

4. Variáveis Aleatórias Unidimensionais

4.1 Lista # 8

1. Mostre que não há nenhum número c tal que a seguinte função $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{1+x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2. A função de densidade de probabilidade de uma variável contínua é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Calcule $P\{X > 2\}$.

Resp.: $3e^{-2}$

3. A função

$$F(x) = k \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{[x]} \right), x > 0$$

é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória X , onde $[x]$ denota a parte inteira de x , ou seja, o maior inteiro menor ou igual a x .

- (a) Determine o valor de k
- (b) Especifique a função de probabilidade de X

4. A função

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{6} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

é a função de distribuição de uma variável aleatória X

- (a) Determine a densidade generalizada de X
- (b) Calcule $P\{0 \leq X < 2\}$ e $P\{0 < X < 2\}$
- (c) Calcule $P\{X = 2\}$

5. A função de distribuição de X é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{3}{4}e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Determine $P\{0 \leq X < 1\}$.

Resp.: $1 - 3/4e^{-1}$

6. A variável aleatória X tem função de densidade de probabilidade f_X dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Seja $Y = \max\{X, c\}$, $c > 0$. Determine a função de distribuição de Y

Resp.: $y/(1+y)$, $y \geq c$ e 0 caso contrário

7. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = cx^2$, $-1 \leq x \leq 1$ e $f(x) = 0$, caso contrário.

(a) Determine o valor da constante c

(b) Calcule $P\{|X| > 1/2\}$

(c) Ache α tal que $F_X(\alpha) = \frac{1}{4}$.

O valor de α que satisfaz esta relação é denominado primeiro quartil da distribuição de X

8. Dizemos que uma variável aleatória tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua densidade é dada por $f(x) = cx$, para $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = c(1-x)$, para $1/2 < x < 1$ e $f(x) = 0$, para os demais valores de x .

(a) Determine o valor da constante c

(b) Esboce o gráfico de $f(x)$

(c) Calcule $P\{X > \frac{8}{10}\}$ e $P\{\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\}$

9. Suponha que a função de distribuição acumulada da variável aleatória X é dada por

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0$$

(a) $P\{X > 2\}$

(b) $P\{1 < X < 3\}$

10. Seja a função:

$$f_Y = 2 \frac{\ln y}{y},$$

Para que valores de $y > 1$, f_Y será função de densidade de probabilidade?