigma, \text{ e}$$

$$DP(R) = \sigma_R = d_3\sigma$$

- Defina a **amplitude relativa** da amostra, dada por:

$$W = R/\sigma.$$

Temos que: $E(W) = d_2$, e

$$Var(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$$

que dependem do tamanho amostral;

- A Tabela B do Apêndice A fornece a distribuição acumulada da variável aleatória W

Gráfico por variáveis

Valores de d_2 e d_3

n	2	3	4	5	6	7	8
d_2	1,128	1,693	2,059	2,326	2,534	2,704	2,847
d_3	0,853	0,888	0,880	0,864	0,848	0,833	0,820

n	9	10	11	12	13	14	15
d_2	2,970	3,078	3,173	3,258	3,336	3,407	3,472
d_3	0,808	0,797	0,787	0,778	0,770	0,763	0,756

Gráfico por variáveis

Gráfico de R - Limites de Controle

- $LSC_R = d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0$
 $LM_R = d_2\hat{\sigma}_0$
 $LIC_R = d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0$;
- Se $LIC_R < 0$ então adota-se $LIC_R = 0$;
- Quando R for maior que LSC_R soar o alarme que o desvio-padrão do processo aumentou.

Gráfico por variáveis

Estimativas Iniciais do Processo

- Dado um conjunto inicial de m amostras

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{x}}$$

estimativa sensível a causas especiais;

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

estimativa insensível a causas especiais;

- É razoável iniciar a construção dos Gráficos de Controle pelo Gráfico de R , pois, ele pode ser construído com o processo desajustado.

Gráfico por variáveis

Volume de Sacos de Leite

- 25 subgrupos racionais de tamanho 5

Figura: Conjunto de dados para estimativa inicial



Tabela 3.2: Valores de X_{ij} e R_i

	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	R_i
1	1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
2	1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
3	999,1	992,6	1001,1	1001,6	1002,9	10,3
4	1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,5
5	999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	13,0

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \bar{R} / d_2 = 11,0 / 2,326 = 4,729$$

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Diagrama para Estimação

Figura: Estabelecimento de limites para o gráfico



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

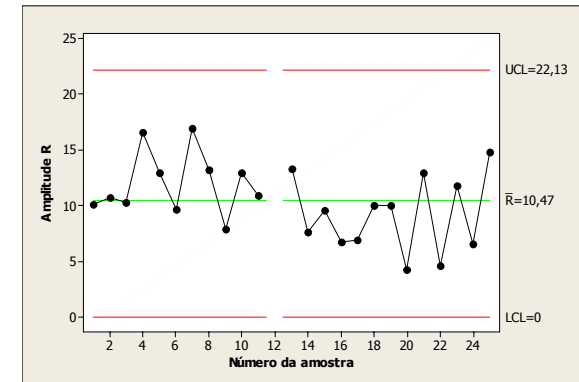
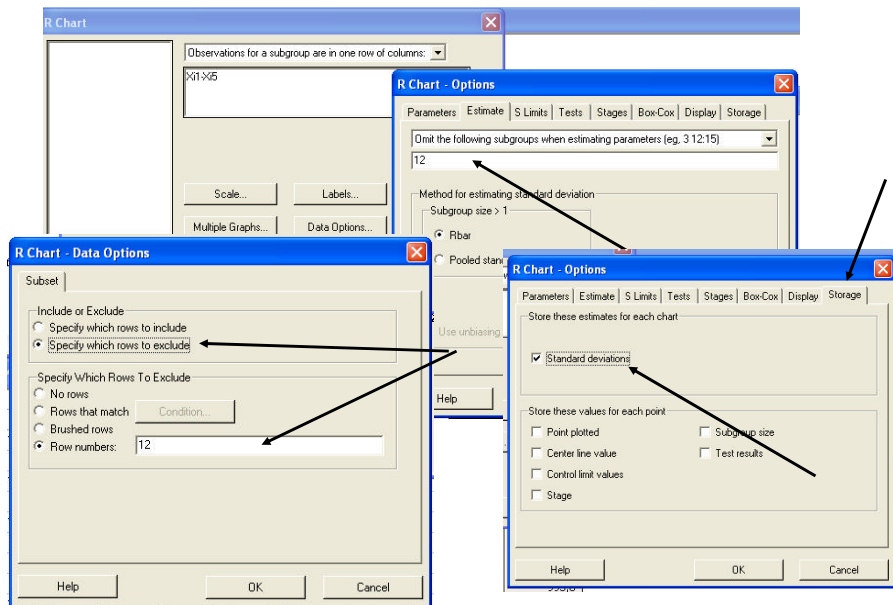
Volume de Sacos de Leite - Retirada de Ponto

- Eliminando-se o 12º subgrupo

Figura: Conjunto de dados sem 12º subgrupo



Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R



$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864) \times 4,500$$

$$LSC_R = 22,13$$

$$LMC_R = 10,467$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864) \times 4,500 = -1,198$$

$$LIC_R = 0$$

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Segunda Estimativa - Conclusões

- A amplitudes dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da linha média. Nenhum excede o LSC ;
- $\frac{\bar{R}}{d_2}$ é estimativa confiável do desvio-padrão do processo
- Estimativa do desvio-padrão do processo sob controle:
 $\sigma_0 = 4,50$



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Construção do Gráfico de \bar{X} - Comentários

- É afetado por causas especiais que alteram a média do processo ou por aquelas que afetam sua dispersão;
- Só pode ser construído quando o processo estiver ajustado e estável (isento de todo tipo de causas especiais);
- Neste caso, a preocupação será apenas com a estimativa da média do processo.



Gráfico por variáveis

Gráfico de \bar{X} - Determinação Limites

- Os limites do gráfico são dados por:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_0/\sqrt{n}$$

- As estimativas dos parâmetros serão dadas por:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$



Gráfico por variáveis

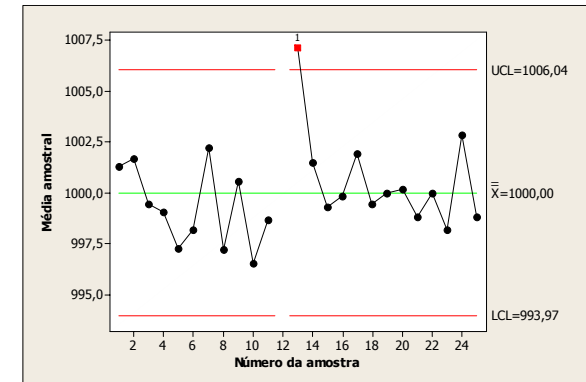
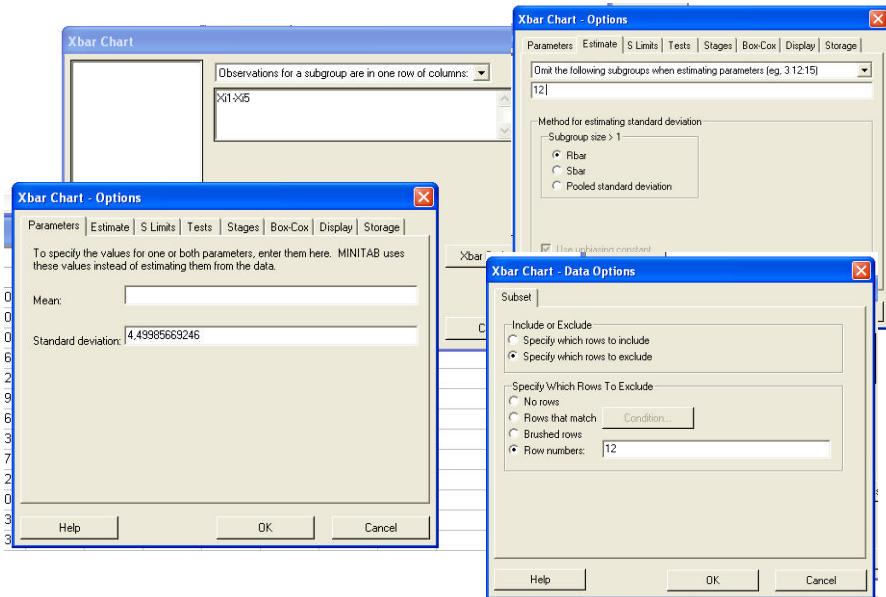
Volume de Sacos de Leite - Gráfico \bar{X}

- $m = 24, n = 5$
 $\bar{\bar{X}} = 1000,0$
 $\hat{\sigma}_0 = 4,50$

Figura: Conjunto de dados sem 12º subgrupo



Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



$$LSC_R = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}}$$

$$LSC_{\bar{x}} = 106,04$$

$$LMC_{\bar{x}} = 1000,00$$

$$LIC_{\bar{x}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}}$$

$$LIC_{\bar{x}} = 993,97$$

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de \bar{X} - Comentários

- O ponto $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$;
- Comentários similares àqueles efetuados para R_{12} ;
- Elimina-se \bar{X}_{13} .



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

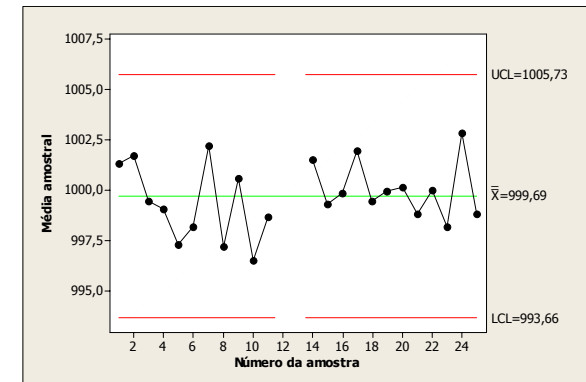
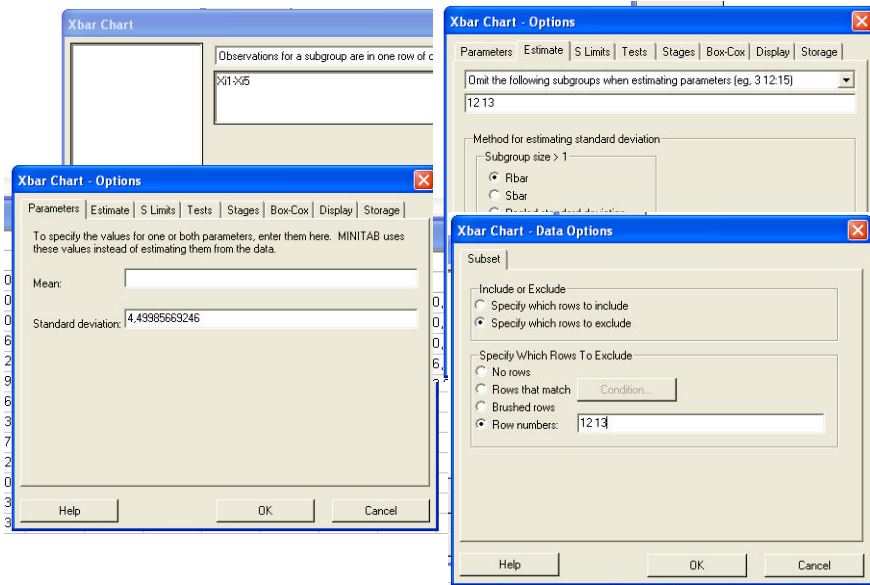
Volume de Sacos de Leite - Gráfico \bar{X} (2)

- $m = 23, n = 5$
 $\bar{\bar{X}} = 999,7$
 $\hat{\sigma}_0 = 4,50$

Figura: Conjunto de dados sem 12^o e 13^o amostras



Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



$$LSC_R = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}}$$

$$LSC_{\bar{x}} = 1005,73$$

$$LMC_{\bar{x}} = 999,69$$

$$LIC_{\bar{x}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}}$$

$$LIC_{\bar{x}} = 993,66$$

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de \bar{X} - Comentários

- As médias dos 23 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média e nenhuma excede os limites de controle.



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Monitoramento do Processo

- A fase de estimação dos parâmetros só deve encerrar-se quando o processo encontrar-se ajustado e estável
- Na fase de monitoramento do processo, os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra mudanças permanentes;
- Durante o monitoramento do processo, basta um valor de \bar{X} ou de R estar na zona de ação dos gráficos para decidir-se pela intervenção no processo (detecção e eliminação de causa especial).



Gráfico por variáveis

Desempenho dos Gráficos de Controle

Capacidade de detectar perturbações no processo

É importante para:

- Determinação do Plano de Amostragem (tamanho amostral e intervalo entre amostras)
- Estabelecimento dos Limites de Controle

Fundamentos de CEP

Teste de Hipóteses

		Decisão	
		Aceitar H_0	Rejeitar H_0
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I α
F	Erro Tipo II	β	Decisão Correta $1 - \beta$

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Teste de Hipóteses do Gráfico de \bar{X}

- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- H_0 :
Processo em controle
Processo ajustado
Processo centrado no valor-alvo
Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita H_0 toda vez em que \bar{X} cai dentro dos limites de controle



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Erros de Decisão

- **ALARME FALSO** (Erro tipo I):
considerar erroneamente o processo fora de controle
conseqüência: intervir na hora errada
- **NÃO DETECÇÃO** (Erro tipo II)
considerar erroneamente o processo em controle
conseqüência: não intervir na hora certa



Gráfico por variáveis

Medidas de Desempenho

Supondo-se que as causas especiais não alterem σ

- α : $P\{\text{Erro tipo I}\}$

$$\alpha = P(\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0)$$

- β : $P\{\text{Erro tipo II}\}$

$$\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$$

- Poder do Gráfico de Controle (P_d)

$$P_d = 1 - \beta$$

3.2.1 Gráfico de Controle de \bar{X}

$$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}; \sigma_{\bar{X}}) \sim N(\mu_0; \sigma_0 / \sqrt{n})$$

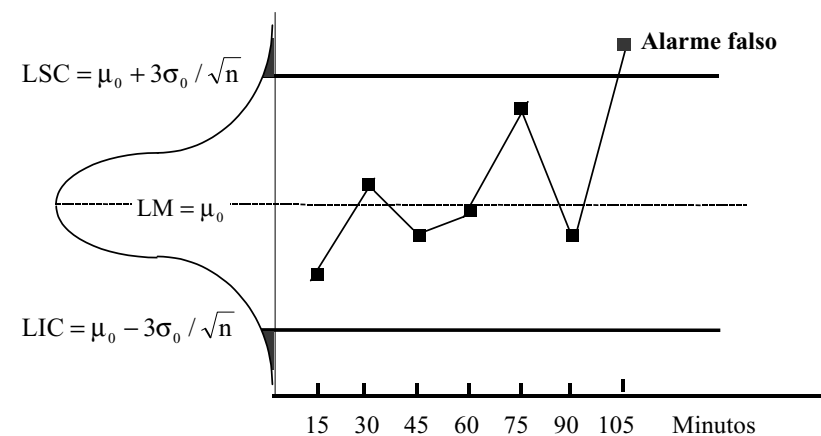


Figura 3.7: Gráfico de \bar{X} – ocorrência de um alarme falso

Gráfico por variáveis

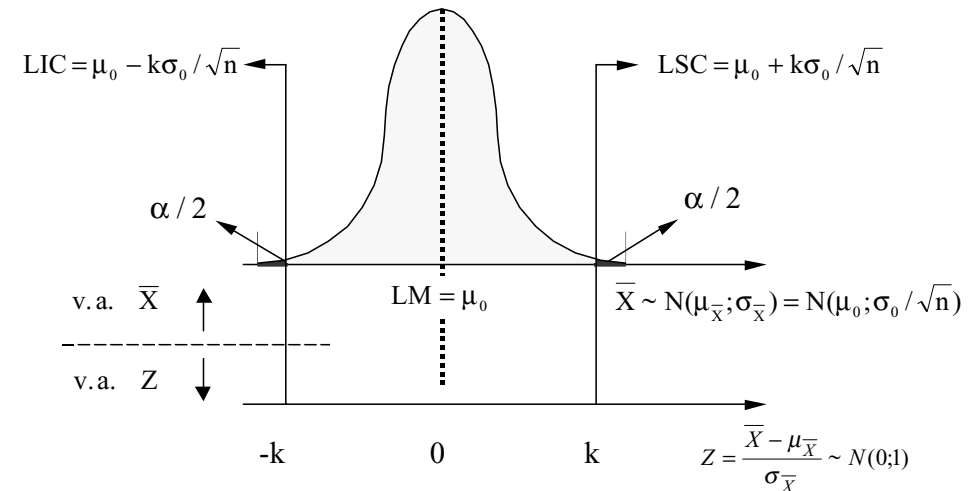
Alarme Falso no Gráfico de \bar{X}

- Para uma grande variedade de distribuições, \bar{X} tenderá para uma Normal mesmo para n pequeno
- Se o processo estiver em controle (desempenho 3σ):

$$\begin{aligned}\alpha &= P\left\{Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= P\{|Z| > 3\} \\ &= 0,0027\end{aligned}$$

- Ocorrência de alarme falso

Figura: 3.9 - Determinação do risco de alarme falso



Tradicionalmente $k=3,00$

Figura 3.9: Determinação do Risco de Alarme Falso

$$\alpha = Pr[|Z| < k] \quad (3.53)$$

Gráfico por variáveis

Alarme Falso no Gráfico de \bar{X} (2)

- L : Qte de amostras antes de um alarme falso
- $L \sim \text{geometrica}(\alpha)$

$$P\{L = d\} = \alpha(1 - \alpha)^{d-1}, \quad d = 1, 2, \dots$$

- $NMAF$: número médio de amostras antes de alarme falso
 $NMAF = E(L) = \frac{1}{\alpha}$
- Para limites 3σ , $E(L) = 370, 4$.

Gráfico por variáveis

Alarme Falso no Gráfico de \bar{X} (3)

- Seja a semi-amplitude da região de controle, dada por:

$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

- Caso se deseje diminuir a freqüência de alarmes falsos, deve-se adotar $k > 3$
- Exemplo: Para $k = 3, 10$
 - Risco de alarme falso: $\alpha = 0, 0019$
 - Tempo médio entre alarmes: $516, 7 \times h$
- Generalizando,

$$\alpha = P\{|Z| > k\}$$

3.2.1 Gráfico de Controle de \bar{X}

$$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}; \sigma_{\bar{X}}) \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0; \sigma_0 / \sqrt{n})$$

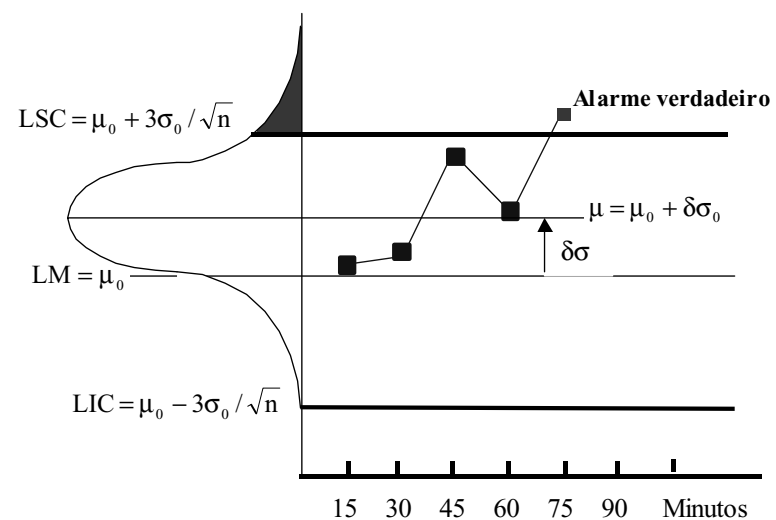


Figura 3.10: Gráfico de \bar{X} – ocorrência de um alarme verdadeiro

Gráfico por variáveis

Poder do Gráfico de \bar{X}

- Quando o processo estiver sob influência da causa especial (H_1 verdadeira) o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico;

- Seja:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0 + \delta\sigma_0 \\ \delta &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \end{aligned}$$

- Se $\delta \geq 1,5$ o valor de \bar{X} cairá na zona de ação rapidamente
- Se $\delta < 1,5$ haverá uma certa inércia para o ponto cair na zona de ação.

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico por variáveis

Poder do Gráfico de \bar{X} (2)

- $P_d = P\{\text{um valor de } \bar{X} \text{ cair fora dos limites de controle}\};$
- Então:

$$\begin{aligned}P\{\bar{X} > LSC\} &= P\left\{Z > \frac{LSC - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\&= P\left\{Z > \frac{\mu_0 + k\sigma_{\bar{X}} - \mu_1}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\&= P\{Z > k - \delta\sqrt{n}\}\end{aligned}$$

- Similarmente:

$$P\{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} = P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$



Gráfico por variáveis

Poder do Gráfico de \bar{X} (3)

- Simplificando:

$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

- No caso em que $k = 3$, $\delta = 1$ e $n = 4$, temos:

$$\begin{aligned}P_d &= P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\} \\&= P\{Z < -1\} + P\{Z < -5\} \\&= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587\end{aligned}$$

- Determinação do Poder:

Figura: 3.11 - Determinação do poder do gráfico de \bar{X}



Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

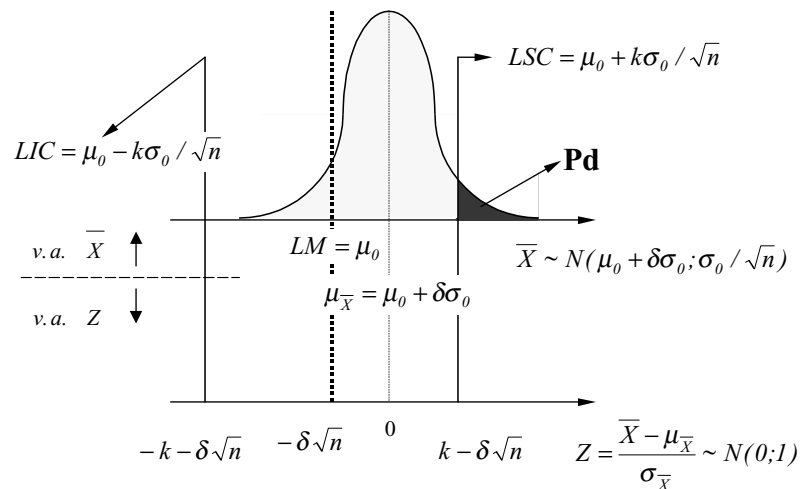


Figura 3.11: Determinação do Poder do Gráfico de Controle (Pd)

$$Pd = Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}] + Pr[Z > k - \delta\sqrt{n}]$$

$$Pd = Pr[Z < -k - \delta\sqrt{n}] + Pr[Z < -k + \delta\sqrt{n}] \quad (3.56)$$

Gráfico por variáveis

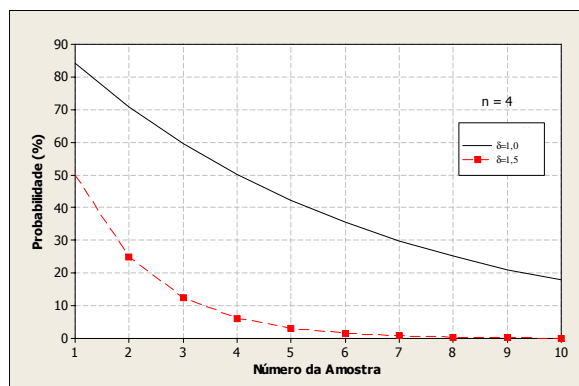
Alarme Verdadeiro no Gráfico de \bar{X} (2)

- M : Qte de amostras antes de um alarme verdadeiro
- $M \sim \text{geométrica}(P_d)$

$$P\{M = m\} = P_d(1 - P_d)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

- NMA : número médio de amostras antes de alarme
 $NMA = E(M) = \frac{1}{P_d}$
- São necessárias em média 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar um deslocamento de 1 desvio-padrão da média.
- Se amostra for de tamanho 9, o poder será $P_d = 0,5$, necessitando-se, em média, 2 amostras para detectar o mesmo deslocamento.

Curva de probabilidade de Não-deteccção



Velocidade de detecção de deslocamento da média para amostra de tamanho 4

- Para $\delta = 1,5$: terá sido detectado com certeza até a 7ª. inspeção
- Para $\delta = 1,0$: 30% de chance de não ser percebido até 7ª. inspeção
(30% de chance de os 7 valores caírem dentro dos limites de controle)

Curva de probabilidade de Não-deteccção

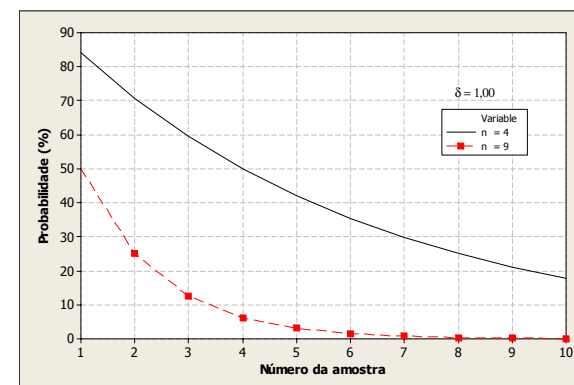


Gráfico por variáveis

Comentários

- Deslocamento da média da ordem de $1,5\sigma$ será detectado com certeza até a 7ª amostra;
- Deslocamento de $\delta = 1$ tem cerca de 30% de probabilidade não ser percebido após retirada da 7ª amostra;
- Os gráficos de \bar{X} são ágeis na detecção de grandes deslocamentos da média ($\delta > 1,5$) e lentos no caso de deslocamentos moderados.
- Com grandes amostras, os gráficos de \bar{X} são ágeis na detecção de deslocamentos moderados lentos no caso de amostras pequenas;

Gráfico por variáveis

Gráfico de R

- Hipóteses associadas:
 $H_0 : \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$,
com σ_0 : desvio-padrão do processo em controle;
- Medidas associadas

$$\alpha = 1 - P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\}$$

$$\beta = P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma \neq \sigma_0\}$$

Gráfico por variáveis

Cálculo de Probabilidades de R

- A distribuição de R é assimétrica e depende de n e σ .
- A amplitude relativa W não depende de σ :

$$W = R/\sigma$$

- Sob a hipótese de que X tenha distribuição normal, a Tabela B fornece $P\{W \leq w_0 | n = n_0\}$;
- Uso da Tabela:

$$P\{R \leq r_0\} = P\left\{W \leq \frac{r_0}{\sigma}\right\}$$

Figura: 3.16 - Distribuição de R



3.2.2 Gráfico de Controle de R

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad (3.59)$$

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \quad (3.60)$$

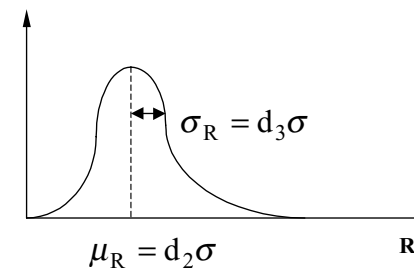


Figura 3.16: Distribuição da amplitude R

Gráfico por variáveis

Alarme Falso no Gráfico de R

- Cálculo de α , para processo em controle (desempenho 3σ):

$$\begin{aligned}1 - \alpha &= P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R\} | n = n_0, \sigma = \sigma_0\} \\ &= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\}\sigma_0 \leq R \leq (d_2 + 3d_3)\sigma_0 | n = n_0, \\ &= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\} \leq W \leq (d_2 + 3d_3) | n = n_0\}\end{aligned}$$

- Para limites 3σ , $\alpha > 0,0027$.

$$\text{Para } 2 \leq n \leq 6, d_2 < 3d_3 \quad \Rightarrow \quad LIC_R = 0$$

- $NMAF$: Número médio de amostras até um alarme falso:

$$NMAF = \frac{1}{\alpha}$$



Gráfico por variáveis

Risco α para $n_0 = 2, 4$ e 5

n	d_2	d_3	LIC_R	LSC_R	α	$NMAF$
2	1,128	0,833	0	3,69	0,0090	111
4	2,059	0,880	0	4,70	0,0050	200
5	2,326	0,864	0	4,92	0,0047	213

- $LIC_R = \max\{0, d_2 - 3d_3\}$
- $LSC_R = d_2 + 3d_3$



Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráficos de \bar{X} e R: Análise do Desempenho Conjunto



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráficos de \bar{X} e R

- Hipóteses associadas:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \text{ e/ou } \sigma \neq \sigma_0,$$

- $\alpha_{\bar{X}}$: risco de alarme falso do gráfico de \bar{X}

$$\alpha_{\bar{X}} = 1 - P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0\}$$

- α_R : risco de alarme falso do gráfico de R

$$\alpha_R = 1 - P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\}$$

- Probabilidade Conjunta de Alarme Falso:

$$\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}}\alpha_R$$



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráficos de \bar{X} e R - Exemplo

- Considerando limites 3σ e $n = 4$:
 $\alpha_{\bar{X}} = 0,0027$ e $\alpha_R = 0,0050$
- O risco de alarme falso conjunto será dado por $\alpha \approx 0,0077$;
- O número médio de amostras até alarme falso é:
 $NMFA \approx 130$ que é considerado elevado.



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Redução do Risco α

- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos, alargam-se os limites do gráfico;
- Caso não haja informações sobre os desajustes, é razoável adotar:
 $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R$;
- Exemplo: $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$, com $\alpha \approx 0,0024$
($NMAF = 416,7$) e $n = 4$;
- Limites do Gráfico:
Gráfico de \bar{X} : $\mu_0 \pm k\sigma_0/\sqrt{n}$ com $k = 3,24$, pois,
 $P\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$;
Gráfico de R : $LSC_R = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$.



3.2.3.2 Poder conjunto dos gráficos de Controle \bar{X} e R

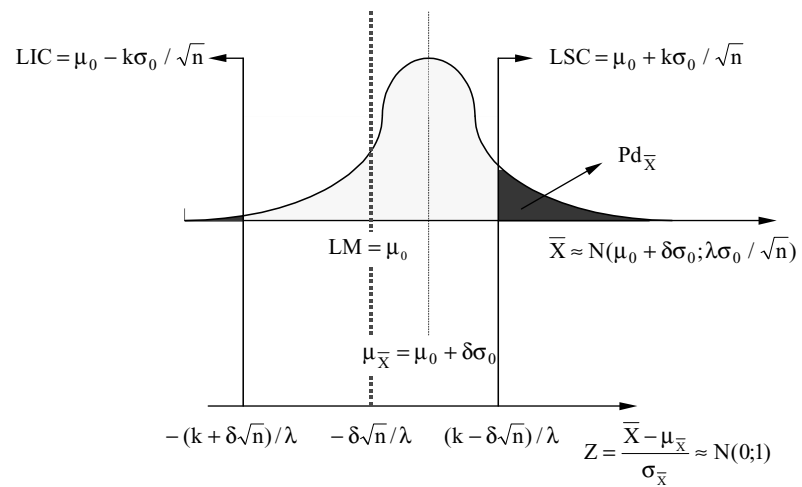


Figura 3.21: Determinação do Poder do Gráfico de Controle de \bar{X}

Gráfico por variáveis

Poder Conjunto dos Gráficos de \bar{X} e R

- P_{d_R} : Poder do gráfico sinalizar um aumento no desvio-padrão para $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$

$$\begin{aligned} P_{d_R} &= P\{R > LSC_R | \sigma = \sigma_1\} \\ &= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)\sigma_0}{\sigma_1}\right\} \\ &= P\left\{W > \frac{w(1-\alpha_R)}{\lambda}\right\} \end{aligned}$$

- Poder conjunto dos gráficos de \bar{X} e R:

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}}P_{d_R}$$

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico por variáveis

Poder Conjunto de Gráficos de Controle - Exemplo A

Deslocamento média do processo: $\delta = 0,5$

Desajuste do processo: $\lambda = 2$

Plano amostral: $n = 4$ e $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$:

- Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\{Z < -(k + \delta\sqrt{n})/\lambda\} + P\{Z < (k - \delta\sqrt{n})/\lambda\} \\ &= P\{Z < -2,12\} + P\{-1,12\} \\ &= 0,1314 + 0,0170 = 0,1484 \end{aligned}$$

- Poder do Gráfico de R :

$$P_{d_R} = 1 - P\left\{W < \frac{5,25}{2}\right\} = 1 - 0,7528 \approx 0,25$$

- Poder Conjunto dos Gráficos:

$$P_d = 0,1484 + 0,25 - 0,25 \times 0,1484 = 0,3613$$



Gráfico por variáveis

Poder Conjunto de Gráficos de Controle - Exemplo A (2)

- Para processo estável ($\lambda = 1$):

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\{Z < -4,24\} + P\{-2,24\} \\ &= 0,01255 \end{aligned}$$

Poder Conjunto dos Gráficos:

$$P_d = 0,01255 + 0,0012 - 0,01255 \times 0,0012 \approx 0,01374;$$

- Sem o gráfico de R o poder é praticamente o mesmo, ou seja, o gráfico de R não é sensível a alterações na média do processo.



Gráfico por variáveis

Poder Conjunto de Gráficos de Controle - Exemplo A (3)

- Para processo ajustado ($\delta = 0$):

$$P_{d_{\bar{X}}} = 2 \times P\{Z < -3,24/2\} = 0,1052$$

Poder Conjunto dos Gráficos:

$$P_d = 0,1052 + 0,25 - 0,25 \times 0,1052 = 0,3289;$$

- Sem o gráfico de \bar{X} , reduz-se o poder de detecção;
- Detecção de alterações na variabilidade:
O poder conjunto dos gráficos é maior que o poder individual do gráfico R (mesmo sem alteração da média), mas a recíproca não é verdadeira.

Gráfico por variáveis

Poder Conjunto de Gráficos de Controle - Exemplo B

Deslocamento média do processo: $\delta = 0,5$

Desajuste do processo: $\lambda = 1,2$

Plano amostral: $n = 4$ e $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$:

- Poder do gráfico de \bar{X} :

$$\begin{aligned} P_{d_{\bar{X}}} &= P\{Z < -(k + \delta\sqrt{n})/\lambda\} + P\{Z < (k - \delta\sqrt{n})/\lambda\} \\ &= P\{Z < -3,53\} + P\{Z < -1,87\} \\ &= 0,0002 + 0,0307 = 0,0309 \end{aligned}$$

- Poder do Gráfico de R :

$$P_{d_R} = 1 - P\left\{W < \frac{5,25}{1,2}\right\} = 1 - 0,9893 = 0,0107$$

Gráfico por variáveis

Poder Conjunto de Gráficos de Controle - Exemplo B (2)

- Poder Conjunto dos Gráficos:

$$P_d = 0,0309 + 0,0107 - 0,0107 \times 0,0309 = 0,0413$$

- Diferenças no Poder Global:

$P_d = 0,33$ para aumento de 100% no desvio-padrão

$P_d = 4,2\%$, para aumentos de 20%.

Gráfico por variáveis

Curva de Probabilidade de Não-Detecção

Probabilidade de os gráficos de \bar{X} e R não terem emitido sinal até a i -ésima amostra após o desajuste (todas as i primeiras observações caíram dentro dos limites)

Figura: 3.22 - Probabilidades de não detecção para (Exemplo A e B)

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Alternativas ao Gráfico de R



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Monitoramento da Variabilidade

- O gráfico de R tem sido mais utilizado por sua simplicidade;
- Para amostras grandes, o gráfico de S^2 ou de S são mais eficientes;
- Para amostras pequenas, o gráfico de R é tão eficiente quanto eles;
- A diferença começa a ser sensível para amostras maiores que 10 unidades.



Gráfico por variáveis

Gráfico da Variância Amostral S^2

- Para variável aleatória X normal tem-se:

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

- Limites de controle para risco de alarme falso α :

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1, \alpha/2}^2$$

$$LM_{S^2} = \hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \chi_{n-1, (1-\alpha/2)}^2$$

$\hat{\sigma}_0^2$: estimativa da variância do processo isento de causas especiais.



Gráfico por variáveis

Variância do Processo Desconhecida

- Utiliza-se \bar{S}^2 , com base em amostras de tamanho n , coletadas em período em que o processo esteja sob controle estatístico.

- Estimativa dada por:

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m S_i^2}{m}$$

$\hat{\sigma}_0^2$: estimativa da variância do processo isento de causas especiais.

- Linha média:

$$LM_{S^2} = \bar{S}^2$$



Gráfico por variáveis

Exemplo:

- Plano amostral: $n = 5$ e risco de alarme falso $\alpha = 0,005$.
- Limites de controle do gráfico::

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} 16,424 = 4,11\hat{\sigma}_0^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} 0,145 = 0,04\hat{\sigma}_0^2$$

- Descartando o limite inferior, recalcula-se o limite superior:

$$LSC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{5-1} \chi_{(5-1);0,005}^2$$

$$LIC_{S^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{4} 14,86 = 3,72\hat{\sigma}_0^2$$



Gráfico por variáveis

Comparação com Gráfico de R

- Para amostras de tamanho $n = 5$ e risco $\alpha = 0,47\%$:
- Gráfico de R - Limites $3 - \sigma$ (Tabela 3.9):
 $LSC_R = 4,92\sigma_0$ e $LIC_R = 0$

- Gráfico de S^2 :

$$\begin{aligned} LSC_{S^2} &= \frac{\sigma_0^2}{n-1} \chi_{4;0,0047}^2 \\ &= \frac{\sigma_0^2}{5-1} 15,00 = 3,75\sigma_0^2 \end{aligned}$$

- Ou seja, o valor do limite superior de controle se reduz.



Gráfico por variáveis

Parâmetros de S^2

- Para uma variável aleatória qualquer X , com distribuição χ_{n-1}^2 :
 $E(X) = n - 1$ e $Var(X) = 2(n - 1)$
- Para a variância amostral temos então:

$$\begin{aligned}Var\left[\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)S^2\right] &= 2(n-1) \\ \left(\frac{n-1}{\sigma^2}\right)^2 Var(S^2) &= 2(n-1) \\ Var(S^2) &= \frac{2}{n-1}(\sigma^2)^2\end{aligned}$$



Gráfico por variáveis

Gráfico de S^2 - Limites 3σ

- Sabe-se que os parâmetros da distribuição da variância amostral de uma normal são:

$$\begin{aligned}\mu_{S^2} &= \sigma^2 \\ \sigma_{S^2} &= \sqrt{\frac{2}{n-1}}\sigma^2\end{aligned}$$

- Os limites 3σ são dados por:

$$\begin{aligned}LSC_{S^2} &= \hat{\sigma}_0^2 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\hat{\sigma}_0^2 \\ LM_{S^2} &= \hat{\sigma}_0^2 \\ LIC_{S^2} &= \hat{\sigma}_0^2 - 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}\hat{\sigma}_0^2\end{aligned}$$

- $\hat{\sigma}_0^2$: valor estimador da variância do processo isento de causas especiais.



Gráfico por variáveis

Poder do Gráfico de S^2

- Para processo com $\sigma_1^2 = (\lambda\sigma_0)^2$:

$$\begin{aligned} P_d &= P \{ S^2 > LSC_{S^2} \mid \sigma^2 = \sigma_1^2 \} \\ &= P \left\{ \frac{n-1}{\sigma_1^2} S^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2} \right) LSC_{S^2} \right\} \\ &= P \left\{ \chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\lambda^2 \sigma_0^2} \right) LSC_{S^2} \right\} \end{aligned}$$

- Para gráficos com limite 3σ ou com risco α pré-determinados.



Gráfico por variáveis

- Para gráficos com limites 3σ :

$$\begin{aligned} P_d &= P \left\{ \chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2} \right) \hat{\sigma}_0^2 \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}} \right] \right\} \\ &= P \left\{ \chi_{n-1}^2 > \frac{n-1}{\lambda^2} \left[1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}} \right] \right\} \end{aligned}$$

- Para gráficos com limites de risco α pré-definido:

$$\begin{aligned} P_d &= P \left\{ \chi_{n-1}^2 > \left(\frac{n-1}{\sigma_1^2} \right) \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{n-1} \right) \chi_{n-1, \gamma}^2 \right\} \\ &= P \left\{ \chi_{n-1}^2 > \frac{\chi_{n-1, \gamma}^2}{\lambda^2} \right\} \end{aligned}$$

com $\gamma = \alpha/2$ para limites bilaterais e $\gamma = \alpha$ para $LIC_{S^2} = 0$



Gráfico por variáveis

Gráfico do Desvio-Padrão S

- Os pontos amostrais são dados por:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

- A distribuição da estatística não é tabelada. Pela tabela χ^2 podemos calcular:

$$P\{S > a\} = P\{S^2 > a^2\}$$

- Os parâmetros da estatística S são:

$$\begin{aligned}\mu_S &= c_4\sigma \\ \sigma_S^2 &= (1 - c_4^2)\sigma^2\end{aligned}$$



Gráfico por variáveis

Comparação com Gráfico de R

- Para amostras de tamanho $n = 5$ e risco $\alpha = 0,47\%$:
 $LSC_{S^2} = 3,75\sigma_0^2$

- O poder para perceber um desajuste com $\sigma_1 = 2\sigma_0$ é calculado por:

$$\begin{aligned}Pd &= P\left\{\chi_{5-1}^2 > \left(\frac{5-1}{2^2}\right) 3,75\right\} \\ &= P\{\chi_4^2 > 3,75\} \\ &= 0,441\end{aligned}$$

- O gráfico de R com as mesmas características (n e α) oferece um poder de 41%



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Limites do Gráfico de S

- Os Para limites 3σ são dados por:

$$LSC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 + 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = c_4 \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 - 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

- $\hat{\sigma}_0$: valor estimado do desvio-padrão do processo isento de causas especiais.

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Gráfico de \bar{X} : Regras de Decisão Suplementares

Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Regras Suplementares

Em geral, definidas apenas para o gráfico de \bar{X}

- Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
- Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Notação das Regras

- (L, m, a, b) : sinal ocorre sempre que:
dentre os m últimos pontos, ao menos L estiverem entre $\mu_0 + a\sigma_{\bar{X}}$ e $\mu_0 + b\sigma_{\bar{X}}$;
- Regra Básica de Controle;
 $C_1 : (1; 1; K; \infty)$ ou $(1; 1; -\infty; -k)$
1 ponto fora dos limites de controle ($k = 3$: limites 3σ);
- Algumas Regras Suplementares:
 $C_2 : (2; 2; 2; \infty)$ ou $(2; 2; -\infty; -2)$
 $C_3 : (2; 3; 2; \infty)$ ou $(2; 3; -\infty; -2)$
 $C_4 : (3; 4; 1, 6; \infty)$ ou $(3; 4; -\infty; -1, 6)$
 $C_5 : (8; 8; 0; \infty)$ ou $(8; 8; -\infty; 0)$
 $C_6 : (10; 10; 0; \infty)$ ou $(10; 10; -\infty; 0)$



Gráfico por variáveis

Detecção de Mudanças

Similarmente para $\delta = -0,60$

- Probabilidades a_1 e a_2 :

$$a_1 = P\{Z < w - \delta\sqrt{n}\} = P\{Z < 3,8\}$$

$$= 0,999931$$

$$a_2 = P\{w - \delta\sqrt{n} < Z < k - \delta\sqrt{n}\} = P\{3,8 < Z < 4,55\}$$

$$= 0,00069$$

- M : Qte. de amostras até o sinal

$$E_{-\delta[M]} = \frac{1 + a_2 + a_1 a_2}{1 - a_1 - a_1^2 a_2}$$

$$\approx 1449$$

- NMA : qte. média de amostras até o sinal (Apêndice D)

$$NMA = \left[\frac{1}{E_{+\delta}(M)} + \frac{1}{E_{-\delta}(M)} \right]^{-1} \approx 15$$



Gráfico por variáveis

Combinações de Regras - NMA

δ	NMA				
	C_1	C_1 e C_2	C_1 e C_3	C_1 e C_4	C_1 e C_6
$n = 4$					
0,00	370	370	370	370	370
0,20	199	166	147	148	120
0,40	71,6	49,7	41,3	40,1	33,8
0,60	27,8	17,9	15,0	14,3	15,2
0,80	12,4	8,00	7,03	6,82	9,09
1,00	6,3	4,35	4,07	4,08	6,05
1,20	3,65	2,79	2,76	2,84	4,02
1,40	2,38	2,02	2,09	2,16	2,68
1,60	1,73	1,61	1,70	1,71	1,90
1,80	1,38	1,36	1,45	1,41	1,47
2,00	1,19	1,20	1,27	1,22	1,24



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Combinação de Regras

- C_1 e C_6 : ágil na detecção de pequenas perturbações na média;
- C_1 e C_2 : praticamente sempre mais ágil que o gráfico de controle 3σ tradicional (C_1 isolada).
- Para manter-se o nível de proteção contra alarmes falsos, deve-se alargar os limites de controle.



Gráfico por variáveis

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

Escolha do Intervalo de Tempo entre Amostras



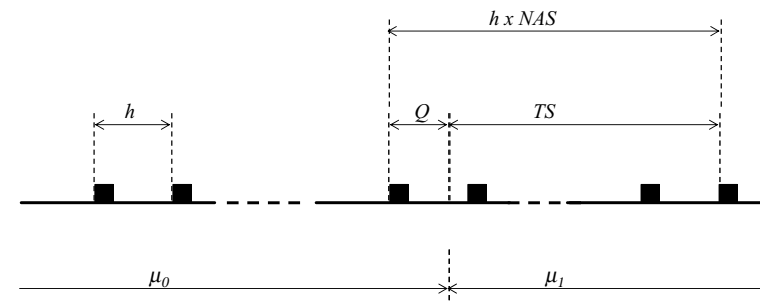
Gráfico por variáveis

Intervalo de Tempo entre Amostras (h)

- É função de:
 - tempo de produção de cada item;
 - custo da inspeção;
 - tempo de inspeção;
 - estabilidade do processo;
 - custo de operar sob causa especial.
- Problemas:
 - obtenção de valores precisos para estes parâmetros;
 - estabilidade do processo está associada ao tempo médio isento de causas especiais;
 - operação sob causa especial implica aumento da PFE, dependendo da intensidade da perturbação.
- Valores pequenos de h implicam custos elevados com amostragem e maior incidência de alarmes falsos.



Tempo até o sinal - TS



■ Pontos de inspeção

TS: Tempo até o sinal

NAS: número de amostras até o sinal

Q: tempo entre o deslocamento da média e a inspeção imediatamente anterior

h: intervalo entre amostragens

Gráfico por variáveis

Determinação dos Parâmetros Ótimos

Medida de Eficiência:

(TS): tempo entre a alteração e o alarme

- TES: tempo esperado até o sinal. Depende de: δ, n, h, k ;
- Sejam:
NAS: número de amostras até o sinal;
Q: tempo entre última amostragem e perturbação;

$$TES = E(TS) = h E(NAS) - E(Q)$$

- Supondo $E(Q) = h/2$:

$$\begin{aligned} TES &= h \times NMA - \frac{h}{2} \\ &= \frac{h}{P_d} - \frac{h}{2} \end{aligned}$$



Gráfico por variáveis

Determinação dos Parâmetros Ótimos - Exemplo

Sejam $h = 0,5$, $k = 3$ e $\delta = 1,5$

- Se $n = 2$, então $P_d = 19\%$ (Tab. 3.7) e $NMA = 5,26$
 $TES = 0,5 \times 5,26 - 0,5/2 = 2,38 \text{ horas} = 143 \text{ min}$
Taxa de amostragem: $n/h = 4 \text{ itens/hora}$
- Se $n = 4$, então $P_d = 50\%$ e $NMA = 2$
 $TES = 0,5 \times 2 - 0,5/2 = 0,75 \text{ horas} = 45 \text{ min}$
Taxa de amostragem: $n/h = 8 \text{ itens/hora}$
- Se $n = 2$ e $h = 15 \text{ min}$,
 $TES = 0,25 \times 5,26 - 0,25/2 = 1,19 \text{ horas} = 72 \text{ min}$
Taxa de amostragem: $n/h = 8 \text{ itens/hora}$



Gráfico por variáveis

Determinação dos Parâmetros Ótimos - Exemplo (2)

- É conveniente usar TES como medida de rapidez, fixadas as freqüência admissível de alarmes falsos e a taxa de amostragem;
- Há uma infinidade de combinações de (n, h, k) com a mesma taxa de amostragem (n/h) e mesmo tempo médio até alarme falso $TMAF = h/\alpha$;
- Entretanto, **uma** delas minimiza o tempo esperado até o sinal (TES).

Gráfico por variáveis

Determinação dos Parâmetros Ótimos - Exemplo (3)

Para $n/h = 8$, $TMAF = 500$ e $\delta = 1,5$, qual a melhor combinação de (n, h) dentre: $(2; 0,25)$, $(4; 0,50)$, $(8; 1,00)$ e $(16; 2,00)$






- Para cada h , como $\alpha = 2\Phi(-k)$, determina-se k por:

$$k = -\Phi^{-1} \left(\frac{h}{2 \times TMAF} \right)$$

- Após a obtenção de k , calcula-se o poder:

$$P_d = P \{ Z < -k + \delta\sqrt{n} \} + P \{ Z < -k - \delta\sqrt{n} \}$$

Referências bibliográficas

-  COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. e CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas, 2004.
-  MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. 4a. Edição LTC, 2004.
-  WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.
-  WERKEMA, M. C. C. *Avaliação da qualidade de medidas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1996.
-  DERMAN, C. and ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, 1997.

Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

UFMG
Especialização em Estatística

Setembro/2008