6. Variáveis Aleatórias de Duas ou Mais Dimensões

6.1 Lista # 10 - Distribuições Bivariadas

1. Suponha que a função de densidade de probabilidade de (X, Y) é dada por:.

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{, para } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Determine o valor da constante c.
   Resp.: $21/4$

   (b) Determinar $P\{X \geq Y\}$.
   Resp.: $3/20$

2. Suponha que em mostrador de sinal elétrico haja três bulbos luminosos na primeira linha e quatro, na segunda linha. Seja X o número de bulbos que estarão acesos em um instante de tempo específico t e Y, o número de bulbos que estarão acesos na segunda linha, no mesmo instante de tempo. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y está especificada de acordo com a tabela abaixo:

	Y				
X	0	1	2	3	4
0	0,08	0,07	0,06	0,01	0,01
1	0,06	0,10	0,12	0,05	0,02
2	0,05	0,06	0,09	0,04	0,03
3	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04

   Determine cada uma das seguintes probabilidades:

   (a) $P\{X = 2\}$

   (b) $P\{Y \geq 2\}$

   (c) $P\{X \leq 2 \text{ e } Y \leq 2\}$

   (d) $P\{X = Y\}$

   (e) $P\{X > Y\}$

3. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y seja dada por::

$$f(x,y) = \begin{cases} c|x+y| & \text{, para } x = -2, -1, 0, 1, 2 \text{ e} \\ & \quad \text{e} \quad y = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{, caso contrario} \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de c;
   Resp.: $1/40$

   (b) A probabilidade de $X = 0$ e $Y = -2$
   Resp.: $1/20$

(c) $P\{X = 1\}$
Resp.: $7/40$

(d) $P\{|X - Y| \leq 1\}$ *Resp.: $7/10$*

4. Suponha X e Y tenham uma distribuição conjunta para a qual a função de densidade de probabilidade é definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} cy^2 & \text{, para } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante c; *Resp.: $3/2$*

(b) $P\{X + Y > 2\}$ *Resp.: $3/8$*

(c) $P\{Y < 1/2\}$ *Resp.: $1/8$*

(d) $P\{X \leq 1\}$ *Resp.: $1/2$*

(e) $P\{X = 3Y\}$ *Resp.: 0*

5. Suponha que a função de densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + y) & \text{, para } 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante c;
Resp.: $5/4$

(b) $P\{0 \leq X \leq 1/2\}$
Resp.: $79/256$

(c) $P\{Y \leq X + 1\}$
Resp.: $13/16$

(d) $P\{Y = X^2\}$ *Resp.: 0*

6. Seja Y a taxa de chamadas (chamadas/hora) que chegam em uma central. Seja X o número de chamadas durante um período de duas horas. Neste tipo de problema, uma escolha usual de uma função de densidade/função de probabilidade conjunta para (X, Y) é dada por uma função do tipo :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2y)^x}{x!} e^{-3y} & \text{, se } y > 0 \text{ e } x = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

(a) Verifique que f é uma função de densidade de probabilidade / função de probabilidade conjunta
Dica: Use a fórmula de expansão em série de potências de e^{2y}

(b) Encontre $P\{X = 0\}$
Resp.: $1/3$