

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística



Roteiro da apresentação

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- 1 Qualidade na empresa
- 2 Fundamentos de CEP
- 3 Gráfico por variáveis
- 4 Capacidade do processo
- 5 Gráficos por atributos
- 6 Processos com autocorrelação
- 7 Outras técnicas
- 8 Referências Bibliográficas



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Gráficos de Controle para Processos Autocorrelacionados



Gráfico de Controle de Shewhart

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Hipóteses do gráfico de controle convencional:
 - Normalidade e independência da característica de qualidade
- Violações das hipóteses
 - Os gráficos convencionais funcionam razoavelmente bem se a hipótese de normalidade for violado com moderação
 - A violação da hipótese de independência das observações reduz a aplicabilidade dos gráficos convencionais



Processos Correlacionados

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- O risco α aumenta, comprometendo a credibilidade do gráfico devido a um número elevado de alarmes falsos;
- Os gráficos de controle eram destinados originalmente à indústria de partes discretas (com nenhum ou quase nenhum grau de automação). Nesses processos a condição de independência das observações geralmente é satisfeita;
- Processos contínuos e por bateladas raramente produzem observações independentes;
- Processos discretos altamente automatizados também têm essa característica;



Correlação

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Coeficiente de correlação entre 2 variáveis aleatórias X e Y :

$$\rho_{X,Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Coeficiente de correlação amostral:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$



Correlação Serial

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- A correlação serial ou autocorrelação entre as observações X_i e X_{i-k} é:

$$r_k = \frac{\sum_{i=k+1}^n (x_i - \bar{x})(x_{i-k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- O conjunto de coeficientes de autocorrelação amostrais $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ é denominado função de autocorrelação amostral da série de dados X .



Exemplo

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Medições sucessivas de temperatura de banho químico, espaçadas em 3 minutos:
 - Valor-alvo: $225^{\circ}C$;
 - Amostra de tamanho: 150

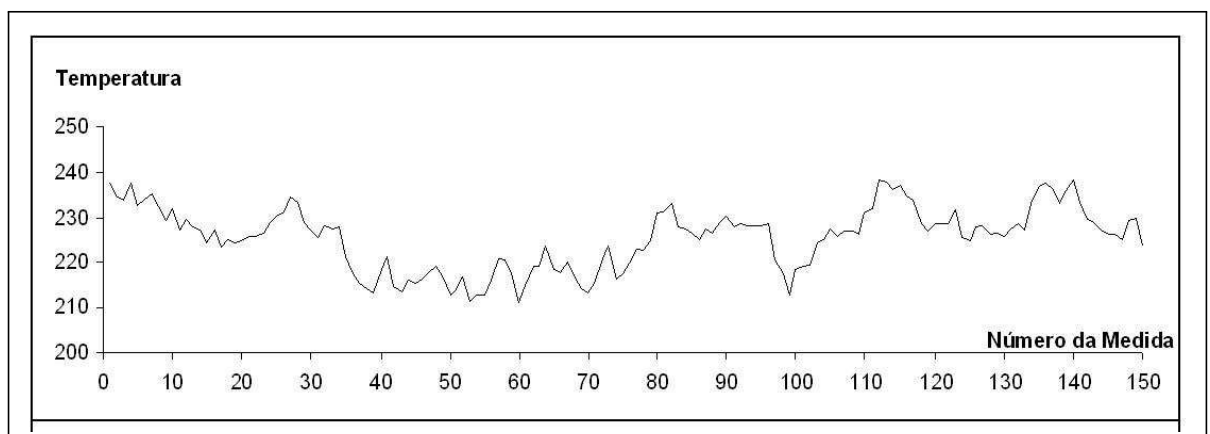


Figura: Série de medidas da temperatura do banho químico



Autocorrelação das medidas

k	r_k	k	r_k
1	0,893	7	0,465
2	0,793	\vdots	\vdots
3	0,714	15	0,217
4	0,638	16	0,194
5	0,588	\vdots	\vdots
6	0,527	\vdots	\vdots

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- À medida em que a defasagem aumenta, reduz-se a dependência de x_i em relação à x_{i-k} ;
- Nível de correlação suficiente para comprometer o desempenho do gráfico de Shewhart



Comentários

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Motivo da correlação: em intervalos curtos a variação de temperatura não pode ser muito grande (medida acima da média tende a ser seguida por medida acima da média);
- Se o nível médio da característica X variar em ciclos, podem ocorrer autocorrelações mais altas para defasagens grandes.



Monitoramento da Temperatura com Gráfico $\bar{X}-R$

- Registro de 3 temperaturas espaçadas de 3 minutos a cada 30 minutos:

Amostra	x_1	x_2	x_3	R	\bar{X}
1	237,59	234,40	233,66	3,93	235,22
2	227,02	229,42	227,65	2,40	228,03
3	225,68	225,70	226,29	0,61	225,89
4	225,17	228,29	227,44	3,12	226,97
5	221,34	214,47	213,71	7,64	216,51
6	213,88	216,78	211,56	5,22	214,07
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	229,08	229,53	229,20	0,45	229,27
19	215,55	221,28	219,07	5,73	218,63
20	229,25	226,33	226,85	3,02	227,44
				$\bar{R} = 3,703$	$\bar{\bar{X}} = 226,085$



Cálculo dos Limites de Controle

- Estimativa da média do processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} = 226,085$$

- Estimativa do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{3,703}{1,693} = 2,187$$

- Limites de controle do gráfico de \bar{X} :

$$LSC_{\bar{X}} = 226,085 + 3 \times 2,187/\sqrt{3} = 229,873$$

$$LM_{\bar{X}} = 226,085$$

$$LIC_{\bar{X}} = 226,085 - 3 \times 2,187/\sqrt{3} = 222,298$$

- Limites de controle do gráfico de R :

$$LSC_R = (1,693 + 3 \times 0,888) \times 2,187 = 9,531$$

$$LM_R = 3,703$$

$$LIC_R = 0$$



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Resultados

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

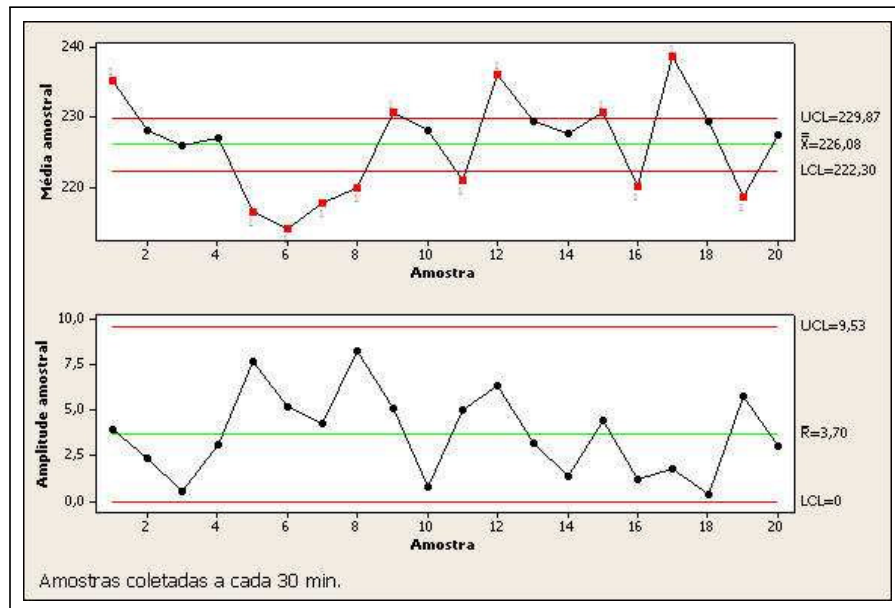


Figura: Monitoramento com amostras de tamanho 3 a cada 30 min.

- O gráfico de R não sinaliza desajuste do processo;
- Os sinais apontados no gráfico de \bar{X} indicam a ocorrência de causas especiais?



Efeitos da Autocorrelação

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Amostras com medidas tomadas em curto espaço de tempo não variam muito;
 - Subestimação de σ :
Variabilidade dentro da amostra é menor que a do processo (Desvio-padrão das 60 observações: 6,823)
 - Limites de controle demasiadamente estreitos aumentando a proporção de alarmes falsos;
- Motivo:
Observações correlacionadas da característica da qualidade (dentro da amostra) levam a problemas de alarmes falsos no gráfico de \bar{X} ;
- Solução:
Na ausência de ciclos (sazonalidade), observações suficientemente defasadas comportam-se como observações independentes.



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Gráfico de Observações Individuais



Motivação

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Buscar um método de monitoramento que não subestime o desvio-padrão do processo (evitar limites de controle estreitos);
- Uma solução:
 - Espaçar as medidas por um espaço de tempo suficientemente longo;
 - Amostras individuais, mas com observações não muito espaçadas no tempo.
- Gráficos de \bar{X} e R substituídos por:
 - Gráfico de observações individuais (X);
 - Gráfico de amplitude móvel (MR).



Medidas Individuais

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Medidas da característica de qualidade:
 X_i : valor da i -ésima medida da característica;
 $MR_i = \max\{x_i - x_{i-1}\} - \min\{x_i - x_{i-1}\}$.
- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:
A partir de conjunto de m amostras

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{MR}}{d_2}, \text{ onde:}$$

$$\bar{MR} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m MR_i, \text{ e}$$

$$d_2 = 1,128$$



Limites 3σ

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Limites de controle para gráfico de medidas individuais:

$$LSC_X = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_0$$

$$LM_X = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_X = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_0$$

- Limites de controle para gráfico de amplitude móvel:

$$LSC_{MR} = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = 3,687\hat{\sigma}_0$$

$$LM_{MR} = d_2\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_{MR} = 0$$



Temperatura de Banho Químico

- Medidas de temperatura a cada 1 hora, quando a autocorrelação é não significativa;

Amostra	x_i	MR
1	227,02	
2	225,18	1,84
3	213,88	11,30
4	215,31	1,43
5	227,67	12,36
6	232,02	4,35
⋮	⋮	⋮
18	225,92	3,25
19	216,49	9,43
20	227,74	11,25
$\bar{X} = 225,016$		$MR = 7,102$



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Construção do Gráfico

- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_0 &= \bar{X} = 225,016 \\ \hat{\sigma}_0 &= \frac{7,102}{1,128} = 6,296\end{aligned}$$

- Limites de controle para gráfico de medidas individuais:

$$\begin{aligned}LSC_X &= 225,02 + 3 \times 6,296 = 243,90 \\ LM_X &= 225,02 \\ LIC_X &= 225,02 - 3 \times 6,296 = 206,13\end{aligned}$$

- Limites de controle para gráfico de amplitude móvel:

$$\begin{aligned}LSC_{MR} &= 3,687 \times 6,296 = 23,20 \\ LM_{MR} &= 7,10 \\ LIC_{MR} &= 0\end{aligned}$$



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Gráficos de Controle

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Processos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

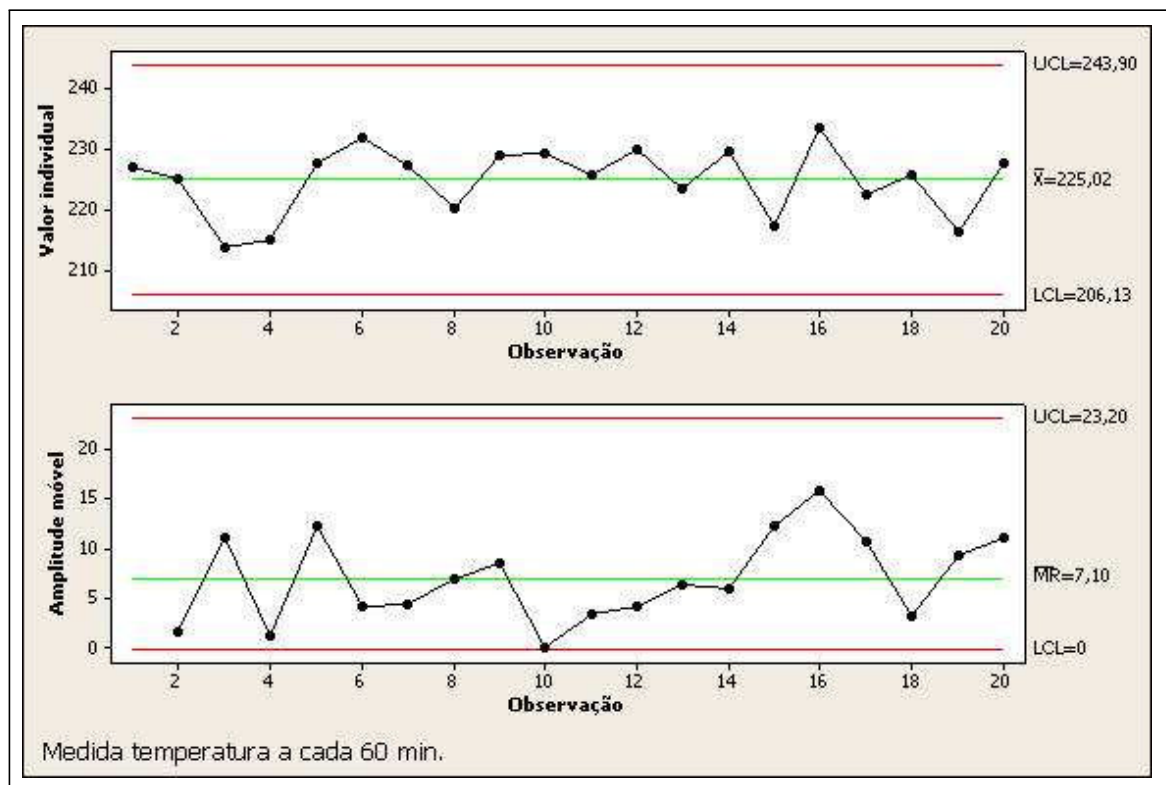


Figura: Monitoramento com medidas individuais a cada 60 min.

Cometários

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Processos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- Não há indicação de descontrole do processo. Os pontos fora dos limites do gráfico de \bar{X} parecem ser alarmes falsos;
- As observações individuais foram espaçadas por um intervalo de tempo suficientemente longo para que o efeito da autocorrelação se dissipasse;
- Gráficos de controle adequados para processos contínuos autocorrelacionados.

Dissipação da Autocorrelação

Intervalo de tempo mínimo necessário para a dissipação do efeito da autocorrelação:

- Calcular a função de autocorrelação;
 $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$
- Verificar o menor valor de k a partir do qual r_k é muito pequeno.
Costuma-se considerar $r_k < 0,20$
- Da Tabela 6.3, tem-se que $r_{16} = 0,1965$ é o primeiro valor em que $r_k < 0,20$;
- Espaçamento: $16 \times 3 = 48$ minutos. Adotado $k = 20$.



Exemplo 2

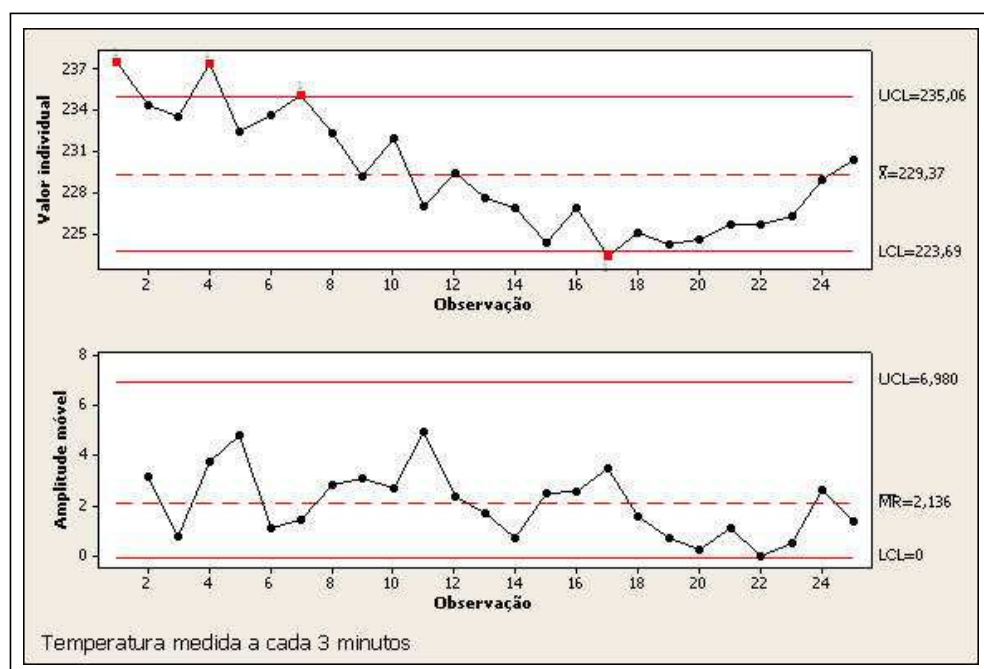


Figura: Monitoramento com medidas individuais a cada 3 min.

- Observações altamente correlacionadas, levando a limites mais estreitos, implicando aumento de alarmes falsos.



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Gráfico com Limites Alargados

Autocorrelação em Processos Discretos

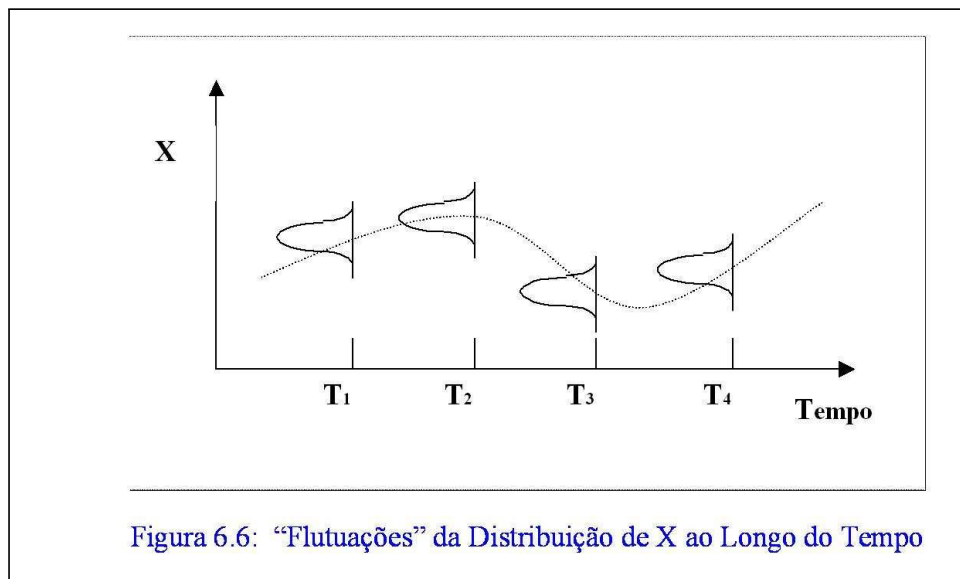


Figura 6.6: “Flutuações” da Distribuição de X ao Longo do Tempo

Figura: Flutuações da distribuição de X ao longo do tempo.

- Exemplo: Processo em que o nível médio da característica de qualidade oscila gradualmente (autocorrelação, em longo prazo), com uma variação aleatória de peça para peça (ruído, no curto prazo).

Comentários

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- É possível monitorar esses processos com gráficos de X e MR , mas eles não permitem monitorar a variabilidade de peça a peça;
- Em certas aplicações, o aumento da variabilidade de peça a peça pode indicar causa especial diferente daquelas que levam a variação excessiva do nível médio do processo.
- Solução: Alargar os limites de controle do gráfico de \bar{X} , baseando na variabilidade total de \bar{X} (Variabilidade do nível médio da série e do ruído.)
- Estimativa por medidas diretas:

$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S_{\bar{X}}}{c_4}$$

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m-1}}$$



Construção dos Gráficos

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Limites 3σ para gráfico de \bar{X} :

$$LSC_X = \hat{\mu}_0 + 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

$$LM_X = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_X = \hat{\mu}_0 - 3\hat{\sigma}_{\bar{X}}$$

- Os limites do gráfico de R não precisam ser alargados, pois, as flutuações da média do processo não afetam a variabilidade dentro da amostra;
- As amostras podem ser coletadas com qualquer periodicidade e as observações dentro da amostra podem ser itens consecutivos;
- As amostras devem cobrir um período de tempo longo o suficiente para se observar a variabilidade total de \bar{X} .



Exemplo 3

Volume de refrigerante em garrafas plásticas

Valor-alvo: 1000,00 ml

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

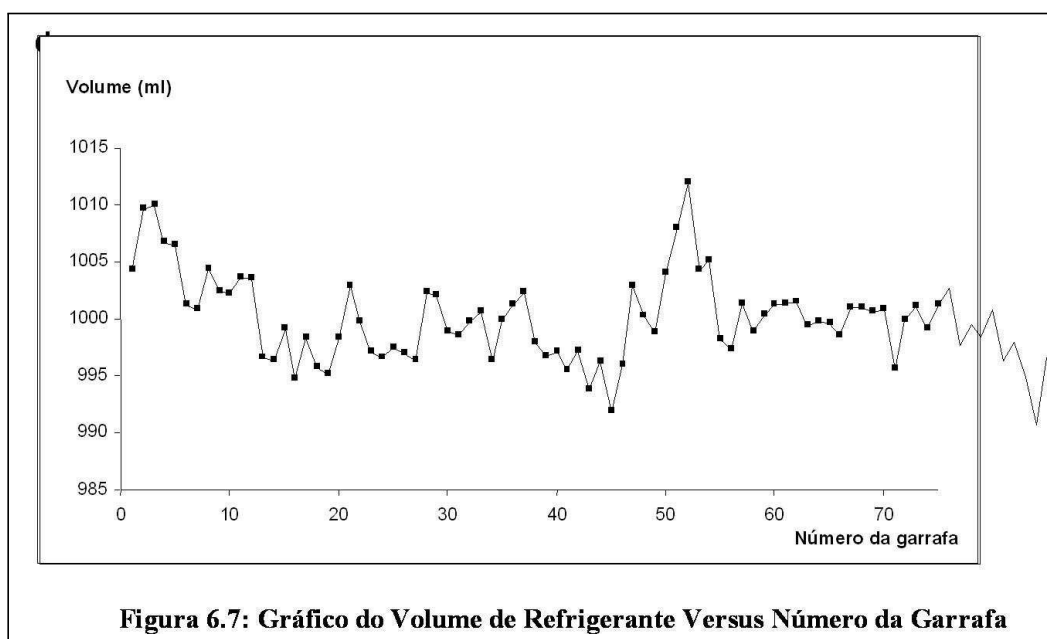


Figura: Flutuações da distribuição de X ao longo do tempo.

- Processo com forte autocorrelação positiva pra $k = 1, \dots, 4$ (tabela 6.8).



Monitoramento do Processo

20 amostras espaçadas de 1 hora, com 3 observações cada uma.

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

i	x_1	x_2	x_3	R	\bar{X}
1	1001,47	1001,60	999,53	2,07	1000,87
2	1001,93	999,45	997,46	6,97	998,11
3	1000,74	1003,44	998,54	4,90	1000,91
4	1005,94	1002,98	998,89	7,06	1002,60
5	1000,85	1003,93	1002,34	3,08	1002,37
6	1000,85	1003,93	1002,34	3,08	1002,37
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
18	997,59	999,56	1001,75	4,15	999,63
19	1004,45	1008,44	1004,59	3,99	1005,82
20	999,92	997,63	1002,52	4,39	999,86
				$\bar{R} = 3,827$	$\bar{X} = 999,685$
					$S_{\bar{X}} = 3,314$



Construção do Gráfico

- Estimativa da média e do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{X} = 999,685$$
$$\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \frac{S_{\bar{X}}}{c_4} = \frac{3,314}{0,986934} = 3,357$$

- Limites de controle para gráfico de \bar{X} :

$$LSC_{\bar{X}} = 999,685 + 3 \times 3,357 = 1009,756$$

$$LM_{\bar{X}} = 999,685$$

$$LIC_{\bar{X}} = 999,685 - 3 \times 3,357 = 989,613$$

- Limites de controle para gráfico de R :

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3) \frac{\bar{R}}{d_2} = (1,693 + 2 \times 0,888) \frac{3,827}{1,693} = 9,852$$

$$LM_R = 3,827$$

$$LIC_R = 0$$



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Gráfico com os Limites Alargados

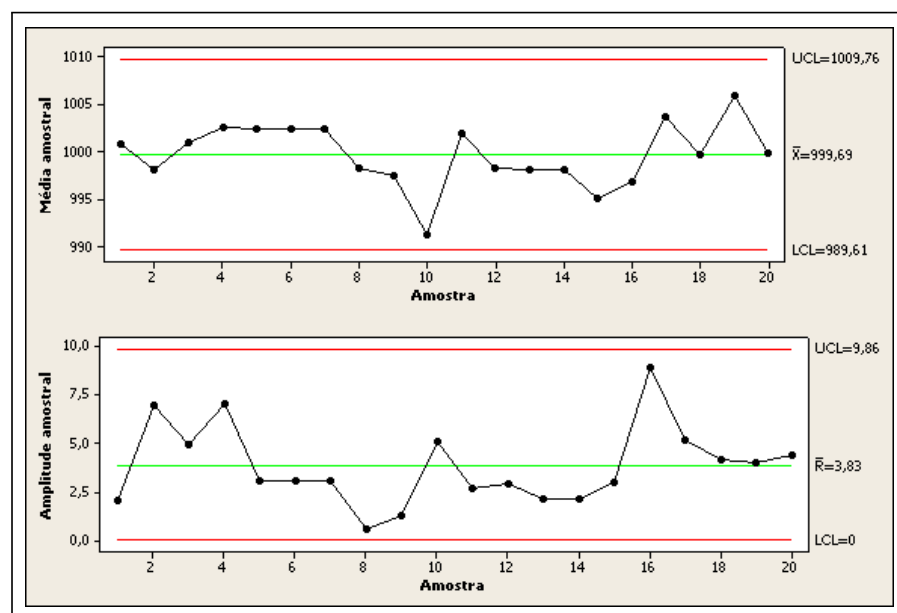


Figura: Gráfico de \bar{X} com limites alargados e de R , usuais.

- O monitoramento indica que o processo está sob controle estatístico, sem indicação de causas especiais.



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Monitoramento com o Gráfico de \bar{X}

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Processos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

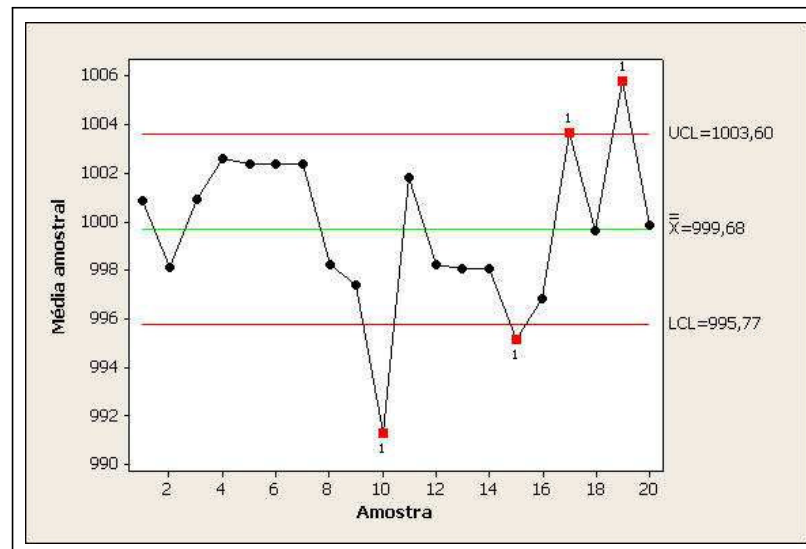


Figura: Gráfico de \bar{X} com limites usuais.

- Limites de controle usando o estimador usual $\bar{R}/d_2 = 2,261$
- Vários pontos do gráfico estão fora dos limites. Esses pontos seriam alarmes falsos.



Referências bibliográficas

Qualidade na empresa
Fundamentos de CEP
Gráfico por variáveis
Capacidade do processo
Gráficos por atributos
Processos com autocorrelação
Outras técnicas
Referências Bibliográficas

- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. e CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas, 2004.
- MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. 4a. Edição LTC, 2004.
- WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.
- WERKEMA, M. C. C. *Avaliação da qualidade de medidas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1996.
- DERMAN, C. and ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, 1997.



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Processos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística