

APLICAÇÕES DE CADEIAS DE MARKOV NO PLANEJAMENTO DE CARTAS DE CONTROLE POR ATRIBUTOS

Fernanda Ferreira de Sousa¹
Lupércio França Bessegato²

RESUMO

Nesse trabalho, considera-se um procedimento para controle *on-line* por atributo que consiste na inspeção de um único item a cada m itens produzidos. Baseado no resultado da inspeção, decide-se se ocorreu um aumento na proporção de itens defeituosos (não conformes) produzidos. Caso o item inspecionado seja classificado como não conforme, ajusta-se o processo produtivo de maneira que a proporção de itens não conformes retorne a sua situação original. O modelo probabilístico do sistema de controle emprega propriedades de uma cadeia de Markov ergódica para se obter a expressão do custo médio desse sistema por unidade produzida, a qual pode ser minimizada como uma função do intervalo de amostragem, m . Utiliza-se planilha eletrônica do Microsoft Excel[®] 2010 para proceder à busca do parâmetro ótimo de planejamento (m^0).

Palavras-chave: Controle de Qualidade por Atributos. Planejamento Econômico. Cadeias de Markov. Planilha Eletrônica.

INTRODUÇÃO

Espera-se, em geral, que um processo de produção seja estável ou previsível, ou seja, que ele tenha capacidade de operar com pequena variabilidade em torno de dimensões-alvo das características de qualidade do produto. O controle de processo abrange técnicas de resolução de problemas e de decisão que são importantes para alcançar a estabilidade do processo e a melhoria de sua capacidade.

Muitas características de qualidade não podem ser representadas convenientemente por meio de números. Nesses casos, classificam-se usualmente cada item inspecionado como conforme ou não conforme, de acordo com as especificações dessas características de qualidade. Taguchi e outros (1989) propuseram um método econômico para monitorar em tempo real características da qualidade, tanto de variáveis, quanto de atributos. Esse método é conhecido como modelo de Taguchi para controle on-

1 Bolsista do Programa PROBIC JÚNIOR/FAPEMIG/UFJF

2 Professor Orientador do Departamento de Estatística – Instituto de Ciências Exatas – UFJF. lupercio.bessegato@ufjf.edu.br

line de processos. No caso de controle por atributos, considera-se um processo que inicia sua operação sob controle, produzindo itens com uma fração não conforme p_0 . Após a ocorrência de uma causa especial, o estado do processo torna-se fora de controle e a fração de itens não conformes passa para p_1 , $p_0 \leq p_1 \leq 1$ (estado fora de controle). O processo continua produzindo nesta condição até que a mudança na proporção de itens não conformes produzidos seja detectada e o processo ajustado. Se o item for não conforme, para-se o processo para investigação e ajuste. Após o ajuste, a fração de itens não conformes retorna ao valor inicial p_0 . O procedimento consiste na inspeção de um único item a cada m itens produzidos. Busca-se o intervalo ótimo entre amostragens, m^0 que minimize o custo médio do sistema de controle.

Nayebpour e Woodall (1993) desenvolveram modelo para controle *on-line* por atributo que formaliza um mecanismo de falha para o processo, assumindo que, a cada item produzido, a probabilidade de o processo sair de controle (θ) é constante. Com essa consideração não se pode obter uma expressão explícita para o intervalo ótimo entre inspeções (m^0), exigindo procedimento numérico para determinação do valor de minimização da função de custo médio do sistema de controle. O procedimento de controle *on-line* de processos foi estudado por muitos autores, tais como, Nayebpour e Woodall (1993), Borges e outros (2001), Trindade e outros (2007), Quinino e outros (2010), Bessegato e outros (2011, 2012). Encontra-se em Bessegato (2009) uma extensa revisão de literatura sobre modelos de controle *on-line* por atributo.

Este trabalho propõe-se a estudar características do planejamento econômico de procedimento de controle *on-line* por atributo, compreendendo a busca do parâmetro ótimo e do correspondente custo unitário do sistema, em função dos parâmetros probabilísticos e de custo adotados. Discutimos as propriedades assintóticas de cadeias de Markov e as adotamos na modelagem do planejamento econômico de controle *on-line* de processos por atributo. O modelo é detalhado e são calculados os custos médios dos estados associados a essa cadeia. Utiliza-se planilha eletrônica do Microsoft Excel[®] 2010, para o cálculo do custo médio por item produzido e enviado ao mercado.

METODOLOGIA

CADEIAS DE MARKOV

As cadeias de Markov são usadas como modelos probabilísticos para uma variedade de situações em biologia, administração, engenharia, física e outras áreas. Esse modelo é usado para descrever um experimento que é repetido da mesma maneira muitas vezes, sendo que o resultado de cada repetição do experimento pode ser um dentre alguns resultados possíveis e previamente especificados. Além disso, supõe-se que o resultado de cada ensaio só depende do ensaio imediatamente anterior (Lay, 1999).

Considere uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, supondo-se que o conjunto dos valores possíveis dessas variáveis seja $E = \{I, \dots, R\}$. A cada passo n , as transições possíveis entre os estados da cadeia atendem a propriedade markoviana, ou seja, a probabilidade de transição do estado i para o estado j em um passo da cadeia é dada por $P_{ij} = P\{x_{n+1} = j \mid x_n = i, \dots, x_0 = i_0\} = P\{x_{n+1} = j \mid x_n = i\}$. Nesse trabalho, considera-se que as probabilidades de transição não dependem de n , dizendo-se assim que a cadeia é homogênea no tempo.

A matriz $\mathbf{P} = [P_{ij}]_{R \times R}$ é a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov. Salienta-se que a soma de qualquer linha da matriz \mathbf{P} é 1. Assim, conhecendo-se a distribuição de probabilidades

da cadeia no instante k (α_k), pode-se calcular sua distribuição no instante $k + 1$ (α_{k+1}), por meio da expressão $\alpha'_{k+1} = \alpha'_k \mathbf{P}$, com $\alpha'_k = [\alpha_k(1), \alpha_k(2), \dots, \alpha_k(R)]$, com $\alpha_k(i) = P\{X_k = i\}$.

Um aspecto interessante das cadeias de Markov é o estudo de seu comportamento a longo prazo. Há cadeias denominadas ergódicas, com propriedades que garantem que há um vetor estacionário (ou vetor de equilíbrio), π , tal que $\pi' = \pi' \mathbf{P}$. Esse vetor é único, tendo-se que, qualquer que seja a distribuição de probabilidade inicial da cadeia (α_0), α'_k converge para π , quando $k \rightarrow \infty$ (Lay, 1999). Cada componente do vetor da distribuição invariante (π) pode ser visto como a proporção de tempo que o sistema de produção visita o estado correspondente, após um número suficientemente grande de inspeções.

MODELO PROBABILÍSTICO

Seja um processo que produz itens individuais e independentes a cada unidade de tempo. Ele inicia operando sob controle, possuindo uma fração de itens não conformes p_0 . Ele passa à condição fora de controle em algum instante aleatório, devido à causa especial. Nesse trabalho, a duração do processo sob controle é medida por meio da quantidade de itens produzidos antes da mudança de estado do processo (tempo de falha discreto). Para garantir que a produção opere sob controle, a regra de monitoramento estabelece as situações em que se ajusta o processo, assegurando assim seu retorno à condição inicial. O objetivo é o estudo do comportamento a longo prazo desse processo, primordialmente o custo unitário por item produzido e enviado ao mercado. Esse trabalho considera que o processo passa à condição fora de controle, devido à causa especial, em algum instante aleatório, assumindo que, a cada item produzido, a probabilidade θ de o processo sair de controle é constante, $0 < \theta < 1$. Após a falha, o processo torna-se fora de controle, com fração de itens não conformes p_1 , $p_1 > p_0$. A proporção de itens não conformes retorna a seu valor inicial, p_0 , somente após uma intervenção para ajuste do processo produtivo. Para monitoramento do processo, inspeciona-se um único item de acordo com o seguinte critério: se a peça inspecionada for não conforme, o processo produtivo é considerado fora de controle, sendo instantaneamente paralisado e ajustado para retornar ao estado inicial de produção sob controle, após o que se produz novamente uma sequência de m itens até a próxima inspeção, repetindo-se o procedimento. A Figura 1 apresenta o fluxograma do monitoramento do processo.

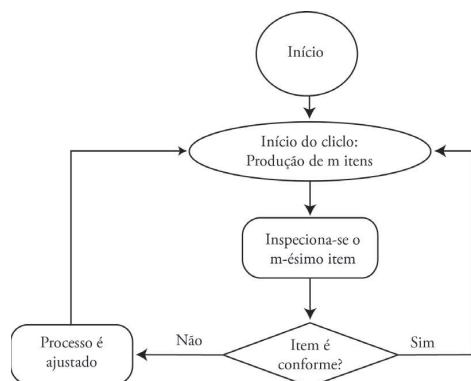


Fig. 1 - Fluxograma do sistema de monitoramento

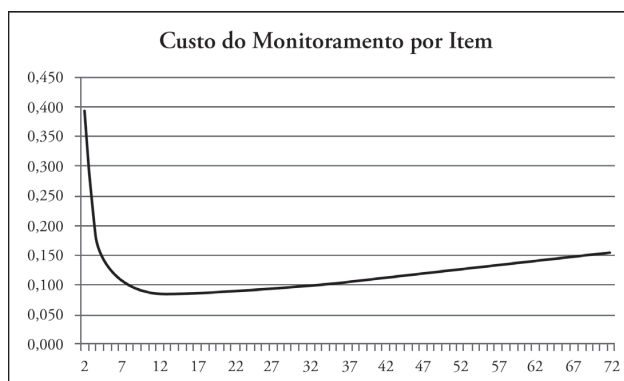


Fig. 2 - Custo médio vs. m

O monitoramento e a regra de decisão sobre o ajuste no processo podem ser modelados como uma cadeia de Markov ergódica, em tempo discreto, em que cada passo de cadeia representa um ciclo entre inspeções sucessivas. O conjunto de estados dado por $E = \{(w, s); w = 0, 1 \text{ e } s = 0, 1\}$, com w indicando se o processo está sob controle no instante da amostragem e s , a decisão sobre o ajuste do processo. Quando: $w = 0$, ao final do ciclo de monitoramento, o processo está fora de controle e opera com aumento na fração de não conformes (p_1); $w = 1$, todo o ciclo de monitoramento ocorre com o processo sob controle (fração de não conformes é p_0); $s = 0$, o item inspecionado é não conforme e o processo de produção é ajustado; $s = 1$, o item inspecionado é conforme e decide-se não ajustar o processo.

Suponha que é constante a probabilidade θ de o processo sair de controle durante a fabricação de cada item (desde que ele tenha sido iniciado sob controle). Essa hipótese equivale a supor que o processo de produção não se deteriora com o tempo. Defina então $\varphi(m)$, a probabilidade de o processo sair de controle durante ciclo de monitoramento em que se produzem m itens, cuja expressão é:

$$\varphi(m) = 1 - (1 - \theta)^m \quad (1)$$

As probabilidades de transição entre os estados são denotados por $P_{(wi-1, si-1), (wi, si)}$ em que (w, s) é o estado da cadeia na conclusão do i -ésimo ciclo de monitoramento. A matriz de probabilidades de transição é dada por $\mathbf{P} = [P_{(wj, sj), (wk, sk)}]$, para todo $(w, s) \in E$. Para ilustrar, $P_{(1,1), (1,0)}$ representa a probabilidade de que o processo seja ajustado no próximo ciclo [estado (1,0)], dado que não ocorreu mudança do processo no ciclo atual.

Após ajuste do processo, ele retorna à sua condição inicial e o próximo ciclo de monitoramento é iniciado operando sob controle. Por outro lado, a probabilidade de ocorrer mudança no estado do processo durante o ciclo atual é $\varphi(m)$. Assim as probabilidades de transição dos estados (0, 0), (1, 0) e (1, 1) para os estados (0, 0) e (0, 1) são, respectivamente:

$$P_{(1,0), (0,0)} = P_{(1,1), (0,0)} = P_{(0,0), (0,0)} = \varphi(m)p_1 \quad (2)$$

$$P_{(1,0), (0,1)} = P_{(1,1), (0,1)} = P_{(0,0), (0,1)} = \varphi(m)(1-p_1) \quad (3)$$

Além disso, a probabilidade de o processo permanecer sob controle, dado que o ciclo iniciou-se nessa situação é $1 - \varphi(m)$. Assim, as probabilidades de transição dos estados (0, 0), (1, 0) e (1, 1) para os estados (1,0) e (1, 1) são, respectivamente:

$$P_{(1,0), (1,0)} = P_{(1,1), (1,0)} = P_{(0,0), (1,0)} = [1 - \varphi(m)]p_0 \quad (4)$$

$$P_{(1,0), (1,1)} = P_{(1,1), (1,1)} = P_{(0,0), (1,1)} = [1 - \varphi(m)](1-p_0) \quad (5)$$

A partir do estado (0, 1), situações em que o ciclo atual está fora de controle durante a amostragem e o item inspecionado é conforme, são possíveis transições unicamente para os estados (0, 0) e (0, 1). As probabilidades dessas transições são, respectivamente:

$$P_{(0,1), (0,0)} = p_1 \quad (6)$$

$$P_{(0,1), (0,1)} = 1 - p_1 \quad (7)$$

Não é possível transição do estado (0, 1) para os estados (1, 0) e (1, 1), ou seja, $P_{(0,1), (1,0)} = P_{(0,1), (1,1)} = 0$.

A matriz \mathbf{P} é ergódica e, portanto, há distribuição estacionária que é denotada por $\pi^s = [\pi(w, s); (w, s) \in E]$. Esse vetor é a solução do sistema de equações lineares $\pi^s = \pi^s \mathbf{P}$, com a restrição de que $\sum_{(w,s) \in E} \pi(w,s) = 1$. Sua solução é:

$$\begin{aligned}\pi(0,1) &= \frac{\varphi(m)(1-p_1)}{\varphi(m)[1-p_1]+p_1} & \pi(1,1) &= \frac{[1-\varphi(m)](1-p_0)p_1}{\varphi(m)[1-p_1]+p_1} \\ \pi(0,0) &= \frac{\varphi(m)p_1}{\varphi(m)[1-p_1]+p_1} & \pi(1,0) &= \frac{[1-\varphi(m)]p_0p_1}{\varphi(m)[1-p_1]+p_1}\end{aligned}\quad (8)$$

A probabilidade $\pi(w, s)$ pode ser considerada como a proporção de tempo que o sistema de monitoramento visita o estado (w, s) após uma quantidade suficientemente grande de inspeções.

Considerando um grande número de inspeções, pode-se obter, por exemplo, $P\{X_{n-1} = (1, 0) \mid X_n = (0, 0)\}$ que indica a proporção de vezes em que os ciclos do estado $(0, 0)$ foram imediatamente precedidos por ciclos do estado $(1, 0)$. Sua expressão é:

$$P\{X_{n-1}=(1,0) \mid X_n=(0,0)\} = \frac{P\{X_n=(0,0) \mid X_{n-1}=(1,0)\}P\{X_{n-1}=(1,0)\}}{P\{X_n=(0,0)\}} \quad (9)$$

$P\{X_n = (0, 0) \mid X_{n-1} = (1, 0)\}$ é a probabilidade de transição do estado $(1, 0)$ para o estado $(0, 0)$, $P_{(1,0),(0,0)}$. Por outro lado, considerando que o processo de produção opera há muito tempo, podemos aproximar as probabilidades incondicionais da expressão (9), por suas equivalentes na distribuição estacionária, ou seja, $P\{X_{n-1} = (1, 0)\} = \pi(1,0)$ e $P\{X_n = (0, 0)\} = \pi(0,0)$. Dessa maneira, temos que:

$$P\{X_{n-1}=(1,0) \mid X_n=(0,0)\} = \frac{P_{(1,0),(0,0)}\pi(1,0)}{\pi(0,0)} \quad (10)$$

As expressões de $P\{X_{n-1} = (1, 0) \mid X_n = (0, 0)\}$ e $P\{X_{n-1} = (1, 0) \mid X_n = (0, 0)\}$ são obtidas de maneira similar. Assim, considerando um grande número de inspeções, a proporção de vezes em que ciclos de monitoramento associados ao estado $(0, 0)$ são iniciados com o processo sob controle, $p_c(0,0)$ é:

$$\begin{aligned}p_c(0,0) &= P\{X_{n-1}=(1,1) \cup X_{n-1}=(0,0) \mid X_n=(0,0)\} \\ &= \frac{P_{(0,0)(1,1)}\pi(1,1) + P_{(0,0)(1,0)}\pi(1,0) + P_{(0,0)(0,0)}\pi(0,0)}{\pi(0,0)}\end{aligned}\quad (11)$$

$$p_c(0,0) = p_1$$

De maneira similar, obtém-se $p_c(0, 1) = p_1$.

CUSTOS DOS ESTADOS DA CADEIA

A estrutura de custos considerada é similar àquela adotada por Bessegato e outros (2011). Para a composição do custo do sistema de monitoramento são considerados três de seus aspectos: inspeção, ajuste e envio de itens não conformes ao mercado. Supõe-se que os itens inspecionados são descartados. Adotamos a seguinte notação: c_{insp} , é o de custo de classificação e descarte de um item inspecionado; c_{nc} , é o custo de item defeituoso que segue para o consumidor final ou para as próximas etapas do processo; c_a , é o custo de ajustar o processo. Além disso, denota-se por $C(w, s)$ o custo médio do estado (w, s) .

Quando a cadeia alcança os estados (1, 0) e (1, 1), todos os itens são produzidos com o processo operando sob controle. Nesse caso, a quantidade média por ciclo de itens não inspecionados defeituosos é $p_0(m-1)$. Assim, o custo esperado dos ciclos (1, 0) e (1, 1) são, respectivamente:

$$C(1,0) = c_{insp} + p_0(m-1)c_{nc} + c_a \quad (12)$$

$$C(1,1) = c_{insp} + p_0(m-1)c_{nc} \quad (13)$$

Quando o processo está fora de controle durante a amostragem [estados (1, 0) e (1, 1)], há duas situações a serem consideradas para a determinação do custo médio de itens defeituosos enviados ao mercado. O primeiro caso refere-se aos ciclos que são iniciados com o processo de produção fora de controle, em que o número médio de itens não inspecionados defeituosos é $p_1(m-1)$. A segunda situação refere-se aos ciclos durante os quais o processo tornou-se fora de controle (aumentou a fração de não conformes do processo). Nessa situação, é razoável admitir que o processo, em média, saiu de controle na metade do ciclo. A quantidade média de itens defeituosos enviados ao mercado é então $(p_0 + p_1)(m-1)/2$. Empregando (11), o custo esperado dos ciclos de monitoramento associados aos estados (0, 0) e (0,1) são, respectivamente:

$$C(0,0) = c_{insp} + c_{nc}(m-1) \left[p_c(0,0) \frac{(p_0+p_1)}{2} + p_F(0,0)p_1 \right] + c_a \quad (14)$$

$$C(0,1) = c_{insp} + c_{nc}(m-1) \left[p_c(0,1) \frac{(p_0+p_1)}{2} + p_F(0,1)p_1 \right] \quad (15)$$

com $p_F(0, s) = p_c(0, s)$, $s = 0, 1$.

Para um grande número de inspeções, o custo médio de cada ciclo de monitoramento (C) é o custo de cada estado, ponderado pela proporção de vezes que o processo passa por cada estado. Assim, considerando-se que C é função do intervalo entre inspeções, m , tem-se que:

$$C(m) = C(0,0)\pi(0,0) + C(0,1)\pi(0,1) + C(1,0)\pi(1,0) + C(1,1)\pi(1,1) \quad (16)$$

O custo médio por item produzido e enviado ao mercado é então:

$$C_u(m) = \frac{C(m)}{m-1} \quad (17)$$

Não se pode obter uma expressão explícita para (17) e a solução é alcançada computacionalmente. Busca-se m^0 , o valor de m que minimiza $C_u(m)$.

APLICAÇÃO E RESULTADOS

O exemplo descrito nesta seção se baseia em Bessegato e outros (2011). A escolha foi motivada pela simplicidade e pela facilidade de ajuste para outras aplicações. Geralmente, qualquer processo de alta precisão que utilize controle automático fundamentado na coleta de observações individuais pode ser aprimorado pelo procedimento discutido neste trabalho.

Dados históricos permitem adotar $p_0 = 0,001$ como a fração de itens de itens não conformes do processo de produção (processo sob controle) e a mudança para um processo fora de controle

(proporção de itens não conformes produzidos, $p_1 = 0,05$) pode ocorrer com probabilidade constante, $q = 0,0001$ em cada item produzido com o processo sob controle. Os custos de operação do sistema de monitoramento da produção são estimados por $c_{insp} = \$0,025$, $c_a = \$100$, $c_{nc} = \$20$.

Diante das condições de operação apresentadas acima, a melhor estratégia de monitoramento encontrada é constituída por $m^0 = 15$. O custo médio unitário ótimo do sistema de monitoramento corresponde a $\$0,083054$. A busca do valor ótimo do parâmetro de planejamento foi exaustiva e foi efetuada por planilha eletrônica do Microsoft Excel© 2010. A Figura 2 mostra a curva do custo esperado versus o intervalo de amostragem m .

CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta algumas das características do planejamento econômico de procedimento de controle *on-line* por atributo, compreendendo a busca do parâmetro ótimo de planejamento (intervalo entre amostragens, m) e de seu correspondente custo unitário ótimo [$C_u(m^0)$]. Salienta-se a simplicidade do método e sua aplicabilidade em uma ampla gama de situações. O uso da planilha eletrônica mostra-se uma importante ferramenta na análise rápida dos resultados, principalmente quanto à observação de seu comportamento quando da alteração de parâmetros probabilísticos ou de custo (dados de entrada do modelo). O uso de propriedades de cadeias de Markov facilita a modelagem e a compreensão do problema.

Em trabalhos futuros, pode-se estudar a sensibilidade dos resultados em relação a variações de dados de entrada, bem como a análise dos efeitos decorrentes da incorporação de erros de classificação no modelo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG pelo financiamento da bolsa de iniciação científica de Fernanda Ferreira de Sousa, no âmbito do VIII Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior FAPEMIG/UFJF – 2012.

MARKOV CHAIN APPLICATIONS IN ECONOMICAL DESIGNS FOR CONTROL CHARTS FOR ATTRIBUTES

ABSTRACT

In this paper, it is considered a procedure for on-line control for attribute that consists of inspecting a single item for every m produced items. Based on the results of the inspection, it is decided whether there was an increase in the proportion of produced nonconforming items. If the inspected item is classified as nonconforming, the production process is adjusted so that the proportion of conforming items back to their original position. The probabilistic model of the control system employs properties of an ergodic Markov chain to obtain the expression of the average cost of the system per unit produced, which can be minimized as a function of the sampling interval, m . It is used electronic spreadsheet in Microsoft Excel 2010 to conduct a search of the optimal design parameter (m).

Keywords: Quality Control for Attributes. Economical Design. Markov Chain. Electronic Spreadsheet.

REFERÊNCIAS

- BESSEGATO, L. F. **Extensão para Controle *On-line* por Atributo com Erros de Classificação: Intervalo de Inspeção Variável, Amostragem Não-Unitária, Horizonte Finito e Infinito.** 2009, 180 p. Tese (Doutorado em Estatística), EST/Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2009.
- BESSEGATO, L.; QUININO, R.; HO, L. L. E DUCZMAL, L. Variable interval sampling in economical designs for on-line process control for attributes. **Journal of the Operational Research Society**, v. 62, p. 1365 – 1375, 2011.
- BESSEGATO, L. F.; QUININO, R. C.; DUCZMAL, L. H.; HO, L. L. On-line process control using attributes with misclassifications errors: an economical design for short-run production. **Communications in Statistics – Theory and Methods**, v. 41, p. 1813 – 1832, 2012.
- BORGES, W.; HO, L. L.; TURNES, O. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**, v. 17, n. 3, p. 261 – 276, 2001.
- LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- NAYEBPOUR, M. R.; WOODALL, W. H. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes. **Technometrics**, v. 35, n. 1, 53 – 60, 1993.
- TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. Controle on-line por atributos com erros de classificação: uma abordagem econômica com classificações repetidas. **Pesquisa Operacional**, v. 27, p. 105 – 116, 2007.
- QUININO, R.; COLIN, E. C.; HO, L. L. Diagnostic errors and repetitive sequential classifications in on-line process control by attributes. **European Journal of Operational Research**, v. 201, n. 1, p. 231 – 238, 2010.
- TAGUCHI, G.; ELSAYED, E. A. e HSIANG, T. **Quality Engineering in Production Systems.** New York: McGraw-Hill, 1989.