8.2 Lista # 20 - Exercícios sobre Distribuições Discretas e Contínuas

1. (Meyer, Ex. 8.2)Suponha que X tenha distribuição de Poisson com parâmtero λ. Determine o valor de k para o qual $P\{X = k\}$ é máxima.

2. (Meyer, Ex. 8.25)Seja $X \sim$ binomial(n, p) e $X \sim$ pascal(r, p). Comprove se $P\{Y < n\}$=$P\{X > r\}$ é ou não verdadeira:

3. Determine $E(X^2)$ e $Var(X)$ para as distribuições de probabilidade relacionadas abaixo:

   - $X \sim$ geométrica (p)
   - $X \sim$ binomial (n, p)

4. Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes e que $X_1 \sim$ binomial (n_1, p) e $X_2 \sim$ binomial (n_2, p). Prove que a distribuição de $X_1 + X_2 \sim$ binomial $(n_1 + n_1, p)$.

5. Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes e que $X_1 \sim$ binomial (n_1, p) e $X_2 \sim$ binomial (n_2, p). Para cada valor fixo k, $(k = 1, 2, \cdots, n_1 + n_2)$, determine a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = k$

6. Suponha que X_1 e X_2 sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com média λ_i, $i = 1, 2$. Para cada valor fixo k, $(k = 1, 2, \cdots)$, determine a distribuição condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = k$

7. Suponha $X \sim$ geométrica (p). Mostre que para todo k, inteiro não negativo, $P\{X \geq k\}$ $= (1 - p)^k$.

8. Prove que:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

   Considere $\binom{r}{j} = 0$, se $j > r$

9. Seja X uma variável aleatória exponencial com média $1/\lambda$. Prove que:

$$E(X^k) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

   - Usando o princípio da indução finita
   - Usando a função de densidade de probabilidade da distribuição gama

10. Seja a variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

    - Prove que sua função de densidade de probabilidade tem um ponto de máximo global, localizado em $x = \mu$
    - Determine os pontos de inflexão de sua função de densidade de probabilidade .

11. (Meyer, Ex. 9.19) Mostre que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

12. Sejam a variáveis aleatórias $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $X \sim N(0, 1)$

- Determine $E(Z^3)$ e $E(Z^4)$
- Determine $E(X^3)$ e $E(X^4)$

13. Determine $E(X^2)$ e $Var(X)$ para $X \sim$ Laplace (μ, λ), em que μ é seu parâmetro de locação e λ, parâmetro de escala

14. Calcule:

$$\int_0^\infty e^{-3x^2} dx$$

15. Sejam as variáveis aleatórias independentes, $X_i \sim$ lognormal (μ_i, σ_i^2). Usando o método do Jacobiano, determine a função de densidade de probabilidade de $X_1.X_2$

16. Sejam X_1 e X_2 independentes com, $X_1 \sim$ gama (r, λ) e $X_2 \sim$ gama (s, λ). Determine a função de densidade de probabilidade condicionada de X_1 dado $X_1 + X_2$

17. (X_1, X_2) formam uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial com parâmetro β. Mostre que $\frac{X_1}{X_1+X_2}$ tem distribuição uniforme $(0, 1)$.

18. Sejam X_1 e X_2 independentes com, $X_1 \sim$ gama (α_1, β) e $X_2 \sim$ gama (α_2, β). Sejam: $U = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ e $V = X_1 + X_2$. Mostre que:

    (a) $U \sim$ beta (α_1, α_2);

    (b) U e V são independentes.

19. Suponha que X tenha distribuição lognormal com parâmetros μ e σ^2. Determine a distribuição de $1/X$

20. Seja n um numero inteiro positivo. Mostre que:

$$\int_\beta^\infty \frac{e^{-y} y^n}{n!} dy = e^{-\beta} \left[\frac{\beta^n}{n!} + \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1 \right]$$