

7. Caracterização Adicional de Variáveis Aleatórias

7.1 Lista # 15 - Esperança, Variância e Covariância

1. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com variâncias finitas tais que $E(X) = E(Y)$. Mostre que $E[(X - Y)^2] = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
2. Seja X uma variável aleatória discreta uniforme dos inteiros $1, \dots, n$. Calcule a variância de X .
Dica: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Resp.: $\frac{(n^2-1)}{12}$
3. (Meyer, Ex. 7.33) Mostre que se X for uma variável aleatória contínua, com função de densidade de probabilidade f , tendo a propriedade de que o gráfico de f seja simétrico em relação a $x = a$, então $E(X) = a$, desde que $E(X)$ exista.
4. (Meyer, Ex. 7.38) Suponha que a variável aleatória bidimensional (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre R , onde R é definida por $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .
5. (Meyer, Ex. 7.46) Se X , Y e Z forem variáveis aleatórias não-correlacionadas, com desvios-padrão 5, 12 e 9, respectivamente, e se $U = X + Y$ e $W = X - Y$, calcule o coeficiente de correlação entre U e W . *Resp.:* $48/65$
6. Suponha que X tem distribuição uniforme no intervalo $(-2, 2)$ e $Y = X^6$. Mostre que X e Y são não correlacionadas.
7. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias e que $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$. Sejam $Z = X + Y$ e $W = X - Y$, com variâncias finitas. Verifique se Z e W são não correlacionadas. *Resp.:* não correlacionadas
8. Suponha que X e Y tem uma distribuição conjunta tal que sua função de densidade de probabilidade conjunta é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y) & , \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & , \text{ caso contrario} \end{cases}$$

Determine $\text{Var}(2X - 3Y + 8)$.

9. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias tais que $\text{Var}(X) = 9$, $\text{Var}(Y) = 4$ e $\rho(X, Y) = -1/6$. Determine:
(a) $\text{Var}(X + Y)$; *Resp.:* 11
(b) $\text{Var}(X - 3Y + 4)$ *Resp.:* 51
10. Suponha que X , Y e Z são variáveis aleatórias tais que $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 4$, $\text{Var}(Z) = 8$, $\text{Cov}(X, Y) = 1$, $\text{Cov}(X, Z) = -1$ e $\text{Cov}(Y, Z) = 2$. Determine:
(a) $\text{Var}(X + Y + Z)$; *Resp.:* 17
(b) $\text{Var}(3X - Y + 2Z + 1)$ *Resp.:* 19