

Controle Estatístico de Processo: Cartas de Controle

Lupércio França Bessegato
Dep. Estatística/UFJF

- Prof. Lupércio França Bessegato
Departamento de Estatística – UFJF
E-mail: lupercio.bessegato@ufjf.edu.br
Página: www.ufjf.br/lupercio_bessegato

Roteiro

1. Introdução
2. Monitoramento de Processos Univariados
3. Gráficos de $\bar{X}$ e R
4. Monitoramento de Processos Multivariados
5. Planejamento Econômico de Gráficos de Controle
6. Referências

Introdução

Variabilidade

- Todos os processos apresentam variabilidade
 - Fontes de variação:
 - Naturais
 - Excepcionais
 - Temporais
 - Erros de medida
- Processo = conjunto de causas de variação

Variabilidade de Processo

- Causas comuns ou aleatórias
 - ✓ variação que é **rotineira**, faz parte do processo
(é esperada inclusive se o processo não for alterado)
- Causas especiais ou atribuíveis ou assinaláveis
 - ✓ variação **excepcional**, está fora dos limites da rotina
 - ✓ (interpretada como sinal de mudança do processo)

Definição Moderna de Qualidade

- Qualidade é inversamente proporcional à variabilidade

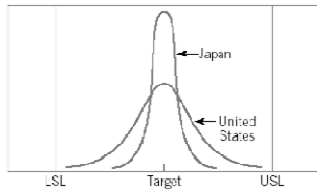
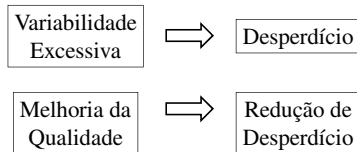


Figure 1-2 Distributions of critical dimensions for transmissions.

Melhoria da Qualidade

- Redução da variabilidade nos processos e produtos



Métodos Estatísticos para Melhoria da Qualidade

- Controle Estatístico do Processo
 - ✓ Gráficos de Controle
 - ✓ Capacidade de Processo
 - ✓ Análise Sistema de Medidas
- Planejamento de Experimentos
- Amostragem de Aceitação

- Qualidade de projeto (*design*):
 - ✓ Determinação das condições ótimas dos parâmetros
 - ✓ Procedimento *off-line*
 - ✓ Usado em atividade de desenvolvimento ou nos estágios iniciais de manufatura

- Qualidade de conformação:
 - ✓ Como o produto corresponde às especificações de projeto
(*Controle Estatístico de Processo*)
 - ✓ Procedimento *on-line*
 - ✓ Usado durante o processo de produção

Métodos de Engenharia de Qualidade

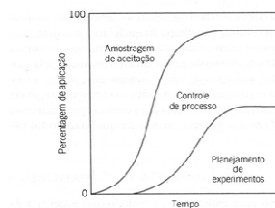


Fig. 1-7 Diagrama de fases do uso de métodos da engenharia da qualidade.

- Os sistemas modernos de garantia da qualidade enfatizam menos a amostragem de aceitação, focando CEP e DOE

Melhoria Contínua da Qualidade

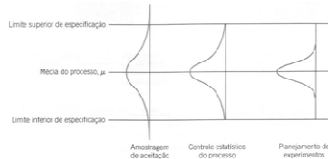


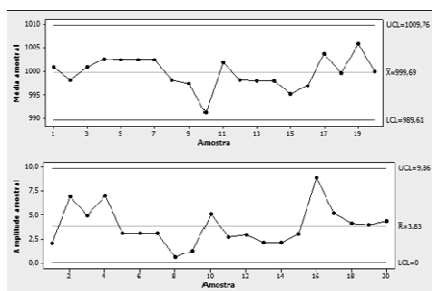
Fig. 1-8 Aplicação de técnicas de engenharia da qualidade e a sistemática redução na variabilidade do processo

- **Objetivo Principal:**
 ✓ Redução sistemática da variabilidade nas características chave da qualidade do produto

Controle Estatístico do Processo

- Acompanhamento contínuo de um fluxo de atividades, em que podem ser realizados ajustes, para que o resultado do esforço esteja em conformidade com um padrão definido

Gráficos de Controle



- É uma das principais técnicas de CEP

Terminologia

- Processo sob controle:
 - √ processo **previsível**
(prognóstico é a essência da gestão!)
 - √ variação rotineira
- Processo fora de controle
 - √ processo imprevisível
 - √ variação excepcional

Monitoramento de Processos

Monitoramento de Processos

- Os processos devem ser monitorados para detectar a presença de causas especiais
 - √ Detectada sua presença, investigar a causa especial
 - √ Identificada, intervém-se para eliminá-la

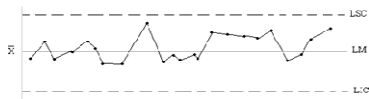
Gráficos de Controle

- Principal ferramenta para monitorar processos
 - ✓ Análise periódica
 - amostra de n itens retiradas a cada intervalo de tempo
 - ✓ Forma do gráfico de controle:
 - Linha média
 - Limites de controle (superior e inferior)
- Importante:
 - ✓ Um gráfico de controle não identifica quais as causas especiais atuando no processo

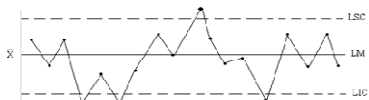
Regra de Decisão

- Processo sob controle
 - ✓ Os pontos distribuem-se aleatoriamente em torno da linha média
 - ✓ Não se intervém no processo
- Suspeita de ocorrência de causa especial
 - ✓ Um dos pontos cai na região de ação do gráfico
 - ✓ Afastamento excessivo da linha média
 - ✓ Intervém-se no processo
 - Identificação e ação corretiva

- Processo sob controle



- Processo fora de controle



- ✓ Pontos fora dos limites de controle
- ✓ Pontos não apresentam configuração aleatória

Gráficos de Controle – Características

- Eficácia:
 - ✓ Medida da rapidez com que são detectadas alterações no processo
- Parâmetros de planejamento:
 - ✓ tamanho das amostras
 - ✓ intervalo de tempo entre amostragens
 - ✓ limites de controle
- Escolha estatística dos parâmetros:
 - ✓ *Trade-off* entre custo de operação e eficácia

Gráficos de Controle

- Gráficos do comportamento do processo
 - ✓ Ponto sob controle → ponto dentro dos limites
 - ✓ Ponto fora do controle → ponto fora dos limites
 - interpretados como sinal de **variação excepcional**
 - sinal de que há relações de causa e efeito dominantes que afetam o processo

Tipos de Gráficos de Controle

- Gráfico de Variáveis
 - ✓ Monitoram características de qualidade medidas em uma escala contínua
- Gráfico de Atributo:
 - ✓ Monitoram característica de qualidade categórica ou de contagem

Gráficos de Variável

- ✓ Gráfico $\bar{X}$
- ✓ Gráfico R
- ✓ Gráfico S
- ✓ Gráfico de medidas individuais
- ✓ Gráfico de amplitude móvel
- ✓ Outros tipos
 - Gráfico CUSUM
 - Gráfico EWMA

Gráfico $\bar{X}$ - R ou $\bar{X}$ - S

Gráfico X-AM

Em geral, têm como pressupostos normalidade e independência

Gráficos de Atributos

- Gráfico p Modelo Binomial
 - ✓ Monitora proporção de defeituosos
- Gráfico np
 - ✓ Monitora número de itens não-conformes
- Gráfico c Modelo Poisson
 - ✓ Monitora número de não-conformidades em unidade de produto
- Gráfico u
 - ✓ Monitora número médio de não conformidades por unidade de produto

Gráficos de Controle $\bar{X}$ e R

Roteiro

1. Variabilidade do Processo
2. Estimação da Variabilidade do Processo
3. Construção dos Gráficos – Fase 1
4. Desempenho do Gráficos de $\bar{X}$
5. Desempenho do Gráfico de R
6. Desempenho Conjunto dos Gráficos $\bar{X}$ e R
7. Alternativas para Controle da Variabilidade
8. Regras Suplementares para Gráficos de $\bar{X}$
9. Planejamento dos Gráficos de $\bar{X}$

Variabilidade do Processo

Variabilidade do Processo

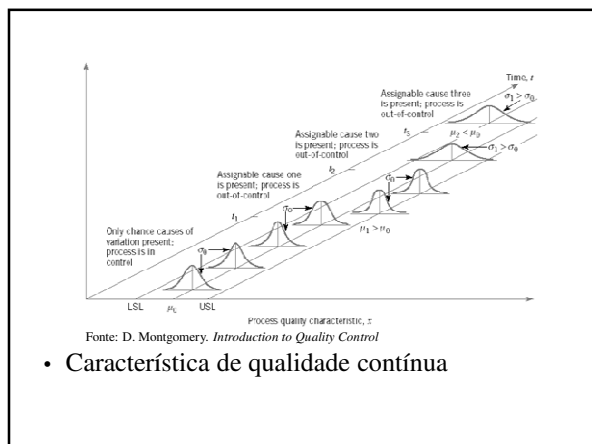
- Relaciona-se com a diferença entre as unidades produzidas
 - √ Variabilidade grande
Fácil observar as diferenças
 - √ Variabilidade pequena
Difícil observar as diferenças

Variabilidade Natural

- Resultados de pequenas perturbações (ou causas aleatórias)
 - ✓ Não é possível ser evitada
 - ✓ Estado de controle estatístico (sob controle)
 - Apresenta apenas variabilidade natural
 - ✓ Isento de causas especiais

Causa Especial

- Problema ou modo anormal de operação do processo
 - ✓ Desloca a distribuição da variável aleatória de interesse
 - Tira a média do valor-alvo e/ou aumenta sua dispersão
 - ✓ Pode ser corrigida ou eliminada
 - ✓ Processo fora de controle
 - Opera em presença de causas especiais



Variáveis Contínuas

- Para monitoramento de característica de qualidade contínua são usuais:
 - ✓ Gráfico de Média $\bar{X}$:
 - monitorar centralidade do processo (ajuste do processo)
 - ✓ Gráfico de Amplitude R:
 - monitorar dispersão do processo (estabilidade do processo)

Critérios para Monitoramento

- “Se o processo estiver em controle, **evite ajustes desnecessários**, que só tendem a aumentar a variabilidade” (Shewhart);
- Processo sob controle:
 - ✓ Deseja-se que raramente caia um ponto na região de ação do gráfico
 - depende da abertura do gráfico
 - ✓ Busca-se não intervir equivocadamente em um processo sob controle
 - Em geral, intervenções desnecessárias geram custos

Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}}$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}}$$
- Parâmetros da Média Amostral:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu_0$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$
 - ✓ μ_0 : média do processo sob controle
 - ✓ σ_0 : desvio-padrão do processo sob controle

Escolha da Abertura do Gráfico

- Processo sob controle (estável e ajustado)
 - √ Intervalo $\pm 3\sigma_0/\sqrt{n}$ engloba 99,73% dos valores de $\bar{X}$
- Caso algum valor de X caia fora desse intervalo
 - √ É mais verossímil que a alteração da média do processo (μ) seja devido a alguma causa especial

Amplitude Amostral

$$R = X_{\max} - X_{\min}$$

- Distribuição amostral da amplitude
 - √ Hipótese:
 - população normal com média μ e desvio-padrão σ
 - √ $E(R) = \mu_R = d_2\sigma$
 - √ $DP(R) = \sigma_R = d_3\sigma$

Amplitude Relativa

$$W = \frac{R}{\sigma}$$

- Distribuição amostral da amplitude
 - √ Hipótese:
 - população normal com média μ e desvio-padrão σ
 - √ $E(W) = \mu_W = d_2$
 - √ $Var(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$
 - √ Parâmetros dependem apenas do tamanho amostral
 - √ Distribuição acumulada de W :
 - Tabela B

Valores de d_2 e d_3

n	d_2	d_3
2	1,128	0,853
3	1,693	0,888
4	2,059	0,880
5	2,326	0,864
6	2,534	0,848
7	2,704	0,833
8	2,847	0,820
9	2,970	0,808
10	3,078	0,797
11	3,173	0,787
12	3,258	0,778
13	3,336	0,770
14	3,407	0,763
15	3,472	0,756

Gráfico de R

- Limites de Controle (exatos):

$$\begin{aligned} E(R) &= d_2\sigma_0 & LSC_R &= d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0 = (d_2 + 3d_3)\sigma_0 \\ \text{Var}(R) &= d_3^2\sigma_0^2 & LM_R &= d_2\sigma_0 \\ & & LIC_R &= d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0 = (d_2 - 3d_3)\sigma_0 \end{aligned}$$

- Se $LIC_R < 0$
 $\checkmark$ Adota-se $LIC_R = 0$
- Quando R for maior que LSC_R
 $\checkmark$ Alarme de aumento do desvio-padrão do processo

- μ_0 e σ_0 não conhecidos com precisão absoluta
- Limites de controle estimados:

$$\begin{aligned} \widehat{LSC}_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 + 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \\ \widehat{LM}_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 \\ \widehat{LIC}_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 - 3\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \\ \widehat{LSC}_R &= (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 \\ \widehat{LM}_R &= d_2\hat{\sigma}_0 \\ \widehat{LIC}_R &= (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 \end{aligned}$$

Construção do Gráfico de Controle

- μ_0 e σ_0 são desconhecidos e devem ser estimados
- Certeza de processo sob controle durante amostragem
 - ✓ $\bar{X}$ estima μ_0
 - ✓ S^2 estima σ^2
 - ✓ Na prática, não se sabe se o processo permanece isento de causas especiais durante amostragem

Estimação da Variabilidade do Processo

Subgrupos Racionais

- Retiram-se pequenas amostras a intervalos de tempos regulares
 - ✓ Cada amostra (ou subgrupo racional) constitui-se de unidades produzidas quase no mesmo instante
 - ✓ Difícilmente ocorrerá uma causa especial durante a formação do subgrupo
 - ✓ O procedimento minimiza a probabilidade de amostra com elementos de populações diferentes

Importante

- Perturbação entre a retirada de amostras não aumentará a variabilidade **em cada** amostra, mas **entre** amostras
 √ Aumento da variabilidade de média amostrais
- Estima-se a variabilidade do processo com base na dispersão de valores **dentro** da amostra

Estimação de σ – Desvio-padrão Amostral (S)

- Dada amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ com $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$
 √ S: desvio-padrão amostral
 √ S é viciado para $\sigma \Rightarrow E(S) \neq \sigma$
- Se a amostra aleatória provém de uma normal:

$$\sqrt{E(S)} = c_4 \sigma, \text{ com } c_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \quad \Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-y} y^{r-1} dy$$
 √ $c_4 < 1, \forall n$, e $c_4 \rightarrow 1$, quando n cresce

Estimação de σ – Amplitude Amostral (R)

- Dada amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ com $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$
 √ R: amplitude amostral

$$R = \max\{X_1, \dots, X_n\} - \min\{X_1, \dots, X_n\}$$
 √ R é viciado para $\sigma \Rightarrow E(R) \neq \sigma$
- Se a amostra aleatória provém de uma normal:
 √ $E(R) = d_2 \sigma$
 √ $\frac{R}{d_2}$ é estimador não viesado de $E(R) \Rightarrow$
 $\frac{R}{d_2}$ é não viciado para estimar σ

Valores de c_4 e d_2

$$E(S) = c_4 \sigma$$

$$E(W) = \mu_W = d_2$$

$$\text{Var}(W) = \sigma_W^2 = d_3^2$$

n	c_4	d_2
2	0,798	1,128
3	0,886	1,693
4	0,921	2,059
5	0,940	2,326
6	0,952	2,534
7	0,959	2,704
8	0,965	2,847
9	0,969	2,970
10	0,973	3,078
11	0,975	3,173
12	0,978	3,258
13	0,979	3,336
14	0,981	3,407
15	0,982	3,472

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Simulação de Processo sob Controle:

✓ Distribuição: $X \sim N(1000, 4)$

✓ $m = 8$ – quantidade de subgrupos

✓ $n = 5$ – tamanho do subgrupo

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_i$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,3	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,3	1000,2	10,6	4,6
	Médias					999,8	9,2	3,9

Estimador S_A

- Considera uma única amostra de mn elementos

$$S_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2}{mn - 1}}$$

✓ x_{ij} : j -ésimo elemento do i -ésimo subgrupo

✓ n : tamanho do subgrupo

✓ m : número de subgrupos

✓ média global: $\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$

✓ c_4 : correção de vício
depende de mn

√ Estimativa de S_A :

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_{i \text{ bar}}$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,3	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,8	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
					Médias	999,8	9,2	3,9

s = 4,0657

$$S_A = \frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2}{mn - 1}}$$

$$S_A = \frac{1}{c_4(40)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^5 (X_{ij} - 999,8)^2}{8(5) - 1}} = \frac{4,0657}{0,9936} = 4,09$$

Estimador S_B

- Considera desvio-padrão das médias dos m subgrupos

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m - 1}} \right] \sqrt{n}$$

$$\sqrt{\sigma} = \sigma_{\bar{X}} \sqrt{n}$$

$$\sqrt{[.]}$$
: estimador de $\sigma_{\bar{X}}$

$$\sqrt{c_4}$$
: correção de vício
depende de m

√ Estimativa de S_B

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_{i \text{ bar}}$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,3	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,8	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
					Médias	999,8	9,2	3,9

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{m - 1}} \right] \sqrt{n}$$

$$S_B = \left[\frac{1}{c_4(8)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (\bar{X}_i - 999,8)^2}{8 - 1}} \right] \sqrt{5} = \frac{1,8208}{0,96503} \sqrt{5} = 4,22$$

Estimador S_C

- Considera o desvio-padrão dos m subgrupos

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

$$\sqrt{\bar{S}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

✓ c_4 : correção de vício

depende de n

✓ $\bar{S}$ é mais preciso que S_i para estimar $c_4\sigma$
variância m vezes menor

✓ Estimativa de S_C

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_i$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,9	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,0	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
				Médias		999,8	9,2	3,9

$$S_C = \frac{\bar{S}}{c_4} \quad S_C = \frac{\bar{S}}{c_4(5)} = \frac{3,880}{0,9399} = 4,13$$

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \text{ com } S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

Estimador S_D

- Considera a amplitude amostral R

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\sqrt{\bar{R}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

✓ R_i : amplitude amostral do i -ésimo subgrupo

✓ d_2 : correção de vício

depende de n

✓ Estimativa de S_D

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_{\text{bar}}$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,9	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,9	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
					<i>Médias</i>	999,8	9,2	3,9

$$S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad S_D = \frac{\bar{R}}{d_2(5)} = \frac{9,2}{2,32593} = 3,94$$

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$$

✓ Estimação Variabilidade do Processo (σ_0) – Resumo

Variabilidade entre amostras		Variabilidade dentro Amostras	
$S_A = 4,0918462$	$S_B = 4,21896$	$S_C = 4,12796$	$S_D = 3,93929$
$s_{\text{global}} = 4,066$	$s_{\text{medias}} = 1,8208$	$s_{\text{varm}} = 3,880$	$R_{\text{harm}} = 9,2$
$c4(40) = 0,99361$	$c4(8) = 0,96503$	$c4(5) = 0,93999$	$d2(5) = 2,32593$
m x n = 40	m = 8	n = 5	

Subgrupo (i)	Amostra					Estatísticas Amostrais		
	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_{\text{bar}}$	R_i	S_i
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6
2	1001,3	995,3	999,9	999,1	996,5	998,2	6,0	2,4
3	1001,2	1001,4	999,9	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7
6	1000,9	1004,2	999,2	997,8	997,9	1000,0	6,4	2,7
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,8	1002,7	8,1	3,5
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,8	1000,2	10,6	4,6
					<i>Médias</i>	999,8	9,2	3,9

Estimação da Variabilidade – Exemplo

- Processo com Influência de Causa Especial
- ✓ $X \sim N(1000,4)$ para $i \neq 2$ e $X \sim N(1010,4)$ para $i=2$
- ✓ $m=8$
- ✓ $n=5$

- Estimação Variabilidade do Processo (σ_0)

		Amostra					Estatísticas Amostrais		
Subgrupo (i)	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{i4}	X_{i5}	$\bar{X}_{\text{bar}}$	R_i	S_i	
1	992,9	1006,7	1002,7	1005,4	998,3	1001,2	13,8	5,6	
2	1008,2	1009,3	1010,8	1008,4	1010,8	1009,5	2,6	1,2	
3	1001,2	1001,4	999,0	997,8	994,2	998,7	7,2	2,9	
4	993,3	1002,1	998,7	993,6	996,6	996,9	8,8	3,7	
5	996,8	1006,4	1006,9	994,5	998,4	1000,6	12,4	5,7	
6	1000,9	1004,2	999,2	998,8	997,9	1000,0	6,4	2,7	
7	1000,2	1002,6	998,3	1006,4	1005,5	1002,7	8,1	3,5	
8	1003,3	996,1	1000,5	995,2	1005,5	1000,2	10,6	4,6	
				Médias		1001,2	8,7	3,7	

Variabilidade entre amostras			Variabilidade dentro Amostras		
$S_A = 5,1136338$	$S_B = 8,70713$		$S_C = 3,98076$	$S_D = 3,76566$	
$\sigma_{\text{global}} = 5,081$	$\sigma_{\text{amostras}} = 3,75778$		$\sigma_{\text{resíduos}} = 3,742$	$\sigma_{\text{resíduos}} = 8,7$	
$c4(40) = 0,90361$	$c4(8) = 0,969503$		$c4(5) = 0,93999$	$d2(5) = 2,32303$	
$m \times n = 40$	$m = 8$		$n = 5$		

Simulações – Comparação

	Causa Especial		Comentários
	isento	com	
S_A	4,1	5,1	Afetados pela causa especial (superestimam σ_0)
S_B	4,2	8,7	
S_C	4,1	4,0	Não afetados pela causa especial
S_D	3,9	3,8	Mais robustos a desajustes da média

Comentários

- S_A e S_B são muito afetados por deslocamentos da média
 - $\sqrt{S_A}$: baseado na dispersão de todos os pontos
 - $\sqrt{S_B}$: baseado nas diferenças entre médias amostrais
- S_C e S_D são insensíveis a causas especiais que altera, a média do processo
 - $\sqrt{S_C}$ e $\sqrt{S_D}$: Baseiam-se apenas na dispersão **dentro** das amostras

- Para subgrupos grandes ($n \geq 10$)
 - ✓ S_C usa mais informações que S_D (apenas duas)
 - ✓ S_C é mais eficiente que S_D
- Para subgrupos pequenos ($n < 10$)
 - ✓ S_D é praticamente tão preciso quanto S_C
- S_D será adotado como estimador de σ por ser robusto a alterações na média e por simplicidade de cálculo
 - ✓ Estimador mais usado em CEP

Uso dos Gráficos de Controle

- Fases no uso de um gráfico de controle:
 - ✓ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle
 - testar se o processo estava ou não sob controle quando os m subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas
 - obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2
 - ✓ Fase 2: Monitoramento da produção futura

Construção dos Gráficos – Fase 1

Limites Tentativos (1)

- Limites de controle obtidos quando são usadas amostras preliminares
 - ✓ Permitem determinar se o processo estava sob controle durante seleção de m amostras iniciais
- Para testar hipótese de controle do processo no passado:
 - ✓ Plotar valores de $\bar{X}$ e R

Limites Tentativos (2)

- ✓ Se todos os pontos caem dentro limites de controle e não se observa comportamento sistemático;
 - Processo está sob controle e limites de controle tentativos são apropriados
- ✓ Se um ou mais pontos caem na zona de ação do gráfico
 - Procuram-se causas especiais relacionadas com cada ponto na zona de ação dos gráficos
 - Identificada a causa especial, o ponto é descartado e os limites são recalculados
 - Prossegue-se com o procedimento até que todos os pontos caiam dentro dos limites de controle

Limites Tentativos (3)

- ✓ Se causa especial não é identificada
 - Descarta-se o ponto se houver indícios de que o ponto veio de distribuição característica de processo fora de controle
 - Retém-se os pontos, considerando-se apropriados os limites tentativos
(Se os pontos representam situação fora de controle, os limites resultantes serão folgados)
- ✓ Em geral, um ou dois pontos fora de controle não distorcem significativamente os limites de controle
- ✓ Se amostram futuras futuras ainda indicarem o controle do processo, então os pontos inexplicáveis podem ser seguramente descartados

Limites Tentativos (4)

- ✓ Caso ocorram vários pontos na zona de ação dos gráficos
 - Descarte de todos os pontos pode prejudicar o estabelecimento dos limites de controle
 - (Abordagem ignorará informação relevante contida nos dados)
 - É improvável o sucesso na procura da causa atribuível para cada um dos pontos fora de controle
 - Em geral é melhor se concentrar no *padrão* formado por esses pontos
 - (Causa atribuível associada ao padrão dos pontos foras de controle é identificada mais facilmente)

Estimativa dos Parâmetros – Recomendações

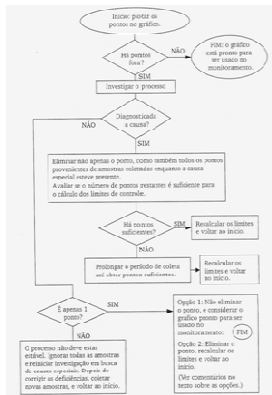
- Se identificada a causa especial e seu período de atuação, todas as amostras afetadas devem ser eliminadas
 - ✓ Mesmo que nem todas estejam na zona de ação
- Se houver poucas amostras restantes após descarte das afetadas
 - ✓ Prolongar o período de coleta das amostras destinadas à construção dos limites de controle

- Nem sempre é possível a causa especial que atuou no passado
 - ✓ É ainda mais difícil saber quais as amostras afetadas
- Importante:
 - ✓ Mesmo com o processo sob controle, há uma maior chance de um ou mais pontos caírem na zona de ação do gráfico, quando houver muitas amostras disponíveis
 - (maior que 25 ou 30 subgrupos)

- **Recomendação:**

- ✓ Se em uma sequência de 25 ou 30 pontos apenas um estiver fora dos limites de controle e não for possível diagnosticar nenhuma causa especial, o melhor é mantê-lo, construindo o gráfico de controle com base em todas as amostras

- **Estabelecimento de limites para os gráficos**



Fonte: Costa et. al. *Controle Estatístico de Qualidade*

Estimativas Iniciais do Processo

- **Estimadores dos parâmetros do processo**

(conjunto inicial de m amostras)

- ✓ Média do processo $\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$

Sensível a desajustes devido causas especiais

- ✓ Estimador desvio-padrão do processo

$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Insensível a desajustes devido causas especiais

- **Gráfico de R**

- ✓ Pode ser construído com o processo desajustado
- ✓ Em geral, a construção dos gráficos de controle é iniciada pelo Gráfico de R

- Exemplo

✓ Característica de qualidade: Volume de Sacos de leite:

✓ Conjunto de dados para estimação inicial:

– 25 subgrupos racionais de tamanho 5 ($m = 25$ e $n = 5$)

– Banco de dados: *BD_CQI.xls/guia: leite*

✓ Tabela 3.2(Branco Costa et. al)

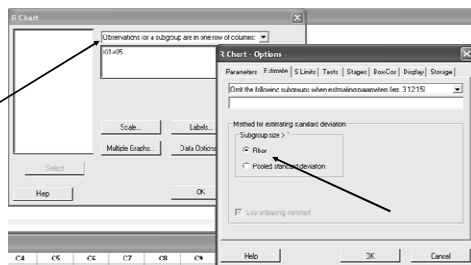
X1	X2	X3	X4	X5	R
1004,6	997,3	1003,0	1005,9	995,8	10,1
1001,6	1008,6	997,9	1001,3	999,1	10,7
999,1	992,6	1001,1	1001,8	1002,9	10,3
1007,9	997,5	991,3	997,8	1000,8	16,6
999,5	995,6	1004,3	995,6	991,4	12,9

✓ Estimação variabilidade do processo sob controle:

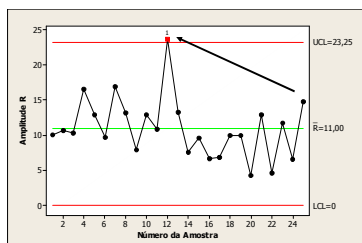
$$\hat{\sigma}_0 = S_D = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,996}{2,326} = 4,729$$

- Construção Gráfico de R das 25 observações

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,727 = 23,25$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 11,00$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,26$$

$$LIC_R = 0$$

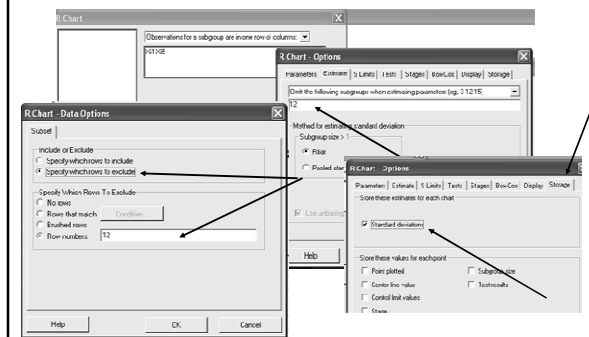
1ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\sigma_0 = 4,727$
- Amplitude da 12ª amostra é grande
 $\checkmark$ Necessária investigação para encontrar justificativa para aumento da variabilidade do processo
- Se for possível diagnosticar causa especial que afetou variabilidade
 $\checkmark$ Elimina-se amostra e estima-se novamente so
 (Se causa especial influenciou apenas essa amostra)

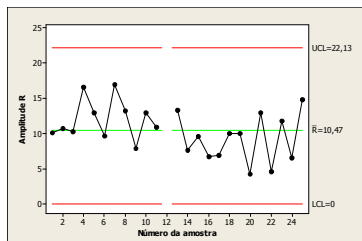
- Volume de sacos de Leite – Eliminação R_{12}

$$\checkmark m = 24 \text{ e } n = 5$$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > R



- Gráfico de R:



- Estimativas

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{10,467}{2,326} = 4,500$$

$$LSC_R = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 + 3 \times 0,864)4,500 = 22,13$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0 = 10,467$$

$$LIC_R = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0 = (2,326 - 3 \times 0,864)4,500 = -1,20$$

$$LIC_R = 0$$

2ª Estimativa – Conclusões

- 1ª Estimativa da variabilidade do processo
 $\sigma_0 = 4,500$
- A amplitude dos 24 subgrupos distribuem-se de forma aleatória em torno da média
 - ✓ $\bar{R}/d_2$ é estimativa confiável do desvio-padrão do processo
 - ✓ Processo aparenta estar sob controle durante Fase 1

Construção do Gráfico de $\bar{X}$

- É afetado por causas especiais que afetam:
 - ✓ média do processo, ou
 - ✓ dispersão do processo
- Só pode ser construído com o processo ajustado e estável
 - ✓ isento de todo tipo de causas especiais
 - ✓ Nesse caso, preocupação será apenas com estimativa da média do processo

Gráfico de $\bar{X}$

- Limites de Controle:

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}$$

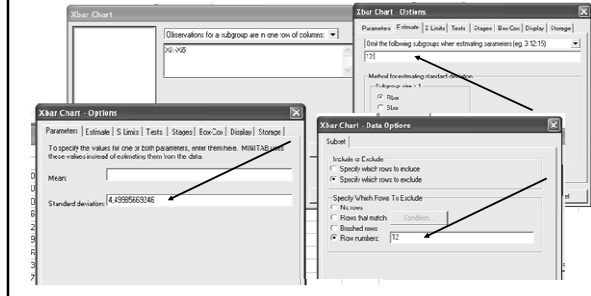
- Estimativa dos Parâmetros do Processo:

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

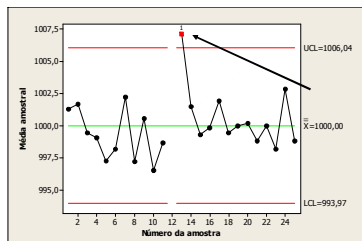
- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de $\bar{X}$
 $\sqrt{m = 24; n = 5}$
 $\sqrt{\text{Estimativas Parâmetros: } \bar{\bar{X}} = 1000,0; \hat{\sigma}_0 = 4,500}$

Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de $\bar{X}$
 $\sqrt{m = 24; n = 5}$
 $\sqrt{\text{Estimativas Parâmetros: } \bar{\bar{X}} = 1000,0; \hat{\sigma}_0 = 4,500}$

- Gráfico de $\bar{X}$:



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 106,04$$

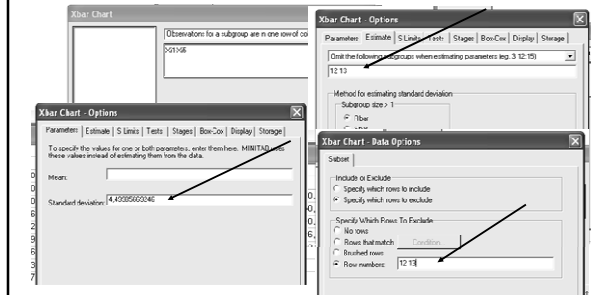
$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 1000,0$$

$$LIC_R = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,97$$

Comentários

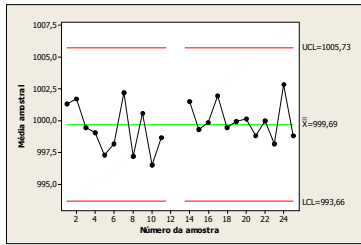
- O ponto $\bar{X}_{13} > LSC_{\bar{X}}$
- Comentários similares àqueles efetuados para R_{12}
 $\checkmark$ Elimina-se $\bar{X}_{13}$

- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de $\bar{X}$
 $\checkmark m = 23; n = 5$
 $\checkmark$ Estimativas Parâmetros: $\bar{\bar{X}} = 999,7; \hat{\sigma}_0 = 4,500$
Stat > Control Charts > Variable Charts for Subgroups > X



- Volume de Sacos de Leite – Gráfico de $\bar{X}$
 $\checkmark m = 23; n = 5$
 $\checkmark$ Estimativas Parâmetros: $\bar{\bar{X}} = 999,7; \hat{\sigma}_0 = 4,500$

- Gráfico de $\bar{X}$:



- Estimativas dos Limites de Controle

$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 1000,0 + 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 1005,73$$

$$LM_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} = 999,69$$

$$LIC_R = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = 999,69 - 3 \frac{4,500}{\sqrt{5}} = 993,66$$

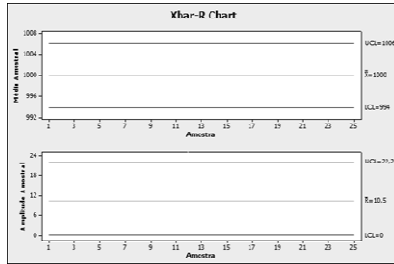
- Comentários:

- ✓ As médias dos 23 subgrupos distribuem-se aleatoriamente em torno da média e nenhuma excede os limites de controle
- ✓ Considera-se o processo ajustado e estável

Fase 2 – Monitoramento do Processo

- Estimação dos parâmetros (fase 1)
 - ✓ só deve ser encerrada quando o processo encontrar-se estável e ajustado
- Monitoramento do processo (fase 2)
 - ✓ Os limites de controle não devem mais ser alterados, a não ser que o processo produtivo sofra alterações permanentes
 - ✓ Decisão para detecção e eliminação de causa especial
 - Basta um valor de $\bar{X}$ ou de R estar na zona de ação para que decida-se pela intervenção no processo

- Volume de Sacos de Leites
- ✓ Gráfico $\bar{X}$ e R para monitoramento do processo



Limites de Controle – Notação Alternativa

- Limites de Controle do Gráfico X:

$$\begin{aligned}
 LSC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\hat{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\
 LM_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} \\
 LIC_{\bar{X}} &= \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\hat{R}}{d_2 \sqrt{n}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}
 \end{aligned}$$

$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$

- Limites de Controle do Gráfico R

$$\begin{aligned}
 LSC_R &= \bar{R} + 3 \hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3 d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 \bar{R} \\
 LM_R &= \bar{R} \\
 LIC_R &= \bar{R} - 3 \hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3 d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 \bar{R}
 \end{aligned}$$

$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}$
 $D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

- Apêndice VI: Fatores para Construção de Gráficos de Controle para Variáveis
- ✓ Montgomery, pág. 489

Observações n	Gráficos para Médias				Gráficos para Desvios Padrão				Gráficos para Limites de Controle				Gráficos para Amplitude				Fatores para Médias de Controle			
	A	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄	A ₁₅	A ₁₆	A ₁₇	A ₁₈	A ₁₉
2	2.221	1.880	2.655	0.7079	1.2533	0	3.267	0	2.080	1.328	3.6853	0.833	0	3.686	0	3.267	0	2.221	1.880	2.655
3	1.772	1.427	2.055	0.5400	1.0014	0	2.566	0	1.704	1.043	3.0077	0.688	0	3.158	0	2.572	0	1.772	1.427	2.055
4	1.500	1.229	1.826	0.4283	0.8544	0	2.166	0	1.483	0.900	2.6387	0.600	0	2.928	0	2.226	0	1.500	1.229	1.826
5	1.342	1.077	1.627	0.3438	0.7658	0	1.904	0	1.328	0.809	2.3539	0.544	0	2.704	0	2.004	0	1.342	1.077	1.627
6	1.225	0.961	1.507	0.2838	0.6910	0.020	1.709	0.020	1.234	0.734	2.1646	0.498	0	2.524	0	1.878	0	1.225	0.961	1.507
7	1.134	0.870	1.402	0.2366	0.6313	0.118	1.582	0.118	1.104	0.689	2.0249	0.459	0.024	2.384	0.024	1.794	0.024	1.134	0.870	1.402
8	1.061	0.812	1.309	0.2000	0.5853	0.183	1.413	0.179	1.019	0.631	1.8853	0.426	0.038	2.244	0.038	1.716	0.038	1.061	0.812	1.309
9	1.000	0.761	1.224	0.1709	0.5491	0.239	1.281	0.239	0.949	0.585	1.7667	0.398	0.047	2.104	0.047	1.584	0.047	1.000	0.761	1.224
10	0.946	0.717	1.157	0.1473	0.5213	0.286	1.176	0.286	0.885	0.552	1.6651	0.372	0.057	1.964	0.057	1.484	0.057	0.946	0.717	1.157
11	0.898	0.687	1.094	0.1281	0.5000	0.319	1.087	0.319	0.833	0.521	1.5767	0.350	0.067	1.824	0.067	1.384	0.067	0.898	0.687	1.094
12	0.856	0.654	1.046	0.1120	0.4838	0.346	1.014	0.346	0.788	0.500	1.5000	0.332	0.076	1.684	0.076	1.284	0.076	0.856	0.654	1.046
13	0.819	0.621	1.002	0.0989	0.4713	0.368	0.954	0.368	0.746	0.484	1.4353	0.316	0.085	1.544	0.085	1.234	0.085	0.819	0.621	1.002
14	0.786	0.596	0.960	0.0879	0.4620	0.386	0.904	0.386	0.709	0.469	1.3723	0.300	0.094	1.404	0.094	1.184	0.094	0.786	0.596	0.960
15	0.757	0.570	0.921	0.0789	0.4546	0.401	0.864	0.401	0.674	0.454	1.3143	0.286	0.103	1.284	0.103	1.134	0.103	0.757	0.570	0.921
16	0.731	0.546	0.886	0.0710	0.4488	0.416	0.824	0.416	0.642	0.449	1.2603	0.273	0.112	1.184	0.112	1.084	0.112	0.731	0.546	0.886
17	0.707	0.523	0.853	0.0642	0.4441	0.429	0.791	0.429	0.612	0.441	1.2103	0.261	0.121	1.104	0.121	1.034	0.121	0.707	0.523	0.853
18	0.685	0.502	0.822	0.0583	0.4402	0.440	0.761	0.440	0.584	0.440	1.1633	0.250	0.129	1.024	0.129	0.984	0.129	0.685	0.502	0.822
19	0.665	0.482	0.793	0.0533	0.4369	0.451	0.733	0.451	0.558	0.437	1.1193	0.240	0.137	0.944	0.137	0.934	0.137	0.665	0.482	0.793
20	0.646	0.464	0.767	0.0490	0.4341	0.460	0.707	0.460	0.534	0.430	1.0783	0.230	0.145	0.864	0.145	0.884	0.145	0.646	0.464	0.767
21	0.629	0.447	0.742	0.0453	0.4317	0.469	0.682	0.469	0.512	0.429	1.0393	0.220	0.153	0.784	0.153	0.834	0.153	0.629	0.447	0.742
22	0.613	0.431	0.718	0.0421	0.4296	0.477	0.656	0.477	0.491	0.426	1.0023	0.210	0.161	0.704	0.161	0.754	0.161	0.613	0.431	0.718
23	0.598	0.416	0.695	0.0392	0.4277	0.484	0.631	0.484	0.470	0.423	0.9673	0.200	0.169	0.624	0.169	0.674	0.169	0.598	0.416	0.695
24	0.583	0.401	0.673	0.0366	0.4260	0.491	0.607	0.491	0.449	0.420	0.9333	0.190	0.177	0.544	0.177	0.594	0.177	0.583	0.401	0.673
25	0.569	0.387	0.652	0.0342	0.4245	0.498	0.584	0.498	0.428	0.417	0.9003	0.180	0.185	0.464	0.185	0.514	0.185	0.569	0.387	0.652

Fonte: D. Montgomery

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3}{\sqrt{n}} & A_1 &= \frac{3}{c_1 \sqrt{n}} & A_2 &= \frac{3}{c_2 \sqrt{n}} & A_3 &= \frac{3}{c_3 \sqrt{n}} & A_4 &= \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} & A_5 &= \frac{3}{c_5 \sqrt{n}} & A_6 &= \frac{3}{c_6 \sqrt{n}} & A_7 &= \frac{3}{c_7 \sqrt{n}} & A_8 &= \frac{3}{c_8 \sqrt{n}} & A_9 &= \frac{3}{c_9 \sqrt{n}} & A_{10} &= \frac{3}{c_{10} \sqrt{n}} & A_{11} &= \frac{3}{c_{11} \sqrt{n}} & A_{12} &= \frac{3}{c_{12} \sqrt{n}} & A_{13} &= \frac{3}{c_{13} \sqrt{n}} & A_{14} &= \frac{3}{c_{14} \sqrt{n}} & A_{15} &= \frac{3}{c_{15} \sqrt{n}} & A_{16} &= \frac{3}{c_{16} \sqrt{n}} & A_{17} &= \frac{3}{c_{17} \sqrt{n}} & A_{18} &= \frac{3}{c_{18} \sqrt{n}} & A_{19} &= \frac{3}{c_{19} \sqrt{n}}
 \end{aligned}$$

Desempenho do Gráficos de $\bar{X}$

Desempenho dos Gráficos de Controle

- Capacidade de detectar perturbações no processo
- É importante para planeamento do gráfico:
 - √ Determinação do plano de amostragem
 - tamanho amostra; intervalo entre amostras
 - √ Estabelecimento dos Limites de Controle
 - abertura do gráfico

Teste de Hipóteses

		Decisão		
		Não Rejeitar H_0	Rejeitar H_0	
V	Decisão Correta	$1 - \alpha$	Erro Tipo I	α
F	Erro Tipo II	β	Decisão Correta	$1 - \beta$

Teste de Hipóteses do Gráfico de $\bar{X}$

- $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu \neq \mu_0$
- H_0 :
 - ✓ Processo em controle
 - ✓ Processo ajustado
 - ✓ Processo centrado no valor-alvo
 - ✓ Processo livre de causas especiais
- Não se rejeita H_0 toda vez em que $\bar{X}$ cai fora da zona de ação do gráfico (dentro dos limites de controle)

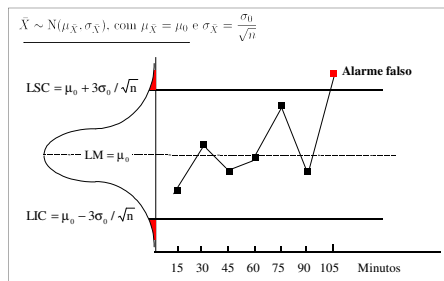
Erros de Decisão

- Alarme Falso (Erro tipo I)
 - ✓ considerar erroneamente o processo fora de controle
 - ✓ Consequência: intervir na hora errada
- Não detecção (Erro tipo II)
 - ✓ considerar erroneamente o processo em controle
 - ✓ Consequência: não intervir na hora certa

Medidas de Desempenho

- Supondo-se que as causas especiais não alterem σ
 - ✓ $\alpha = P\{\text{Erro tipo I}\}$
 $\alpha = P\{\{\bar{X} > LSC_{\bar{X}}\} \cup \{\bar{X} < LIC_{\bar{X}}\} | \mu = \mu_0\}$
 - ✓ $\beta = P\{\text{Erro tipo II}\}$
 $\beta = P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu \neq \mu_0\}$
 - ✓ Poder do Gráfico de Controle: $P_d = 1 - \beta$

- Gráfico de $\bar{X}$ – Ocorrência de Alarme Falso



Alarme Falso

- Para muitas distribuições, $\bar{X}$ tenderá para uma Normal mesmo para n pequeno
- Processo em controle com desempenho 3σ

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{Z > \frac{LSC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} + P\left\{Z < \frac{LIC_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right\} \\ &= P\{|Z| > 3\} \\ &= 0.0027 \end{aligned}$$

Número Médio de Amostras

L : Quantidade de amostras antes de alarme falso

$\sqrt{L} \sim \text{geométrica}(\alpha)$

$$P\{L = x\} = \alpha(1 - \alpha)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

$\sqrt{\text{NMAF}}$: número médio de amostras antes de alarme falso

$$\text{NMAF} = E(L) = \frac{1}{\alpha}$$

$\sqrt{\text{Para limites } 3\sigma, E(L) = 370,4}$

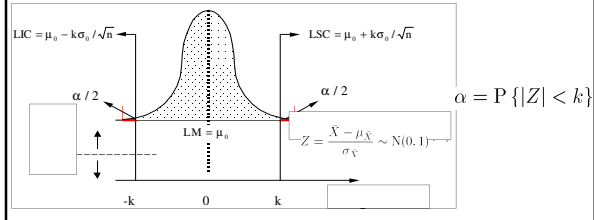
Influência da Abertura do Gráfico

- Semi-amplitude da região de controle:

$$k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

✓ Diminuição da frequência de alarmes falsos

– adotar $k > 3$



- Exemplo: Para $k = 3,10$

✓ Risco de alarme falso:

$$\alpha = P\{|Z| < k\} = P\{|Z| < 3,10\} = 0,0019$$

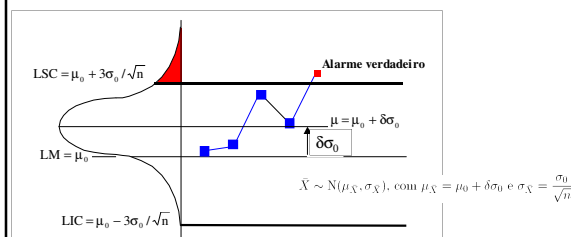
✓ Número Médio até Alarme Falso (tempo discreto) :

$$NMAF = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0019} = 516,7$$

✓ Tempo médio entre alarmes (tempo contínuo)

$$516,7 \times h$$

Gráfico de $\bar{X}$ – Alarme Verdadeiro



✓ Processo sob influência de causa especial (H_1 Verdadeira)
o ideal seria o 1º ponto cair na zona de ação do gráfico

Deslocamento da Média

- Sejam

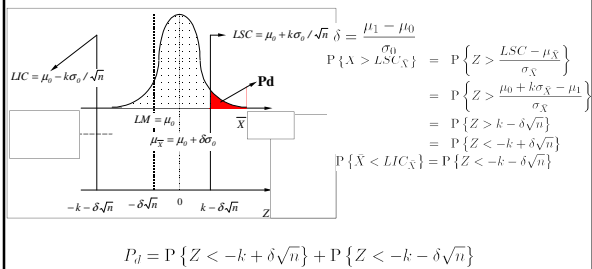
$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$$

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0}$$

- ✓ Se $\delta \geq 1,5$ o valor de $\bar{X}$ cairá na zona de ação rapidamente
- ✓ Se $\delta < 1,5$ haverá uma certa inércia para a média amostral cair na zona de ação

Poder do Gráfico de $\bar{X}$

P_d : P{um valor de $\bar{X}$ cair na zona de ação}



- No caso em que $k = 3$, $\delta = 1$ e $n = 4$

$$P_d = P\{Z < -k + \delta\sqrt{n}\} + P\{Z < -k - \delta\sqrt{n}\}$$

$$= P\{Z < -3 + 1\sqrt{4}\} + P\{Z < -3 - 1\sqrt{4}\}$$

$$= 0,1587 + 0,0000 = 0,1587$$

Alarme Verdadeiro

M : Qte. de amostras antes de um alarme verdadeiro

$\sqrt{M} \sim \text{geométrica } (P_d)$

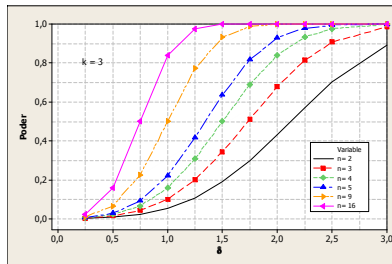
$$P\{M = x\} = P_d(1 - P_d)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

$\sqrt{\text{NMA}}$: número médio de amostras antes de alarme

$$\text{NMA} = E(M) = \frac{1}{P_d}$$

- Necessárias, em média, 6,3 amostras de tamanho 4 para detectar deslocamento de 1 desvio-padrão da média
- Necessárias em média 2 amostras de tamanho 9 para perceber o mesmo deslocamento ($P_d = 0,5$)

• Curvas de poder vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Amostra	Poder
2	0,06
4	0,159
9	0,50

- $\sqrt{n}$ não afeta a probabilidade de alarme falso
- $\sqrt{\text{Tamanho amostral}}$ tem grande influência no poder do gráfico de controle (erro tipo II)

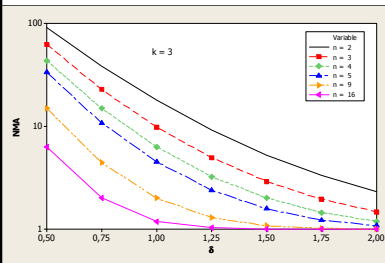
Rapidez de Sinalização

NMA: número médio de amostras até o sinal

$$\text{NMA} = \frac{1}{p}$$

- $\sqrt{\text{Se } H_0: \mu = \mu_0 \text{ for verdadeira, } p = \alpha \text{ e NMA} = 1/\alpha}$
- $\sqrt{\text{Se } H_0: \mu = \mu_0 \text{ for falsa, } p = P_d \text{ e NMA} = 1/P_d}$

• Curvas de NMA vs. deslocamento



Deslocamento de 1 desvio-padrão

Tamanho	Qte.
3	10
9	2

√ Deslocamento na média de 1 desvio-padrão
 – Em média, para detecção: 10 amostras de tamanho 3 ou 2 amostras de tamanho 9

Desempenho do Gráfico de R

Gráfico de R

• Limites de controle:

$$LSC_R = d_2\hat{\sigma}_0 + 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 + 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

$$LM_R = d_2\hat{\sigma}_0$$

$$LIC_R = d_2\hat{\sigma}_0 - 3d_3\hat{\sigma}_0 = (d_2 - 3d_3)\hat{\sigma}_0$$

• Estimativa do desvio-padrão do processo:

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Gráfico de R

- Hipóteses associadas:

$$\sqrt{H_0: \sigma = \sigma_0 \text{ vs. } \sigma \neq \sigma_0}$$

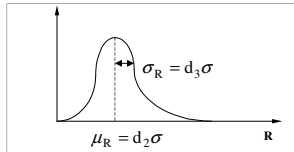
(σ_0 : desvio-padrão do processo sob controle)

- Medidas associadas

$$\alpha = 1 - P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0)$$

$$\beta = P(LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma \neq \sigma_0)$$

Cálculo de Probabilidades de R



✓ A distribuição de R é assimétrica

✓ A distribuição de R depende de n e σ

✓ A amplitude relativa $W = R/\sigma$ não depende de σ

✓ Valores para $P\{W \leq w_0 | n = n_0\}$ (Tabela B)

– Hipótese de que X tenha distribuição normal

– Uso da tabela: $P\{R < r_0\} = P\left\{W < \frac{r_0}{\sigma}\right\}$

Tabela B

Gráfico de R – Alarme Falso

- Processo sob controle e desempenho 3σ

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0, n = n_0\} \\ &= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\}\sigma_0 \leq R \leq (d_2 + 3d_3)\sigma_0 | n = n_0\} \\ &= P\{\max\{0, (d_2 - 3d_3)\} \leq W \leq (d_2 + 3d_3) | n = n_0\} \end{aligned}$$

✓ $\alpha > 0,0027$ (para limites 3σ)

✓ Para $2 \leq n \leq 6$, $LIC_R = 0$ ($d_2 < 3d_3$)

- NMAF: número médio de amostras até alarme falso

$$NMAF = \frac{1}{\alpha}$$

- Risco α para $n_0 = 2, 3, 4$ e 5

n	d ₂	d ₃	LIC _R	LSC _R	α	NMAF
2	1,128	0,853	0	3,69	0,0090	111
3	1,693	0,888	0	4,36	0,0060	167
4	2,059	0,880	0	4,70	0,0050	200
5	2,326	0,864	0	4,92	0,0047	213
6	2,534	0,848	0	5,08	0,0045	222
7	2,704	0,833	0,21	5,20	0,0044	227
10	2,847	0,820	0,69	5,47	0,0041	244

$$LIC_R = \max\{0, d_2 - 3d_3\}$$

$$LSC_R = d_2 + 3d_3$$

$$NMAF = \frac{1}{\alpha}$$

Gráfico de R – Poder

$$P_d = P\{R > LSC_R | n = n_0, \sigma = \sigma_1\}$$

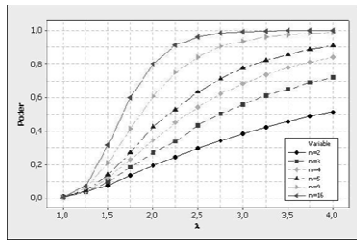
✓ Supondo $\sigma_1 = 2\sigma_0$

$$\begin{aligned} P_d &= P\left\{\frac{R}{\sigma_1} > \frac{(d_2 + 3d_3)\sigma_0}{\sigma_1} | n = n_0\right\} \\ &= P\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{2} | n = n_0\right\} \end{aligned}$$

✓ Para $n = 5$

$$\begin{aligned} P_d &= P\left\{W > \frac{2,326 + (3)(0,864)}{2} | n = 5\right\} \\ &= P\{W > 2,46 | n = 5\} = 1 - 0,5904 \approx 0,41 \end{aligned}$$

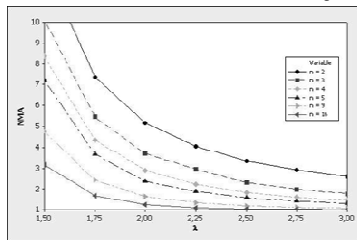
- Para $\sigma_1 = \lambda \sigma_0$
 λ : fator de aumento
 $P_d = P\left\{W > \frac{d_2 + 3d_3}{\lambda} | n = n_0\right\}$



Poder para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	P_d
2	0,20
5	0,41
16	0,80

- Número médio de amostras até detecção: $NMAF = \frac{1}{\alpha}$



NMAF para detectar aumento de 100% ($\lambda = 2$) em σ

n	NMAF
2	5
4	3

- Limites de controle para α pré-definido:

$$\frac{LIC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{\alpha/2}$$

$$\frac{LSC_R}{\hat{\sigma}_0} = w_{1-\alpha/2}$$

✓ $w_{\alpha/2}$: valor de w , tal que $P\{W < w_{\alpha/2}\} = \alpha/2$

✓ LM = $d_2 \sigma_0$ (não é afetado)

✓ Vantagem: detectar melhorias do processo

- Para $n = 4$ e $\alpha = 0,002$: $LSC_R = w_{0,999} \hat{\sigma}_0 = 5,30 \hat{\sigma}_0$
 $LIC_R = w_{0,001} \hat{\sigma}_0 = 0,20 \hat{\sigma}_0$
- Para $n = 4$ e desempenho 3σ : $LSC_R = 4,70 \hat{\sigma}_0$
 $\alpha = 0,005$

Gráficos de Controle $\bar{X}$ e R: Análise do Desempenho Conjunto

Gráfico de $\bar{X}$ e R

- Hipóteses associadas:
 $\sqrt{H_0: \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0}$
 $\sqrt{H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ e } \sigma \neq \sigma_0}$
- Risco de alarme falso do gráfico de $\bar{X}$
 $\alpha_{\bar{X}} = 1 - P\{LIC_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq LSC_{\bar{X}} | \mu = \mu_0 \text{ e } \sigma = \sigma_0\}$
- Risco de alarme falso do gráfico de R
 $\alpha_R = 1 - P\{LIC_R \leq R \leq LSC_R | \sigma = \sigma_0\}$
- Probabilidade conjunta de alarme falso
 $\alpha = \alpha_{\bar{X}} + \alpha_R - \alpha_{\bar{X}} \alpha_R$

- Considerando limites 3σ e $n = 4$:

$$\alpha_{\bar{X}} = 0,0027 \text{ e } \alpha_R = 0,0050$$

$\sqrt{\text{O risco de alarme conjunto é } \alpha \approx 0,0077}$

$\sqrt{\text{Número médio de amostras até alarme falso:}}$

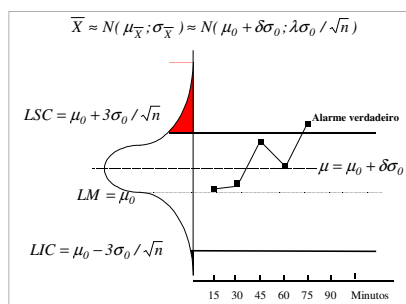
NMAF ≈ 130 (considerado elevado)

Redução do Risco α

- Para melhorar a proteção contra alarmes falsos
 - ✓ Alargamento dos limites do gráfico
 - ✓ Razoável adotar $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R$ (caso não haja informações sobre os desajustes)

- Exemplo:
 - ✓ Com $\alpha \approx 0,0024$ e $n = 4$ (NMAF = 416,7)
 - $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$,
 - ✓ Limites dos gráficos:
 - Gráfico de $\bar{X}$
 - $\mu_0 \pm 3,24\sigma_0/\sqrt{4}$, pois $P\{|Z| > 3,24\} = 0,0012$
 - Gráfico de R
 - $LSC_R = w_{0,9988}\sigma_0 = 5,25\sigma_0$

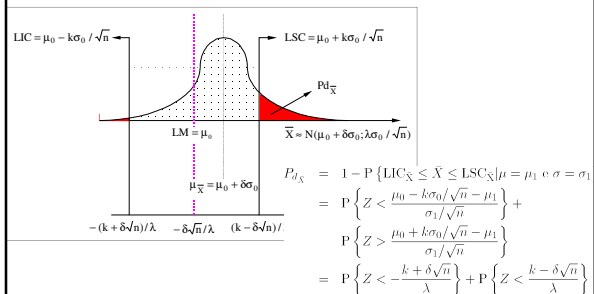
- Desajuste e instabilidade no processo
($\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ e $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$)



• Poder do Gráfico de $\bar{X}$:

✓ para sinalizar desajuste e instabilidade no processo

$$(\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 \text{ e } \sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$



• Poder do gráfico de R

✓ para sinalizar instabilidade do processo

$$(\sigma_1 = \lambda\sigma_0)$$

$$\begin{aligned}
 P_{d_R} &= 1 - P\{R > LSC_R | \sigma = \sigma_1\} \\
 &= P\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)\sigma_0}}{\sigma_1}\right\} \\
 &= P\left\{W > \frac{w_{(1-\alpha_R)}}{\lambda}\right\}
 \end{aligned}$$

• Poder conjunto dos gráficos $\bar{X}$ e R

$$P_d = P_{d_{\bar{X}}} + P_{d_R} - P_{d_{\bar{X}}} P_{d_R}$$

Comparação de Poderes

• Planejamento:

✓ $n = 4$ e $\alpha_{\bar{X}} = \alpha_R = 0,0012$ ($k=3,24$ e $LSC_R = 5,25\sigma_0$)

	A	B (estável)	C (ajustado)	D
	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1$	$\delta = 0$ e $\lambda = 2$	$\delta = 0,5$ e $\lambda = 1,2$
$Pd_{\bar{X}}$	0,1484	0,01255	0,1052	0,0309
Pd_R	0,2500	α_R	0,2500	0,0107
Pd	0,3613	0,01374	0,3289	0,0413

✓ B: o gráfico R não é sensível a alterações na média

✓ C: O poder global é reduzido sem o gráfico X

✓ D: diminuição do poder global (em comparação a A)

Comentário

- Os gráficos de $\bar{X}$ e R não são indicados para monitoramento de processos sujeitos a pequenas perturbações.
 - √ Deve-se recorrer a outros tipos de gráficos
 - CUSUM, EWMA, etc.

Alternativas para Monitoramento da Dispersão

Monitoramento da Variabilidade

- O gráfico de R tem sido mais utilizado por sua simplicidade
 - √ Para amostras grandes, o gráfico de S^2 ou de S são mais eficientes
 - √ Para amostras pequenas, o gráfico de R é tão eficiente quanto eles
 - √ A diferença começa a ser sensível para amostras maiores que 10 unidades

Gráfico do Desvio-Padrão S

- Pontos Amostrais:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}}$$

√ Distribuição amostral não é tabelada. Pela tabela χ^2 :

$$P\{S > x\} = P\{S^2 > x^2\}, \text{ com } \frac{n-1}{\sigma_0^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

√ Parâmetros da Estatística:

$$\begin{aligned} \mu_S &= c_4 \sigma \\ \sigma_S^2 &= (1 - c_4^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

- Limites 3 σ do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 + 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = c_4 \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 - 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2}$$

√ $\hat{\sigma}_0$: valor estimado do desvio-padrão do processo isento de causas especiais

Gráfico do Desvio-Padrão S

- Limites de Controle do Gráfico de S:

$$LSC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 + 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_0 \hat{\sigma}_0 \quad B_3 = c_4 - 3 \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = c_4 \hat{\sigma}_0$$

$$LIC_S = c_4 \hat{\sigma}_0 - 3 \hat{\sigma}_0 \sqrt{1 - c_4^2} = B_5 \hat{\sigma}_0 \quad B_6 = c_4 + 3 \sqrt{1 - c_4^2}$$

- Se S_C é o estimador de σ

$$S_C = \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{m} = \bar{S}$$

$$LSC_S = \bar{S} + 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_4 \bar{S} \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LM_S = \bar{S}$$

$$LIC_S = \bar{S} - 3 \frac{\bar{S}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2} = B_3 \bar{S} \quad B_6 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

Fonte: D. Montgomery. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*

- Se S_C é usado para estimar s , os limites para os gráficos de $\bar{X}$ podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} LSC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{S} \\ LM_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} \\ LIC_{\bar{X}} &= \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{S}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{S} \end{aligned} \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$$

Gráficos de $\bar{R}$ e de S

- Gráficos $\bar{X} - S$ são preferidos aos $\bar{X} - R$ quando:
 - ✓ Amostra moderadamente grande ($n > 10$)
 - uso de amplitude para estimar σ perde eficiência ($n > 10$)
 - ✓ Tamanho da amostra é variável
- Disponibilidade atual de microcomputadores tem eliminado dificuldades computacionais na implementação dos gráficos de S

Amostra Variável

- Gráficos de $\bar{X} - S$ com tamanho de amostra variável:

- ✓ Estimação dos parâmetros do processo:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^m n_i} \quad \bar{S} = \left[\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) \bar{S}_i^2}{\sum_{i=1}^m (n_i - m)} \right]^{1/2}$$

- ✓ Limites de controle são variáveis (calculados da maneira usual)

Gráficos de $\bar{X}$ – Regras Suplementares

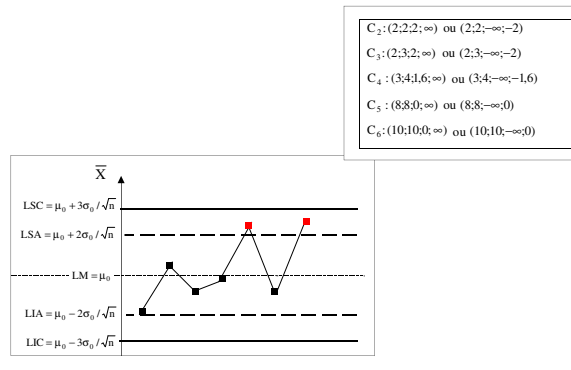
Regras Suplementares

- Em geral, definidas apenas para o gráfico de $\bar{X}$
 - ✓ Regras surgidas com o propósito de acelerar a percepção de alteração no processo;
 - ✓ Tentam formalizar a percepção do operador da possibilidade de perturbação no processo;

Notação das Regras

- (L, m, a, b) : sinal ocorre quando ao menos L , dentre os m últimos pontos, estiverem entre $\mu_0 + a \sigma_{\bar{X}}$ e $\mu_0 + b \sigma_{\bar{X}}$
- Regra Básica de Controle;
 - ✓ $C_1 : (1; 1; k; \infty)$ ou $(1; 1; -\infty; -k)$
 - 1 ponto fora dos limites de controle ($k = 3$: limites 3);

• Gráfico de $\bar{X}$ – Regras Suplementares de Decisão



• Algumas Regras Suplementares:

- ✓ $C_2: (2; 2; 2; \infty)$ ou $(2; 2; -\infty; -2)$
- ✓ $C_3: (2; 3; 2; \infty)$ ou $(2; 3; -\infty; -2)$
- ✓ $C_4: (3; 4; 1, 6; \infty)$ ou $(3; 4; -\infty; -1, 6)$
- ✓ $C_5: (8; 8; 0; \infty)$ ou $(8; 8; -\infty; 0)$
- ✓ $C_6: (10; 10; 0; \infty)$ ou $(10; 10; -\infty; 0)$

Alarmes Falsos

- Regras agilizam a detecção de mudanças, mas s diminuem a proteção contra alarmes falsos
 ✓ risco α aumenta
- Exemplo:
 ✓ Alarme sempre que 6 pontos consecutivos caírem em qualquer dos lados da linha média:
 $0,5^6 = 0,0313$ (12 vezes o valor de $\alpha = 0,0027$;
- Devem-se alargar os limites de controle para se manter o nível de proteção contra alarmes falsos

- Frequência de alarmes falsos no gráfico de $\bar{X}$ com regras suplementares

Regras Utilizadas	Probabilidade de Alarme Falso	Frequência Esperada de Alarmes Falsos
C_1	0,0027	1 a cada 370,4 inspeções
C_1 e C_2	0,0036	1 a cada 278,0 inspeções
C_1 e C_3	0,0044	1 a cada 225,5 inspeções
C_1 e C_4	0,0035	1 a cada 286,2 inspeções
C_1 e C_5	0,0065	1 a cada 152,8 inspeções
C_1 e C_6	0,0037	1 a cada 273,8 inspeções

- Valores de k que garantem $\alpha = 0,0027$

Regras Utilizadas	Novo Valor para k
C_1	3,0000
C_1 e C_2	3,1274
C_1 e C_3	3,3492
C_1 e C_4	3,1072
C_1 e C_5	-----
C_1 e C_6	3,1316

Efeitos da Não-normalidade

- Normalidade é suposição fundamental na construção dos gráficos $\bar{X}$, R e S
- Em caso de não-normalidade:
 - ✓ Se a forma da distribuição subjacente é conhecida, deve-se deduzir as distribuições amostrais para obter os limites de probabilidade exatos
 - abordagem pode ser difícil em alguns casos
 - ✓ É possível que não haja informação alguma sobre a estrutura subjacente
 - alternativa seria usar a teoria normal

- Efeitos do afastamento da normalidade
 - ✓ os limites de controle baseados na teoria normal são bastante robustos com relação a desvios à normalidade
 - (a menos que a população seja extremamente não-normal)
 - ✓ Na maioria dos casos, amostras de tamanho 4 ou 5 são suficientes para garantir razoável robustez com relação à hipótese de normalidade
 - ✓ O gráfico de R é mais sensível que o gráfico de $\bar{X}$ com relação a desvios da normalidade

Planejamento dos Gráficos de Controle

Planejamento de Gráfico de Controle

- Parâmetros de planejamento:
 - ✓ k: abertura dos limites de controle
 - ✓ n: tamanho da amostra
 - ✓ h: intervalo entre as amostras

- Abordagens de planejamento
 - √ Planejamento estatístico:
 - minimização do número de alarmes falsos
 - maximização da capacidade de detectar mudanças
 - √ Planejamento econômico:
 - Minimização do custo esperado do sistema de controle
 - Custos:
 - amostragem
 - envio não conformes ao mercado
 - custos de ajuste
 - etc.

Planejamento Estatístico

- Para definição do tamanho da amostra (n) e frequência de amostragem (h)
 - √ Magnitude da mudança no processo a ser detectada
 - √ Rapidez desejada para detectar essa mudança
- Situação ideal (inviável):
 - √ grandes amostras tomadas mais frequentemente
 n grande e h pequeno
- Prática adequada:
 - √ pequenas amostras em intervalos de tempo menores
 - mais usada em indústrias
 - √ grandes amostras em intervalos de tempo maiores

Intervalo de Tempo entre Amostras

- É função de:
 - √ tempo de produção de cada item;
 - √ custo da inspeção;
 - √ tempo de inspeção;
 - √ estabilidade do processo;
 - √ custo de operar sob causa especial.

- Problemas:

- ✓ obtenção de valores precisos para estes parâmetros;
- ✓ estabilidade do processo está associada ao tempo médio isento de causas especiais;
- ✓ operação sob causa especial implica aumento da PFE, dependendo da intensidade da perturbação.
- ✓ Valores pequenos de h implicam custos elevados com amostragem e maior incidência de alarmes falsos.

Monitoramento e Controle de Processo Multivariado

Roteiro

1. O Problema do Controle da Qualidade Multivariado
2. Gráfico de Controle T^2 de Hotelling (Subgrupos)
3. Gráficos de Controle para Monitoramento da Variabilidade

O Problema do Controle da Qualidade Multivariado

Processo Multivariado

- Monitoramento e controle univariado:
 - √ Supõe que há apenas uma variável de saída
- Maioria dos cenários de monitoramento e controle de processos envolvem **várias variáveis relacionadas**
- Aplicação de cartas de controle univariadas a cada variável individual
 - √ Não é eficaz e pode levar a conclusões errôneas

- Há situações nas quais é necessário o monitoramento simultâneo ou controle de duas ou mais características de qualidade
- Exemplo: Características de qualidade de mancal
 - √ X_1 : diâmetro interno
 - √ X_2 : diâmetro externo

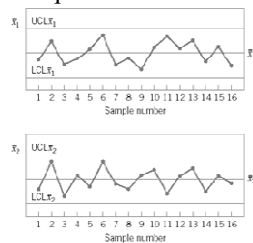
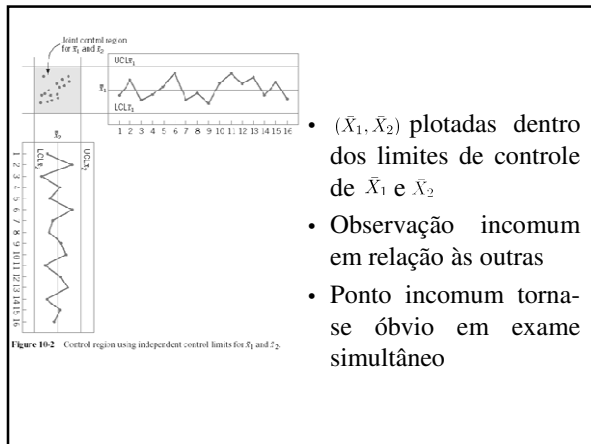


Figure 10-1 Control charts for inner (X_1) and outer (X_2) bearing diameters.



- $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ plotadas dentro dos limites de controle de $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$
- Observação incomum em relação às outras
- Ponto incomum torna-se óbvio em exame simultâneo

- Suposição: X_1 e X_2 têm distribuições normais independentes – a :
 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,0027 \text{ P}\{\bar{X}_1(\bar{X}_2) \text{ exceder limites } 3\sigma\}$
 $(0,0027)^2 = 0,00000729 \text{ P}\{\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2 \text{ excederem limites } 3\sigma\}$
 $(0,9973)^2 = 0,99460729 \text{ P}\{\bar{X}_1 \cap \bar{X}_2 \text{ dentro limites } 3\sigma\}$
 $1 - (0,9973)^2 = 0,99460729 \text{ P}\{\bar{X}_1 \cup \bar{X}_2 \text{ exceder limites}\}$
- Uso de dois gráficos independentes distorce monitoramento simultâneo
 $\checkmark$ Erro tipo I não é igual aos níveis anunciados para os gráficos individuais

- Gráficos de controle multivariados funcionam bem quando o número de variáveis não é muito grande (≤ 10)
- Os gráficos de controle multivariados perdem eficiência em detectar mudança à medida em que o número de variáveis cresce
 $\checkmark$ Abordagem muito usada: diminuir a dimensão do problema (componentes principais)

Normal Multivariada

- Suponha que tenhamos p variáveis $X_1, X_2, \dots, X_p$

✓ Vetor de componentes $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, x_p](\mathbf{X}')$

✓ Vetor de médias: $\boldsymbol{\pi}' = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p](\boldsymbol{\pi}')$

✓ Matriz de variâncias e covariâncias

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

✓ Variância da variável aleatória X_i : $\text{Var}(X_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$

✓ Covariância entre Variáveis X_i e X_j : $\text{Covar}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$

Função de Densidade de Probabilidade

- Distribuição Normal Univariada:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

distância quadrática padronizada

- Distribuição Normal Multivariada:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

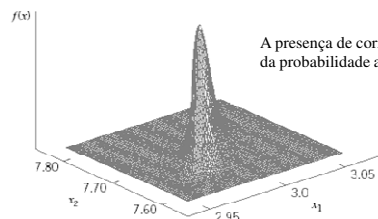
Padronização volume sob superfície

distância generalizada quadrática padronizada

Normal Bivariada

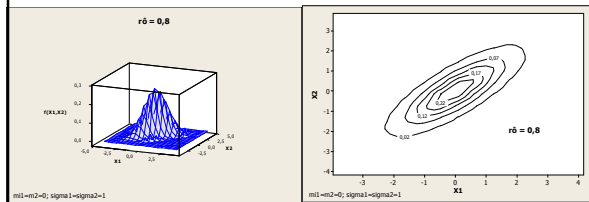
- Função de densidade de probabilidade ($p=2$)

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right] \right\}$$



A presença de correlação causa concentração da probabilidade ao longo de uma linha

- $\text{Corr}(X_1, X_2) = 0,8$



✓ A presença de correlação causa concentração da probabilidade ao longo de uma linha

Vetor de Média Amostral

- Suponha uma amostra aleatória de uma distribuição normal multivariada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$
 $\mathbf{x}_i$: i-ésimo vetor amostral
 $\mathbf{x}_i' = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}]$
- Vetor de médias amostrais

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$$

Matriz de Variâncias e Covariâncias Amostral

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})'$$

- Variâncias Amostrais (diagonal de S)

$$S_{jj} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

- Covariâncias amostrais

$$S_{jk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) (x_{ik} - \bar{x}_k)$$

- $\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{S}$ são estimadores não-viciados de $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, respectivamente

$$E[\bar{\mathbf{X}}] = \boldsymbol{\mu}$$

$$E[\mathbf{S}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

Gráfico de Controle T^2 de Hotelling para
Dados Subgrupados

Gráfico de Controle T^2 de Hotelling

- Procedimento de monitoramento e controle do vetor de médias de processo multivariado
 - ✓ Análogo ao gráfico de $\bar{\mathbf{x}}$ de Shewhart;
 - ✓ Versões para dados subgrupados e observações individuais

Estimação de μ e Σ

- Estimação a partir de amostras preliminares de tamanho n tomadas quando se admite que o processo esteja sob controle

✓ Admita m amostras disponíveis

$j=1, 2, \dots, p$ e $k=1, 2, \dots, m$

x_{ijk} : i -ésima observação da j -ésima característica da qualidade na k -ésima amostra

$$\bar{x}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ijk} \quad S_{jjk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2$$

$$S_{jhk} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{jk})(x_{ihk} - \bar{x}_{hk}) \quad j \neq k$$

- Médias das estatísticas sobre todas as m amostras

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{x}_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad \bar{\mathbf{x}}' = [\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \dots, \bar{\bar{x}}_p]$$

$$\bar{S}_{jj} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jjk}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

$$\bar{S}_{jh} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_{jhk}, \quad j \neq k.$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \cdots & \bar{S}_{1p} \\ & \bar{S}_{22} & \cdots & \bar{S}_{2p} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{S}_{pp} \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{S}$ é estimador não viciado de Σ quando o processo está sob controle

Gráfico de Controle de T^2

- Suponha:
 - ✓ $\mathbf{S}$ estima Σ
 - ✓ $\bar{\mathbf{x}}$ valor sob controle do vetor de médias do processo
- Estatística T^2 de Hotelling: $T^2 = n(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}})' \mathbf{S}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\bar{\mathbf{x}}})$
- Deve-se ter cuidado na seleção dos limites de controle para a estatística T^2 de Hotelling;

Fases dos Gráficos de Controle

- Há duas fases distintas no uso de um gráfico de controle:
 - √ Fase 1: Uso dos gráficos para estabelecimento do controle
 - testar se o processo estava ou não sob controle quando os m subgrupos preliminares forem extraídos e as estatísticas amostrais calculadas
 - obtenção de conjunto de observações sob controle, de maneira a estabelecer os limites de controle da fase 2
 - √ Fase 2: Monitoramento da produção futura

Limites de Controle para o Gráfico T^2

- Fase 1: Estabelecimento do controle

$$LSC = \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-n-p+1} F_{p, mn-m-p+1}(\alpha)$$
- Fase 2: Monitoramento produção futura

$$LSC = \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-n-p+1} F_{p, mn-m-p+1}(\alpha)$$
- Obs:
 - √ LIC = 0

Amostras Preliminares

- Quando μ e Σ são estimados a partir de um grande número de amostras preliminares costuma-se usar $LSC = \chi_p^2(\alpha)$
- Há situações em que são necessárias muitas amostras preliminares antes que os limites de controle exatos da fase 2 sejam bem aproximados pelos limites qui-quadrado
 - √ m sempre superior a 20 amostras preliminares, em geral superior a 50 amostras

Exemplo

- Características da qualidade importantes para serem controladas conjuntamente
- $\sqrt{X_1}$: Tensão de resistência (psi)
- $\sqrt{X_2}$: Diâmetro (10^{-2} in)
- $\sqrt{n = 10; m = 20}$

Table 10-1 Data for Example 10-1

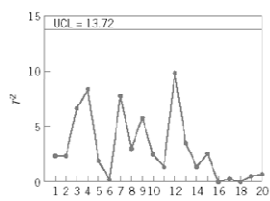
Sample Number j	(a) Means		(b) Variances and Covariances			(c) Control Chart Statistics	
	Tensile Strength ($\bar{x}_{1j}$)	Diameter ($\bar{x}_{2j}$)	s_{1j}^2	s_{2j}^2	s_{12j}	$\bar{\bar{x}}_j$	$ \bar{S}_j $
1	1.525	1.64	1.25	0.87	0.80	2.16	0.45
2	1.531	1.66	1.25	0.85	0.81	2.14	0.41
3	1.535	1.69	1.29	0.99	0.82	6.77	0.50
4	1.621	1.65	1.15	0.75	0.78	1.11	0.33
5	1.500	1.67	1.24	0.91	0.83	0.38	0.44
6	1.525	1.66	1.25	0.95	0.90	0.19	0.25
7	1.498	1.65	1.18	0.83	0.79	0.30	0.36
8	1.525	1.80	1.31	0.89	0.76	0.35	0.59
9	1.615	1.69	1.29	0.85	0.68	0.52	0.53
10	1.592	1.65	1.17	0.89	0.90	2.41	0.10
11	1.575	0.69	1.45	0.79	0.76	1.13	0.54
12	1.490	1.66	1.24	0.82	0.81	9.36	0.26
13	1.631	1.65	1.25	0.55	0.72	3.86	0.17
14	1.583	1.67	1.17	0.76	0.75	1.11	0.33
15	1.829	1.81	1.25	0.89	0.82	2.56	0.82
16	1.553	1.64	1.24	0.91	0.83	0.38	0.44
17	1.547	1.63	1.23	0.95	0.90	0.19	0.25
18	1.558	1.65	1.18	0.83	0.79	0.30	0.36
19	1.572	1.66	1.31	0.89	0.76	0.35	0.59
20	1.540	1.64	1.29	0.85	0.68	0.52	0.53

Averages: $\bar{\bar{x}}_1 = 1.559$ $\bar{\bar{x}}_2 = 1.66$ $\bar{s}_1^2 = 1.23$ $\bar{s}_2^2 = 0.85$ $\bar{s}_{12} = 0.79$

$$T^2 = \frac{10}{(1.23)(0.83) - (0.79)^2} \left[0.83(\bar{x}_1 - 1.559)^2 + 1.23(\bar{x}_2 - 1.66)^2 - 2(0.79)(\bar{x}_1 - 1.559)(\bar{x}_2 - 1.66) \right]$$

Limites de Controle – Fase 1

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{p(m-1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{\alpha, p, mn-m-p+1} \\ &= \frac{2(19)(9)}{20(10)-20-2+1} F_{0.001, 2, 20(10)-20-2+1} \\ &= \frac{342}{179} F_{0.001, 2, 179} \\ &= (1.91)7.18 \\ &= 13.72 \end{aligned}$$



$\sqrt{\text{Nenhum ponto excede esse limite} \rightarrow \text{processo sob controle}}$

- Limites de Controle Fase 2 – Monitoramento

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= \frac{p(m+1)(n-1)}{mn-m-p+1} F_{p,mn-n-p+1}(\alpha) \\ &= \frac{2(20+1)(10-1)}{20(10)-20-2+1} F_{2,20(10)-10-2+1}(0,001) \\ &= \frac{378}{179} F_{2,179}(0,001) = \frac{378}{179} \\ &= 15,17 \end{aligned}$$

- Se tivéssemos usado limite de controle χ^2

$$\chi^2_2(0,001) = 13,816$$

✓ Próximo do limite correto para a Fase 1, mas é pequeno para a fase 2

Interpretação Sinais de Fora de Controle

- Dificuldade na interpretação prática de um sinal fora de controle

✓ Qual das p variáveis é responsável pelo sinal?
(ou qual subconjunto delas)

- Prática padrão:

✓ Plotar gráficos $\bar{x}$ univariados para as variáveis individuais
– Abordagem pode não ser bem sucedida

Soluções

- Uso de gráficos com limites de controle do tipo Bonferroni (Alt, 1985)

✓ Substituir $z_{\alpha/2}$ por $z_{\alpha/2p}$

✓ Substitui o número de alarmes falsos associados ao uso de muitos gráficos univariados simultâneos

- Procedimento para intervalo de confiança simultâneos exatos (Hayter & Tsui, 1994)

✓ Pode ser usado também em situações em que a hipótese de normalidade não é válida

- Gráficos de controle baseados nas p componentes principais (combinações lineares das variáveis originais) (Jackson, 1980)
 - √ Desvantagem: componentes principais em geral não fornecem uma interpretação clara da situação em relação às variáveis originais
 - √ Vantagem: eficaz em casos em que as componentes principais têm uma interpretação clara

Considerações Gerais

- Gráfico de Controle T^2 de Hotelling (χ^2):
 - √ Idéia geral:
 - Testar a hipótese de que o vetor de médias de uma distribuição normal multivariada é igual a uma constante, contra a hipótese alternativa de que o vetor de médias não é igual àquela constante
 - √ É uma estatística de teste ótima para essa hipótese
 - √ Não é necessariamente um procedimento ótimo de gráfico de controle para detectar mudanças na média

- √ T^2 de Hotelling não é ótimo para mudanças mais estruturadas na média, tais como mudanças em apenas algumas das variáveis do processo
- √ T^2 de Hotelling serão sensíveis a mudanças na variância bem como na média

Gráficos de Controle para Monitoramento da Variabilidade

- Estatística plotada no gráfico para a i -ésima amostra:

$$W_i = -pn + pn \ln(n) - n \ln \left(\frac{|\mathbf{A}_i|}{|\Sigma|} \right) + \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{A}_i)$$

$$\sqrt{|\mathbf{A}_i|} = (n-1) \mathbf{S}_i$$

$$\sqrt{|\mathbf{S}_i|}: \text{matriz de covariâncias amostral para a amostra } i$$

$$\sqrt{\text{tr}}: \text{operador traço (soma dos elementos da diagonal principal)}$$

- Limite Superior de Controle

$$\text{LSC} = \chi^2_{p(p+1)/2}(\alpha)$$

- 2º Procedimento:

$$\sqrt{|\mathbf{S}|} \text{ Baseia-se na variância amostral generalizada } |\mathbf{S}|$$

- Determinante da matriz de covariâncias amostral
- Medida amplamente usada para dispersão multivariada

$$\sqrt{|\mathbf{S}|} \text{ Montgomery \& Wadsworth (1972)}$$

- Usaram aproximação normal assintótica

$$\sqrt{|\mathbf{S}|} \text{ Outro método:}$$

- usar média e variância de $|\mathbf{S}|$
- maior parte da distribuição de probabilidade está contida no intervalo

$$E(|\mathbf{S}|) \pm 3\sqrt{\text{Var}(|\mathbf{S}|)}$$

- Parâmetros do gráfico de controle para $|S|$:

$$LSC = |\Sigma|(b_1 + 3\sqrt{b_2})$$

$$LC = b_1|\Sigma|$$

$$LIC = |\Sigma|(b_1 - 3\sqrt{b_2})$$

✓ Usualmente, Σ será estimada por uma matriz de covariâncias S , baseada na análise de amostras preliminares

- Substituir $|\Sigma|$ por $|S|$, pois $|S|/b_1$ é não viciada para Σ .

- Pode-se mostrar que:

$$E(|S|) = b_1|\Sigma|, \text{ com } b_1 = \frac{1}{n-1} \prod_{i=1}^p (n-i)$$

e

$\text{Var}(|S|) = b_2|\Sigma|$, com

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right]$$

Exemplo 10.2 – Fibra Textil

- Variáveis: Tensão de resistência e diâmetro fibra

Atk 10-1 Data for Example 10-1

Sample Number	(a) Means		(b) Variances and Covariances			(c) Control Chart Statistics	
	Tensile Strength ($\bar{x}_{10}$)	Diameter ($\bar{x}_{20}$)	s_{11}^2	s_{22}^2	s_{12}	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$
1	115.25	1.34	1.25	0.57	0.39	2.36	0.45
2	115.01	1.36	1.26	0.85	0.51	2.11	0.41
3	115.05	1.39	1.80	0.90	0.52	6.17	0.59
4	115.21	1.35	1.02	0.85	0.31	8.29	0.21
5	115.00	1.37	1.16	0.73	0.30	1.89	0.21
6	115.25	1.36	1.01	0.80	0.36	0.83	0.25
7	114.98	1.35	1.25	0.78	0.75	7.54	0.41
8	115.25	1.10	1.40	0.43	0.30	3.61	0.52
9	115.15	1.39	1.19	0.87	0.33	5.52	0.35
10	115.02	1.35	1.17	0.86	0.45	2.01	0.19
11	115.75	0.90	1.45	0.70	0.78	1.13	0.51
12	114.90	1.36	1.24	0.82	0.41	9.96	0.36
13	115.01	1.35	1.26	0.55	0.72	3.86	0.17
14	115.36	1.37	1.17	0.76	0.79	1.11	0.36
15	115.29	1.11	1.23	0.89	0.42	2.56	0.42
16	115.65	1.34	1.24	0.91	0.53	0.88	0.44
17	115.47	1.33	1.26	0.95	0.70	0.39	0.65
18	115.38	1.25	1.13	0.53	0.79	0.89	0.36
19	115.72	1.36	1.31	0.89	0.76	0.25	0.59
20	115.40	1.34	1.20	0.85	0.68	0.62	0.63
Averages	$\bar{\bar{x}}_1 = 115.89$	$\bar{\bar{x}}_2 = 1.36$	$\bar{s}_1^2 = 1.23$	$\bar{s}_2^2 = 0.83$	$\bar{s}_{12} = 0.79$		

- Estimacão Σ com base nas 20 amostras preliminares:

$$S = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{bmatrix} \Rightarrow |S| = 0,3968$$

- Cculo constantes b_1 e b_2 :

$$b_1 = \frac{1}{n-1} \prod_{i=1}^p (n-i)$$

$$= \frac{1}{10-1} (10-1)(10-2) = \frac{(8)(9)}{81}$$

$$b_1 = 0,8889$$

$$b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left[\prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right]$$

$$= \frac{1}{(10-1)^{2 \times 2}} (10-1)(10-2) [(10-1+2)(10-2+2) - (10-1)(10-2)]$$

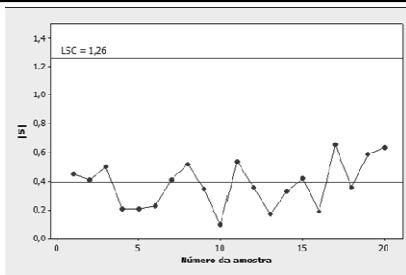
$$= \frac{(9)(8)[(11)(10) - (9)(8)]}{6561} = 0,4170$$

- Substituindo $|S|$ por $|S|/b_1$: $\frac{|S|}{b_1} = \frac{0,3968}{0,8889} = 0,4464$
- Limites de Controle

$$LSC = \frac{|S|}{b_1} (b_1 + 3\sqrt{b_2}) = 0,4464[0,8889 + 3\sqrt{0,4170}] = 1,26$$

$$LC = |S| = 0,3968$$

$$LIC = \frac{|S|}{b_1} (b_1 - 3\sqrt{b_2}) = 0,4464[0,8889 - 3\sqrt{0,4170}] = -0,47 = 0$$



- Nenhum ponto excede limites de controle $\rightarrow$ variabilidade do processo sob controle

Comentários

- Embora a variância amostral generalizada seja uma medida de dispersão multivariada amplamente usada, lembre-se de que é uma representação escalar relativamente simplista de um problema multivariado complexo

- É fácil se enganar se olharmos apenas para $|\mathbf{S}|$

√ Exemplo:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,40 \\ 0,40 & 0,50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1,68 & -0,40 \\ -0,40 & 0,50 \end{bmatrix}$$

√ $|\mathbf{S}_1| = |\mathbf{S}_2| = |\mathbf{S}_3| = 1$, mas as três matrizes transmitem informação consideravelmente diferente sobre a variabilidade do processo e sobre a correlação entre as variáveis

Planejamento Econômico de Gráfico de Controle $\bar{X}$

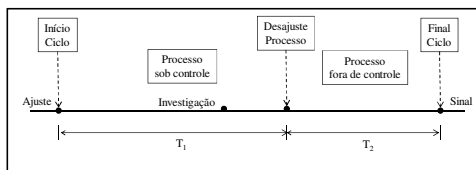
Gráficos de $\bar{X}$ – Planejamento Estatístico

- Parâmetros de Planejamento:
 - √ tamanho da amostra (n) e limites de controle (k)
- Critério estatístico de escolha:
 - √ Escolher (n, k) tal que os comprimentos médios da sequência (CMS_0 e CMS_1) sejam iguais a valores especificados
- Tradicionalmente os gráficos de controle têm sido planejados em relação apenas a critérios estatísticos

Gráficos de $\bar{X}$ – Planejamento Econômico

- Parâmetros de Planejamento:
 - √ tamanho da amostra (n) e limites de controle (k)
- Um critério econômico de escolha:
 - √ Determinar (n, k) para minimizar o custo total relacionado com o monitoramento do processo.
- Simplificação:
 - √ Intervalo entre amostragens determinado por outras considerações que não custo

Diagrama do Ciclo de Monitoramento



Custos

- Custo de amostragem por período ($a_0 n$)
 - ✓ a_0 : custo de amostragem (por item)
 - ✓ custo de pessoal, equipamento, do item, etc.
- Custo de investigação e ajuste:
 - ✓ a_1 : custo incorrido cada vez que o gráfico sinalizar que o processo está fora de controle
 - ✓ Questão:
 - Esse custo aumenta ou diminui com o aumento de k ?

- Custo de operação fora de controle
 - ✓ a_2 , por cada período em que o processo operar fora de controle
 - ✓ custo de descarte ou retrabalho
 - ✓ custos de impactos em montagens subsequentes com o item produzido
 - ✓ custos de cobertura de garantia, insatisfação do cliente, ações legais, etc.
 - ✓ Questão:
 - Esse custo aumenta ou diminui com o aumento de k ?

Parâmetros de Entrada

- Parâmetros de custo:
 - ✓ a_0 : custo de amostragem por item inspecionado
 - ✓ a_1 : custo esperado de cada investigação e ajuste
 - ✓ a_2 : custo por período de operação fora de controle
- Parâmetros probabilísticos do processo:
 - ✓ π : probabilidade de o processo sair de controle, por período
 - ✓ δ : desajuste da média (unidades de desvio-padrão)

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$$

Modelo Probabilístico

- Número esperado de períodos que o processo permanece sob controle após um ajuste:

$$E(T_1) = \frac{1 - \pi}{\pi}$$

- Número esperado de períodos que o processo permanece fora de controle até a detecção do desajuste:

$$E(T_2) = \frac{1}{1 - \beta}$$

- Número esperado de períodos em um ciclo

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = \frac{1 - \beta(1 - \pi)}{\pi(1 - \beta)}$$

Custos entre Ajustes

- Custo esperado de amostragem, por ciclo:

$$E(C_0) = a_0 n E(T)$$

- Custo esperado de investigação e ajuste, por ciclo

$$E(C_1) = a_1 [1 + \alpha E(T_1)]$$

- Custo esperado de operação com o processo fora de controle, por ciclo:

$$E(C_2) = a_3 E(T_2)$$

- Custo total por ciclo:

$$\begin{aligned} E(C) &= E(C_0) + E(C_1) + E(C_2) \\ &= a_0 n E(T) + \frac{a_1(1 - \beta)[\pi + \alpha(1 - \pi)] + a_2 \pi}{\pi(1 - \beta)} \end{aligned}$$

- Custo esperado por período

(Teorema da Renovação)

$$C_{pu}(n, k) = \frac{E(C)}{E(T)} = a_0 n + \frac{a_1(1 - \beta)[\pi + \alpha(1 - \pi)] + a_2 \pi}{1 - \beta(1 - \pi)}$$

Procedimento de Busca

- Para um dado par (n, k):
 - √ calcular as probabilidades de erros tipo I e II:

$$\alpha = 2\Phi(-k)$$

$$\beta = \Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n})$$
 - √ calcular $C_{pu}(n,k)$
- Considerar alguns valores tentativos de n
 - √ para cada n, escolher k que minimize o custo $C_{pu}(n,k)$
 - usar Solver, com restrição de $k > 0$

Planejamento Econômico – Exemplo

- Amostragem de n itens a cada hora
- Entradas:
 - √ probabilidade de processo sair de controle em um período: $\pi = 0,03$
 - √ Magnitude do desajuste: 2σ ($\delta = 2$)
 - √ custo de amostragem: $a_0 = \$ 0,50$ (por unidade)
 - √ custo de investigação e ajuste: $a_1 = \$ 25$ (cada)
 - √ custo de operação fora de controle : $a_2 = \$300$ (p/hora)

- Custo horário do sistema para $n = 6$ e $k = 2,5$
 - √ Cálculo dos erros α e β :

$$\alpha = 2\Phi(-k) = 2\Phi(-2,5) = 0,0124$$

$$\beta = \Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n})$$

$$= \Phi(2,5 - 2\sqrt{6}) - \Phi(-2,5 - 2\sqrt{6}) = 0,0082$$

- √ Tempos esperados do ciclo

$$(E)(T_1) = \frac{1 - \pi}{\pi} = \frac{1 - 0,03}{0,03} = 32,33$$

$$E(T_2) = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - 0,0082} = 1,0083$$

$$E(T) = (E)(T_1) + (E)(T_2) = 33,34$$

- Custo esperado de amostragem, por ciclo:

$$E(C_0) = a_0 n E(T) = 0.50(6)(33.34) = \$100.02$$

- Custo esperado de investigação e ajuste, por ciclo

$$E(C_1) = a_1 [1 + \alpha E(T_1)] = 25[1 + 0.0124(32.33)] = \$35.02$$

- Custo esperado de operação com o processo fora de controle, por ciclo:

$$E(C_2) = a_3 E(T_2) = 300(1.0083) = \$302.49$$

- Custo esperado por período:

$$C_{pu}(6; 2, 5) = \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{100.02 + 35.02 + 302.49}{33.34} = \$13.12$$

- Determinação do par (n, k) ótimo:

Planejamento Econômico de Carta de Controle X-barra				
Entradas:				
Custo de amostragem (a_0):			0,05 por item	
Custo de investigação e ajuste (a_1):			25 por ajuste	
Custo de operação fora de controle (a_3):			300 por período	
Pr[sair de controle em um período] (π):			0,03	
Desajuste médio do processo (δ):			2 σ	
n	k	α	β	$C_{pu}(n, k)$
1	1.50072829	0.133426	0.308560	17.277312
2	1.89014638	0.058738	0.174050	13.988919
3	2.17004146	0.030004	0.097820	12.916314
4	2.40183205	0.016313	0.055000	12.650835
5	2.60636807	0.009151	0.031040	12.750338
6	2.79299499	0.005222	0.017600	13.032513

Outros Gráficos de Controle

- ✓ Gráficos de X e R para sequências curtas de produção
- ✓ Gráficos para dados autocorrelacionados
- ✓ Gráficos de controle adaptativos
- ✓ Gráfico de controle de valores extremos
- ✓ Gráficos de controle da mediana
- ✓ Gráficos de controle não-paramétricos
- ✓ Gráficos de controle modificados e de aceitação
- ✓ Gráficos de controle para processos de fluxo múltiplo

Referências

Bibliografia

- Costa, A.F.B.; Epprecht, E.K. e Carpinetti, L.C.R. (Atlas) *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas
- Montgomery, D. C. (LTC)
Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade
- Mitag, H.-J. e Rinne, H. (Chapman & Hall)
Statistical Methods of Quality Assurance
