1. Introdução à Probabilidade

1.1 Lista # 3

1. Provar as Leis de Morgan:

   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2. Provar que :

   $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

3. Para dois conjuntos A e B, prove que

   $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

4. Considere dois eventos A e B, com $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,7$. Determine os máximo e mínimo valores possíveis de $P(A \cap B)$ e as condições para as quais estes valores sejam atingidos.

5. Um ponto (x, y) é selecionado de um quadrado S contendo todos os pontos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.
   Suponha que a probabilidade que um ponto selecionado pertencer a um subconjunto especificado de S é igual à área do subconjunto.
   Encontre a probabilidade de cada um dos seguintes sub-conjuntos:

   (a) O subconjunto dos pontos tais que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$
   Resp.: $1 - \pi/4$

   (b) O subconjunto dos pontos tais que $\frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{2}$
   Resp.: $3/4$

   (c) O subconjunto dos pontos tais que $y \leq 1 - x^2$
   Resp.: $2/3$

   (d) O subconjunto dos pontos tais que $x = y$
   Resp.: 0

6. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ uma seqüência arbitrária de eventos e seja $B_1, B_2, \cdots, B_n$ uma outra seqüência de eventos definida como: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1^c \cap A_2$, $B_3 = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$, etc.

   (a) Prove que $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$

   (b) A desigualdade de Boole estabelece que:

   $$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

i. Use um diagrama de Venn para se convencer que a desigualdade de Boole é verdadeira;

ii. Use a indução para prová-la para todo n

7. A desigualdade de Bonferroni estabelece que:

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

(a) Use um diagrama de Venn para se convencer que a desigualdade de Bonferroni é verdadeira;

(b) Use a as propriedades de probabilidade para prová-la diretamente.

(c) Use a indução para generalizar a desigualdade de Bonferroni para n eventos, ou seja, prove que:

$$P\left(E_1 \cap E_2 \cap \cdots E_n\right) \geq P\left(E_1\right) + \cdots + P\left(E_n\right) - (n-1)$$