

Qualidade na  
empresa

Fundamentos  
de CEP

Gráfico por  
variáveis

Capacidade  
do processo

Gráficos por  
atributos

Gráficos com  
autocorrela-  
ção

Outras  
técnicas

Referências  
Bibliográficas

# Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística



## Roteiro da apresentação

Qualidade na  
empresa

Fundamentos  
de CEP

Gráfico por  
variáveis

Capacidade  
do processo

Gráficos por  
atributos

Gráficos com  
autocorrela-  
ção

Outras  
técnicas

Referências  
Bibliográficas

- ① Qualidade na empresa
- ② Fundamentos de CEP
- ③ Gráfico por variáveis
- ④ Capacidade do processo
- ⑤ Gráficos por atributos
- ⑥ Gráficos com autocorrelação
- ⑦ Outras técnicas
- ⑧ Referências Bibliográficas



Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

## *Gráfico de Controle de CUSUM e de EMWA*

## Monitoramento da Média

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Além da simplicidade, os gráficos de Shewhart são imbatíveis para detecção de grandes desvios da média do processo, ou de aumentos significativos da variância;
- Entretanto, perdem eficiência em processos mais robustos (interferência menos profunda de causas especiais);
- Em processos sujeitos a pequenas perturbações, são indicados gráficos em que a decisão é baseada em diversas amostras e não apenas na última delas. São eles:
  - gráfico de controle de somas acumuladas
  - gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EMWA)

# Outras técnicas

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

## *Gráfico de Controle de CUSUM*

## Características do Gráfico

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Usa informações acumuladas dos desvios de  $\bar{X}$  , através de:

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0),$$

onde  $\bar{X}_j$ : média da j-ésima amostra.

- Comportamento:
  - enquanto a  $\mu$  permanecer ajustada,  $S_i$  oscilará aleatoriamente em torno de 0;
  - Se  $\mu$  deslocar, a estatística  $S_i$  crescerá (ou decrescerá) indefinidamente.

# Exemplo

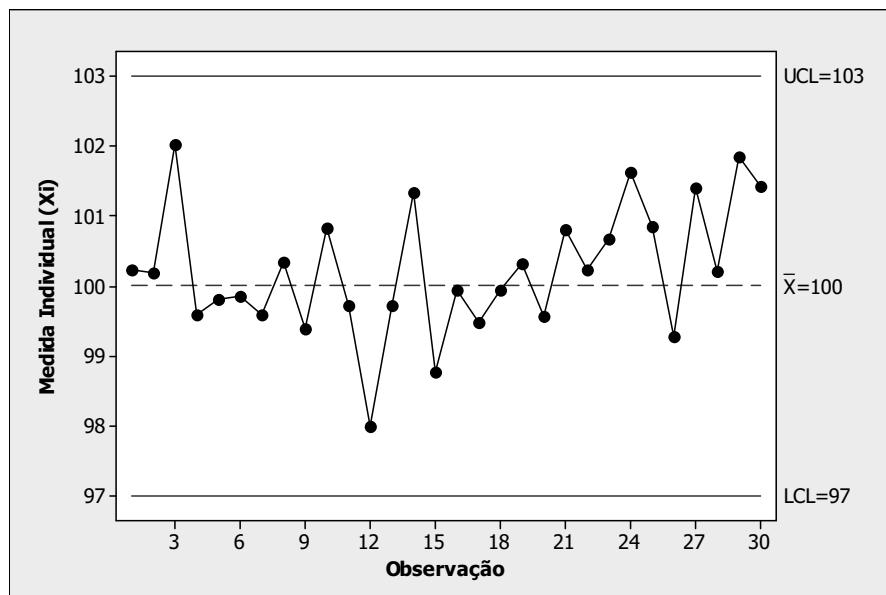
- Qualidade na empresa
- Fundamentos de CEP
- Gráfico por variáveis
- Capacidade do processo
- Gráficos por atributos
- Gráficos com autocorrelação
- Outras técnicas
- Referências Bibliográficas

- Simulação de pequeno deslocamento de média em carta com 30 valores individuais, com:
- Dados da Simulação:

$$X_i \sim N(100, 1), \quad i = 1, \dots, 20$$
$$X_i \sim N(101, 1), \quad i = 21, \dots, 30$$



## Gráfico de Controle de $X$



$$LSC_X = 100 + 3 \times 1 = 103,0$$

$$LIC_X = 100 - 3 \times 1 = 97,0$$

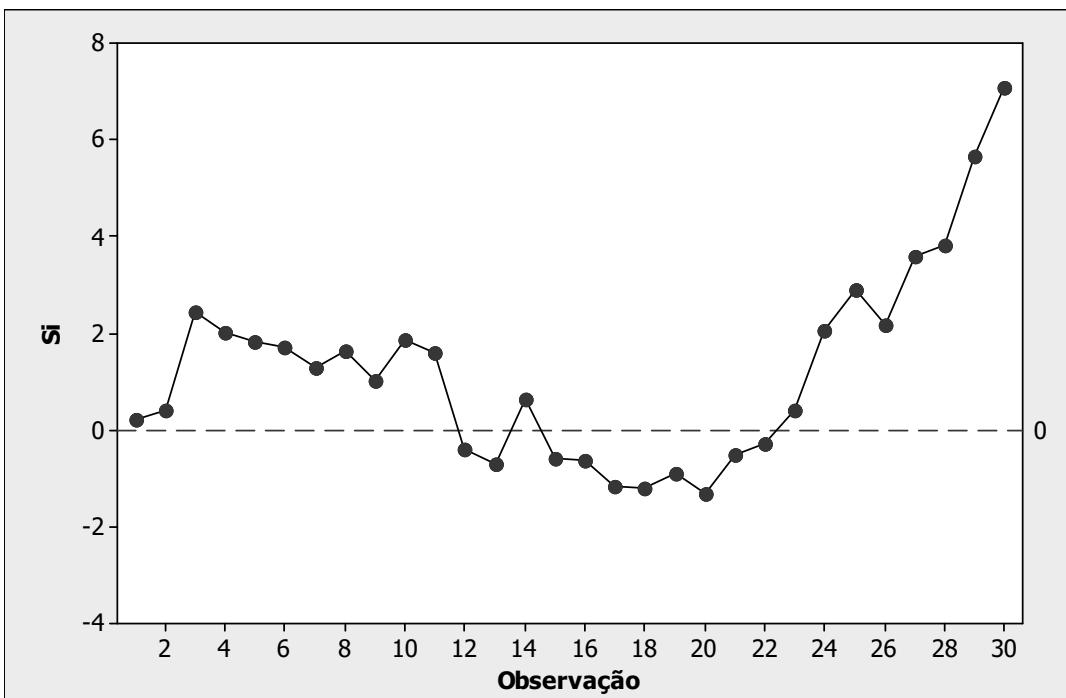
## Valores de $X_i$ e das Somas Acumuladas $S_i$

$$\mu_0 = 100$$

Obs.	$X_i$	$X_i - 100$	$S_i$
1	100,23	0,23	0,23
2	100,19	0,19	0,42
3	102,02	2,02	2,44
4	99,59	-0,41	2,03
5	99,81	-0,19	1,84
6	99,86	-0,14	1,70
7	99,60	-0,40	1,30
8	100,35	0,35	1,65
9	99,38	-0,62	1,03
10	100,83	0,83	1,86
11	99,73	-0,27	1,59
12	98,00	-2,00	-0,41
13	99,72	-0,28	-0,69
14	101,34	1,34	0,65
15	98,77	-1,23	-0,58
16	99,94	-0,06	-0,64
17	99,47	-0,53	-1,17
18	99,95	-0,05	-1,22
19	100,33	0,33	-0,89
20	99,57	-0,43	-1,32
21	100,82	0,82	-0,50
22	100,23	0,23	-0,27
23	100,68	0,68	0,41
24	101,64	1,64	2,05
25	100,86	0,86	2,91
26	99,28	-0,72	2,19
27	101,41	1,41	3,60
28	100,21	0,21	3,81
29	101,85	1,85	5,66
30	101,43	1,43	7,09

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$$

## Gráfico das Somas Acumuladas



# Análise dos Gráficos

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- O gráfico de  $\bar{X}$  não detectou o deslocamento de 100 para 101;
- A estatística  $S$  cresceu indefinidamente a partir de  $n = 20$ ;
- O gráfico de CUSUM, além de sinalizar o desajuste, informa quando este ocorreu;
- Ele não sinaliza os desajustes de imediato, pois, baseia-se no histórico do processo.
- Para grandes desajustes, o gráfico de  $\bar{X}$  é sempre mais ágil.

## Algoritmo CUSUM

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Para  $n = 1$  o algoritmo é dado por:

$$S_i^+ = \max\{0, X_i - (\mu_0 + d) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0, (\mu_0 - d) - X_i + S_{i-1}^-\}$$

onde,

$X_i$ : i-ésima observação do processo;

$$S_0^+ = S_0^- = 0$$

- O algoritmo produz um sinal sempre que  $S_i^+ \text{ ou } S_i^- > K$

- Parâmetros comumente adotados :

$$K = 5\sigma_0 \quad \text{e} \quad d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}, \text{ em que}$$

$|\mu_1 - \mu_0|$ : deslocamento que se quer detectar.

## Algoritmo CUSUM

$\mu_0 =$	100	$K =$	5,000	$(5*\sigma_0)$
$\sigma_0 =$	1			
$\mu_1 =$	101	$d =$	0,500	

$$S_i^+ = \max\{0; X_i - (100 + 0,5) + S_{i-1}^+\}$$

$$S_i^- = \max\{0; (100 - 0,5) - X_i + S_{i-1}^-\}$$

Obs.	$X_i$	$X_i - 100,5$	$S_i^+$	$N^+$	$99,5 - X_i$	$S_i^-$	$N^-$
1	100,23	-0,27	0,00	0	-0,73	0,00	0
2	100,19	-0,31	0,00	0	-0,69	0,00	0
3	102,02	1,52	1,52	1	-2,52	0,00	0
4	99,59	-0,91	0,61	2	-0,09	0,00	0
5	99,81	-0,69	0,00	0	-0,31	0,00	0
6	99,86	-0,64	0,00	0	-0,36	0,00	0
7	99,60	-0,90	0,00	0	-0,10	0,00	0
8	100,35	-0,15	0,00	0	-0,85	0,00	0
9	99,38	-1,12	0,00	0	0,12	0,12	1
10	100,83	0,33	0,33	1	-1,33	0,00	0
11	99,73	-0,77	0,00	0	-0,23	0,00	0
12	98,00	-2,50	0,00	0	1,50	1,50	1
13	99,72	-0,78	0,00	0	-0,22	1,28	2
14	101,34	0,84	0,84	1	-1,84	0,00	0
15	98,77	-1,73	0,00	0	0,73	0,73	1
16	99,94	-0,56	0,00	0	-0,44	0,29	2
17	99,47	-1,03	0,00	0	0,03	0,32	3
18	99,95	-0,55	0,00	0	-0,45	0,00	0
19	100,33	-0,17	0,00	0	-0,83	0,00	0
20	99,57	-0,93	0,00	0	-0,07	0,00	0
21	100,82	0,32	0,32	1	-1,32	0,00	0
22	100,23	-0,27	0,05	2	-0,73	0,00	0
23	100,68	0,18	0,23	3	-1,18	0,00	0
24	101,64	1,14	1,37	4	-2,14	0,00	0
25	100,86	0,36	1,73	5	-1,36	0,00	0
26	99,28	-1,22	0,51	6	0,22	0,22	1
27	101,41	0,91	1,42	7	-1,91	0,00	0
28	100,21	-0,29	1,13	8	-0,71	0,00	0
29	101,85	1,35	2,48	9	-2,35	0,00	0
30	101,43	0,93	3,41	10	-1,93	0,00	0
31	103,00	2,50	5,91	11	-3,50	0,00	0

## Funcionamento do Algoritmo

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

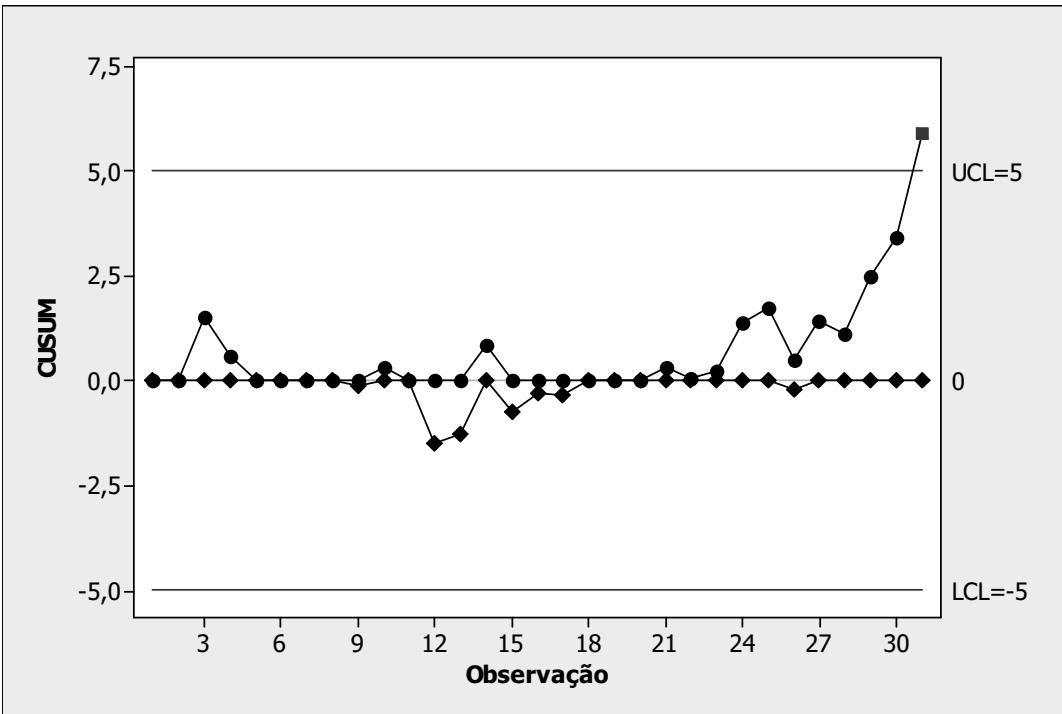
Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- O aumento de  $S_i^+$  indica **aumento** na média do processo;
- O valor de  $d$  serve para evitar que o risco  $\alpha$  seja elevado, pois somente valores de  $X_i > \mu_0 + d$  é que incrementam  $S_i^+$
- $S_i^+$  é limitado para valores positivos ou nulos para evitar seu decrescimento indefinido;
- $S_i^-$  comporta-se de maneira similar a  $S_i^+$ , mas seu aumento indica **redução** da média do processo;
- Não serão sinalizados deslocamentos abaixo de  $d$  ( $|\mu_1 - \mu_0| < |d|$ ).
- Contadores ( $N^+$  e  $N^-$ ): indicam o momento de alteração da média.  $N^+$  é zerado sempre que  $S_i^+ = 0$  (idem para  $N^-$ ).

## Gráfico de Controle CUSUM



## Comentários

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- O  $S_{31}^+ > K$  sinalizou alteração da média;
- O instante da alteração é dado por  $31 - N_{31}^+ = 20$
- A estimativa da magnitude do deslocamento da média é dada por:

$$\bar{\delta} = \begin{cases} d + \frac{S_i^+}{N_i^+}, & \text{se } S_i^+ > K \\ -d - \frac{S_i^-}{N_i^-}, & \text{se } S_i^- > K \end{cases}$$

- No exemplo  $S_{31}^+ > K$  sinaliza alteração de  $\bar{\delta} = 0,5 + 5,91/11 = 1,04$ .
- O deslocamento simulado foi  $\delta = 2d = 1$ .

# Escolha do valor de $K$

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- $K$  é ajustado conforme valor de  $d$ , para manter  $NMA = 370$ ;
- Para  $K$  fixo, ao variar-se  $d$ , altera-se a freqüência de alarmes falsos;
- Não há expressão simples que relate  $\alpha$  com  $K$  para determinado valor de  $d$ ;
- Recomenda-se adotar  $K = 5\sigma_0$ , que dá bons resultados para  $0,6\sigma_0 \leq |\mu_1 - \mu_0| \leq 1,6\sigma_0$ .



## Gráfico de $\bar{X}$ vs. Algoritmo CUSUM

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

Número médio de amostras até o sinal ( $NMA$ )					
	Gráf. $\bar{X}$	Algoritmo CUSUM, com $K = k\sigma_0/\sqrt{n}$ e $d = \delta\sigma_0/\sqrt{n}$			
$ \mu_1 - \mu_0 /\sigma_0/\sqrt{n}$	$k = 3$	$k = 8,010$ $\delta = 0,25$	$k = 4,774$ $\delta = 0,5$	$k = 3,339$ $\delta = 0,75$	$k = 2,517$ $\delta = 1,0$
0	370	<b>370</b>	370	370	370
0,2	308	<b>116</b>	164	206	239
0,4	200	<b>40,4</b>	54,5	77,8	105
0,6	120	<b>22,2</b>	24,6	33,5	46,8
0,8	71,6	15,1	<b>14,4</b>	17,6	23,6
1,0	<b>43,9</b>	11,4	<b>9,93</b>	10,9	13,6
1,2	<b>27,8</b>	9,18	<b>7,52</b>	7,62	8,79
1,4	18,3	7,69	6,06	<b>5,80</b>	6,38
1,6	12,4	6,63	5,08	<b>4,68</b>	4,81
1,8	8,69	5,84	4,38	3,92	<b>3,89</b>
2,0	<b>6,30</b>	5,22	3,86	3,39	<b>3,26</b>
3,0	<b>2,00</b>	3,48	2,49	2,09	<b>1,86</b>
4,0	<b>1,19</b>	2,67	1,96	1,55	<b>1,32</b>



# Comparação com Gráfico de $\bar{X}$

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- A medida que  $d$  diminui, o CUSUM detecta pequenos desajustes mais rapidamente.
- Para grandes desvios da média, o gráfico de  $\bar{X}$  sinaliza mais rapidamente que o CUSUM;
- Generalização do algoritmo:  
Para  $n > 1$ , substituir  $X_i$  por  $\bar{X}_i$  de maneira que:

$$\begin{aligned} S_i^+ &= \max\{0, \bar{X}_i - (\mu_o + d) + S_{i-1}^+\} \\ S_i^- &= \max\{0, (\mu_o - d) - \bar{X}_i + S_{i-1}^-\} \end{aligned}$$

comparando com:  $K = 5\sigma_0/\sqrt{n}$ ;

- Para gráfico de  $\bar{X}$  é vantajoso usar  $n > 1$ , com o algoritmo CUSUM, nem sempre.

# CUSUM com Resposta Inicial Rápida

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Após a intervenção, não se tem certeza se todas as causas especiais foram eliminadas.
- Neste caso, no reinício do processo, o algoritmo CUSUM sinalizará o problema tarde;
- O artifício de Resposta Rápida Inicial (RIR) recomeça o monitoramento com:

$$S_0^+ = S_0^- = \frac{K}{2}$$

- Se o processo estiver fora de controle,  $NMA_{RIR} \approx 60\%NMA_s / RIR$ , para deslocamentos  $\geq 2d$ .

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

## Gráfico de Controle de EMWA

## Características do Gráfico

Qualidade na empresa

Fundamentos de CEP

Gráfico por variáveis

Capacidade do processo

Gráficos por atributos

Gráficos com autocorrelação

Outras técnicas

Referências Bibliográficas

- Outra alternativa ao gráfico de Shewhart para detectar pequenos deslocamentos na média do processo;
- Plotam-se os valores da estatística:

$$Y_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Y_{i-1}$$

com  $0 < \lambda \leq 1$  e  $Y_0 = \mu_0$

- Seu desempenho é similar ao do gráfico CUSUM e também é geralmente utilizado com *observações individuais*.

# Construção do Gráfico

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Parâmetros do Estimador:

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= \mu_0 \\ \sigma_{Y_i}^2 &= \frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \sigma^2 \end{aligned}$$

- Limites  $3\sigma$ :

$$\begin{aligned} LSC &= \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \\ LM &= \mu_0 \\ LIC &= \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)} [1 - (1-\lambda)^{2i}]} \end{aligned}$$

- Quando  $i$  cresce,  $[1 - (1-\lambda)^{2i}] \rightarrow 1$ , logo os limites tendem para  $\mu_0 \pm k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$ .

## Exemplo

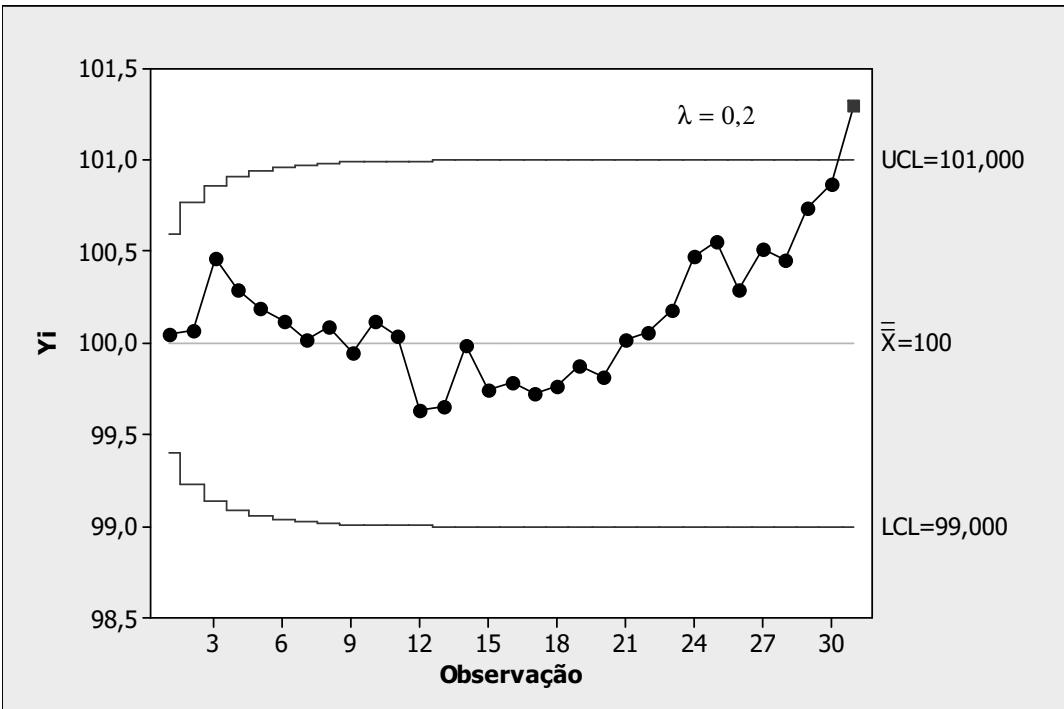
Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Simulação de pequeno deslocamento de média em carta com 30 valores individuais, com:
- Dados da Simulação:

$$\begin{aligned} X_i &\sim N(100, 1), & i = 1, \dots, 20 \\ X_i &\sim N(101, 1), & i = 21, \dots, 30 \end{aligned}$$

- Gráfico de EMWA construído com  $\lambda = 0,20$  e  $k = 2,859$ .

## Gráfico de Controle EWMA



## Comentários sobre o Gráfico

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

- Até  $n = 20$  ( $\mu = \mu_0$ ),  $Y_i$  oscila em torno da linha média. Após  $\mu = \mu_1$ ,  $Y_i$  se afasta gradualmente da linha média;
- $Y_i$  crescerá (ou decrescerá) até atingir o novo valor da média (no exemplo, 101) e passará a oscilar em torno da mesma

# Gráfico de $\bar{X}$ vs. Gráfico EWMA

Número médio de amostras até o sinal (NMA)					
	Gráfico $X$	Gráfico de Controle EWMA			
$\frac{ \mu_1 - \mu_0 }{\sigma_0 / \sqrt{n}}$	$\lambda = 1,00$ $k = 3,000$	$\lambda = 0,10$ $k = 2,701$	$\lambda = 0,20$ $k = 2,859$	$\lambda = 0,50$ $k = 2,978$	
0	370	<b>370</b>	370	370	370
0,2	308	<b>123</b>	162	238	
0,4	200	<b>41,2</b>	55,4	106	
0,6	120	<b>20,9</b>	25,3	49,6	
0,8	71,6	<b>13,4</b>	14,6	26,0	
1,0	43,9	<b>9,74</b>	9,80	15,2	
1,2	27,8	<b>7,64</b>	<b>7,27</b>	9,88	
1,4	18,3	6,30	<b>5,77</b>	6,96	
1,6	12,4	5,38	<b>4,78</b>	5,23	
1,8	8,69	4,70	<b>4,10</b>	4,15	
2,0	6,30	4,18	3,59	<b>3,42</b>	
3,0	2,00	2,76	2,31	<b>1,85</b>	
4,0	<b>1,19</b>	2,14	1,81	1,30	

## Valor de $\lambda$

- Para menores valores de  $\lambda$ , o gráfico detecta desajustes maiores mais rapidamente ( $\lambda$  pequeno faz com que os dados históricos tenham maior peso);
- Para  $\lambda = 1$  é o gráfico de Shewhart (dados histórico sem nenhuma influência);
- Para  $\lambda = 0$ , o peso de qualquer observação será nulo ( $Y_i = Y_0 = \mu_0$ );
- Para uso do gráfico com  $n > 1$ , deve-se substituir  $X_i$  por  $\bar{X}_i$  e  $\sigma_0$  por  $\sigma_0 \sqrt{n}$ .

# Referências bibliográficas

Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

-  COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K. e CARPINETTI, L. C. R. *Controle estatístico de qualidade*. Atlas, 2004.
-  MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. 4a. Edição LTC, 2004.
-  WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1995.
-  WERKEMA, M. C. C. *Avaliação da qualidade de medidas*. Fundação Cristiano Ottoni, 1996.
-  DERMAN, C. and ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. Academic Press, 1997.



Qualidade na empresa  
Fundamentos de CEP  
Gráfico por variáveis  
Capacidade do processo  
Gráficos por atributos  
Gráficos com autocorrelação  
Outras técnicas  
Referências Bibliográficas

## Controle de Qualidade

Lupércio França Bessegato

Especialização em Estatística

