Desempenho de estimativas *bootstrap* por subgrupos dos limites de gráficos de controle $\bar{X}$: um estudo comparativo.

Lupércio França Bessegato (UFJF) lupercio.bessegato@ufjf.edu.br

Alan de Paiva Loures (UFJF) alan.loures@ice.ufjf.br

Fernando Luiz Pereira de Oliveira (UFOP) fernandoluizest@gmail.com

Resumo: Os gráficos de controle de Shewhart para $\bar{X}$ estão baseados na hipótese de que a distribuição da característica de qualidade é normal ou aproximadamente normal. Em muitas situações, entretanto, pode haver motivos para se duvidar da validade da hipótese de normalidade. Quando o gráfico não é robusto a erros de especificação do modelo, para estimar sua região de controle é usado ou um modelo paramétrico mais flexível ou alguma técnica não paramétrica. O bootstrap é uma técnica estatística que substitui as hipóteses paramétricas usuais por capacidade computacional. Vários autores propuseram a aplicação de bootstrap no contexto de controle de processos. Neste sentido, o presente trabalho utiliza um conjunto de distribuições, para conduzir simulações computacionais extensivas, no ambiente do software R, com o intuito de avaliar o desempenho de gráficos de controle de $\bar{X}$, construídos por bootstrap, comparados com aqueles obtidos pela metodologia usual. O desempenho dos gráficos de controle é avaliado principalmente em termos do comprimento médio da sequência.
Palavras-chave: Gráficos de controle; Estatística não paramétrica; Técnica bootstrap; Taxa de falso alarme.

1. Introdução

Desde sua origem, o gráfico de controle de Shewhart é uma poderosa ferramenta estatística no controle estatístico do processo (CEP). Essa metodologia consiste em um gráfico em que o tempo está disposto no eixo horizontal e, no eixo vertical, uma característica de controle (medidas individuais ou uma estatística tal como média ou amplitude). O gráfico contém uma linha central, representando o valor médio da característica de interesse e duas outras linhas horizontais, denominadas limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC). Os limites de controle oferecem verificações simples da estabilidade do processo, ou seja, eles sinalizam a presença de causas especiais. Em geral, a determinação dos limites de controle baseia-se em observações obtidas na denominada Fase I do controle do processo, compondo-se de 25 a 30 amostras iniciais. Os dados coletados da característica de qualidade são utilizados na estimação dos parâmetros desconhecidos do processo de produção.

Os gráficos de controle de $\bar{X}$ e *R* tem como hipótese que a medida sob monitoramento tem distribuição normal ou aproximadamente normal. Em muitas situações, entretanto, pode haver motivos para se duvidar da normalidade da população de interesse. Burr (1967), Schilling e Nelson (1976), Balakrishnan e Kocherlakota (1986), Chan, Hapuarachchi e Macpherson (1988), Bai e Choi (1995), Shore (2004), dentre outros, examinaram o efeito da não normalidade nos gráficos de $\bar{X}$ e *R*. Quando o gráfico não é robusto a erros de especificação do modelo, são usados ou um modelo paramétrico mais flexível ou técnicas não paramétricas para estimar a região de controle. Nesse sentido, Woodall e Montgomery (1999) apontam que o aumento da disponibilidade de dados levaria a um papel cada vez maior de métodos não paramétricos na construção de gráficos de controle. Dentre outros, Albers e Kallenberg (2004), Chakraborti, Laan e Wiel (2004), Vermaat et al. (2004), Polanski (2005), Qiu (2008), Balakrishnan, Triantafyllou e Koutras (2010), Mercado, Conerly e Perry (2011) propõem ou analisam modelos não paramétricos de gráfico de controle de Shewhart de variável para uso sob condições em que a característica monitorada do processo é marcadamente não normal. Polansky (2005) propôs uma estrutura generalizada para a construção de gráficos de controle, tanto no contexto univariado quanto no multivariado.

Algumas abordagens não paramétricas utilizam reamostragem que consiste em sortear, com reposição, os dados pertencentes a uma amostra, de modo a formar uma nova amostra. Dentre as diversas técnicas de reamostragem, a técnica *bootstrap*, introduzida por Efron (1979), não necessita de muitas suposições para estimação de parâmetros das distribuições de interesse, possuindo amplas possibilidades de aplicação. Por exemplo, Efron e Tibshirani (1993) a utilizam como uma abordagem para o cálculo de intervalos de confiança de parâmetros, em circunstâncias em que outras técnicas não eram aplicáveis, em particular no caso em que o tamanho da amostra era reduzido e a população seguia uma distribuição qualquer.

A aplicação metodologia do *bootstrap* não paramétrico em controle de processos está baseada no seguinte: suponha que usemos a variável aleatória *X* para avaliar o desempenho de um processo. Embora não haja sem nenhuma informação referente à distribuição de *X*, desejamos estimar algum parâmetro θ que caracteriza o desempenho do processo. Por exemplo, θ pode ser a média, mediana ou o desvio-padrão da população. Coleta-se uma amostra com *n* observações da população, x_1, x_2, ..., x_n. A partir dos dados amostrais, pode-se calcular uma estimativa do parâmetro de interesse, $\hat{\theta}$. É de interesse determinar sua distribuição amostral porque, em nosso caso, deseja-se usar valores futuros de $\hat{\theta}$ para construir um gráfico de controle para monitorar o comportamento do processo. De acordo com o *bootstrap* não paramétrico, a função de distribuição empírica (FDE) pode ser usada para estimar a função de distribuição acumulada subjacente da população. Pode-se selecionar da FDE uma amostra aleatória da FDE, denotada por x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n. Essa amostra é denominada amostra *bootstrap*. A amostra *bootstrap* é equivalente a reamostrar com reposição *n* observações a partir das *n* observações originais. Obtém-se da amostra *bootstrap* uma estimativa $\hat{\theta}$ da amostra *bootstrap* a qual é denominada estimativa *bootstrap* e denotada por $\hat{\theta}^*$. Este procedimento pode ser repetido, por exemplo, *B* vezes. Podem ser calculadas as *B* estimativas *bootstrap*. Um histograma de $\hat{\theta}^*$ fornece uma estimativa da distribuição amostral de $\hat{\theta}$. Maiores detalhes sobre métodos *bootstrap* podem ser encontrados em Efron e Gong (1983), Gunter (1991, 1992), Mooney e Duval (1993), Young (1994) e Davison e Hinkley (1997).

Em particular, pode-se usar a metodologia *bootstrap* para estimar a distribuição amostral de uma estatística de parâmetro de processo de produção, bastando assumir que a amostra é representativa da população e que as observações são independente e identicamente distribuídas. Há várias propostas de uso da abordagem *bootstrap* na construção de gráficos de controle. Dentre elas, destacamos Bajgier (1992), Seppala et al. (1995), Liu e Tang (1996), Qiu e Hawkins (2003), Lio e Park (2008), Park (2009), Edopka e Ogbeide (2013). Em importante artigo, Jones e Woodall (1998) traçam um roteiro eficiente para comparar o desempenho de três métodos *bootstrap* na determinação dos limites de controle de gráficos de $\bar{X}$ em situações de não normalidade.

Neste trabalho utilizamos alguns dos métodos *bootstrap* para estimação dos limites de controle de gráficos de $\bar{X}$, analisando e comparando seu desempenho com aquele oferecido pela metodologia paramétrica usual. Na seção 2 detalhamos as técnicas não paramétricas utilizadas na determinação dos limites de controle de gráficos de $\bar{X}$. A seguir, são apresentados os resultados de um estudo Monte Carlo, baseado em 10.000 simulações para vários tamanhos de subgrupos e de amostras. As simulações são repetidas para um conjunto de distribuições representativas de situações de não normalidade que se deseja estudar. Finalmente, apresentamos nossas conclusões e indicamos sugestões para a continuidade dessa pesquisa.

2. Metodologia *bootstrap*

Em nosso estudo, consideramos um gráfico de controle para $\bar{X}$, com limites superior e inferior de controle, denotados por LSC e LIC, respectivamente.

Gráfico de Controle Clássico para $\bar{X}$:

Assume-se que *F*, a função de distribuição acumulada da característica de qualidade, é normal com média μ e desvio-padrão σ. Então, considerados subgrupos de tamanho *n*, o gráfico de controle tradicional para $\bar{X}$ tem limites definidos por:

$$\mathrm{LSC} = \mu + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ e} \tag{1}$$

$$\mathrm{LIC} = \mu + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

Onde Φ^{-1} é a função quantil da distribuição normal padrão e α é a taxa de falsos alarmes. Embora μ e σ sejam geralmente desconhecidos, eles podem ser estimados a partir de um conjunto de *k* subgrupos preliminares, cada qual com *n* observações da característica de qualidade. As amostras são retiradas quando o processo supostamente estava estável. Esta etapa de determinação dos limites tentativos do gráfico é denominada Fase I do controle do processo. O estimador clássico de m é:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{X}_i}{k}\,, \tag{3}$$

onde $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$ são as médias de cada dos subgrupos. A amplitude da amostra é a diferença entre a maior e a menor observação e a amplitude média das *k* amostras é

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \bar{R}_i}{k}\,, \tag{4}$$

Os limites de controle do gráfico de $\bar{X}$, baseados na amplitude média são definidos em Montgomery (2004) por:

$$\mathrm{LSC}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} \text{ e} \tag{5}$$

$$\mathrm{LIC}_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}, \tag{6}$$

onde d_2 é a constante de correção de vício da amplitude amostral, dependendo apenas do tamanho da amostra.

Este gráfico tende a ter um desempenho razoável para tamanhos moderados de amostras Fase I (Wheeler, 1995).

Método Bootstrap

Um estimador natural do quantil q da distribuição F é o quantil empírico que é definido como:

$$\hat{F}_k^{-1}(x) = \inf\{x;\ \hat{F}_k(x) \geq q\},\ 0 < q < 1, \tag{7}$$

onde $\hat{F}_k$ é a função e distribuição empírica que atribui probabilidade $1/k$ para cada X_i, $1 \leq i \leq k$, isto é:

$$\hat{F}_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} I_{\{X_i \leq x\}},\ -\infty < x < \infty, \tag{8}$$

em que I_A é variável aleatória indicadora que assume valor 1, se o evento A é verdadeiro e zero, caso contrário.

A filosofia da abordagem *bootstrap* nos problemas estatísticos é trocar a função de distribuição desconhecida F de uma variável aleatória por uma função de distribuição empírica. Por esse motivo, procede-se à seleção aleatória, com reposição, de amostras adicionais de $\hat{F}_k$. A amostra obtida é denominada amostra *bootstrap*. O número de reamostragens necessárias depende da distribuição da população e da estatística que está sendo avaliada. Em geral, para estimativas de quantis, são usadas de 1.000 a 2.000 reamostragens (Seppala et al., 1995). Para amostras grandes, Efron (1979) sugere o uso de simulação Monte Carlo para aproximar a distribuição *bootstrap*.

O algoritmo geral de reamostragem *bootstrap* (Efron, 1979) é o seguinte:

1. Iniciar a contagem em $i = 1$ e defina B, um número grande (1.000 a 2.000).
2. Selecionar uma amostra aleatória $X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*$, da amostra inicial $X_1, X_2, ..., X_n$, com reposição e calcule o valor *bootstrap* da estatística de interesse $T_i^* = T(X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$.
3. Se $i = B$ pare, caso contrário incremente de i para $i + 1$ e repita o passo 2.

Usando esta simulação Monte Carlo, são obtidas B estimativas amostrais para T, T_1^*, T_2^*, ..., T_B^*. Estes B valores formam uma distribuição amostral pseudo-empírica F_T^* que é a versão *bootstrap* de $T(X_1, X_2, ..., X_n)$. O quantil p de $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ é então estimado pelo quantil p da distribuição *bootstrap* F_T^*. A variabilidade Monte Carlo na estimação da função de distribuição *bootstrap* pode ser removida inteiramente apenais por uma simulação infinita que é impossível e desnecessário na prática. A estatística *bootstrap* é consistente e sua variabilidade relaciona-se com a verdadeira variância dos dados e com a curtose da distribuição subjacente e desconhecida *F*. As estimativas dos quantis das caudas da distribuição requerem valores de *B* maiores que aqueles adotas no centro da distribuição.

Dessa maneira, um gráfico de controle *bootstrap* para monitorar a média do processo, como uma alternativa ao gráfico de controle de Shewhart para $\bar{X}$, é aquela em que a estatística de interesse T_i^* (passo 2 do procedimento) é a média amostral da *i*-ésima amostra *bootstrap*, $\bar{X}_i^*$. O limite superior de controle *bootstrap* é determinado pelo menor valor ordenado $\bar{x}^*$, tal que haja $(1 - \alpha/2)B$ valores abaixo dele. Por outro lado, pelo menor valor ordenado $\bar{x}^*$, tal que haja $\alpha/2.B$ valores abaixo dele é o limite inferior de controle *bootstrap*. Esse procedimento foi proposto por Bajgier (1992).

Bootstrap por subgrupos

Seppala et al. (1995) apontaram que uma limitação ao gráfico de controle *bootstrap* descrito acima é que a aquela abordagem assume implicitamente a estabilidade do processo por ocasião do cálculo dos limites. Se esta hipótese for violada e o processo estiver fora de controle, o uso do procedimento de Bajgier (1992) implicará limites de controle muito amplos. O *bootstrap* por subgrupos, proposto por Seppala et al. (1995), busca evitar a hipótese de que o processo está sob controle quando da determinação dos limites de controle. O *bootstrap* por subgrupo assume que as observações estão descritas por

$$X_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, k \quad e \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

onde μ_i é a média verdadeira do *i*-ésimo subgrupo e ε_{ij} é o termo do erro aleatório da observação. O algoritmo *bootstrap* por subgrupos é o seguinte:

1. Observe *k* grupos de tamanho *n* (*n.k* observações).
2. Calcule $e_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i,\ i = 1, 2, \ldots, k\ e\ j = 1, 2, \ldots, n$, onde $\bar{x}_i$ é a média do *i*-ésimo subgrupo observado.
3. Colete uma amostra aleatória de tamanho *n*, com reposição, da amostra combinada dos *nk* resíduos calculados no passo 2. Esta amostra $e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*$ é uma amostra *bootstrap*.
4. Calcule $x_j = \bar{\bar{x}} + a\, e_j^*$, para $j = 1, 2, \ldots, n$, em que $a = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ é um fator de correção usado para ajustar a variância dos subgrupos reamostrados.
5. Calcule a média amostral, $\bar{x}^*$, de $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.
6. Repita os passos de 3 a 5 *B* vezes (*B* é um valor grande).
7. Ordene as *B* estimativas *bootstrap* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_B$.
8. Encontre o menor valor ordenado $\bar{x}^*$ tal que haja $\alpha/2.B$ valores abaixo dele. Este é o limite inferior de controle *bootstrap* (LIC_{SG}).
9. Encontre o menor valor ordenado tal que $(1 - \alpha/2).B$ valores estejam abaixo dele. Este é o limite superior do gráfico de controle *bootstrap* (LSC_{SG}).

Para aprimorar a estimativa dos limites de controle, os quantis são interpolados. Esse procedimento tem pequeno efeito nos limites de controle se *B* é grande e nenhum efeito se $(1 - \alpha/2).B$ e $(1 - \alpha/2).B$ são valores inteiros. Dentre outros autores, Liu e Tang (1996), Wu e Zhang (1996), Wood, Kaye e Capon (1999) e Lio e Park (2008) estudaram outras alternativas de gráficos de controle *bootstrap* para a média.

3. Simulações e resultados

Foram efetuadas simulações extensivas para avaliar o desempenho de gráficos de controle *bootstrap*, construídos pelo método dos subgrupos descrito na Seção 2. Utilizaram-se amostras da distribuição normal padrão, distribuição de Laplace com parâmetro l = 1, distribuição exponencial com média 1 e a mistura de normais denominada “assimétrica unimodal”, estabelecida por Marron e Wand (1992) [parâmetros das densidades da mistura encontram-se na Tabela 1]. Para cada uma dessas distribuições foi estudado o desempenho dos gráficos de controle na situação em que o processo de produção opera sob controle estatístico. A taxa de alarmes falsos considerada foi a = 0,10, correspondendo a um número esperado de 10 amostras até um alarme falso (comprimento médio da sequência – CMS). Para esta condição, a cobertura do gráfico de controle é $CBT = \mathrm{P}\{LIC \leq \bar{X} \leq LSC\} = 1 - \alpha = 0,90$*CBT* = P{*LIC* ≤ X ≤ *LSC*} = 1 – α = 0,9973.

Tabela 1 – Parâmetros para as densidades da mistura de normais.

Densidade	$w_1\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \cdots + w_m\mathrm{N}(\mu_m, \sigma_m^2)$
Assimétrica unimodal	$\frac{1}{5}\mathrm{N}(0,1) + \frac{1}{5}\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{3}{5}\mathrm{N}\left(\frac{13}{2}, \left(\frac{5}{9}\right)^2\right)$

Utilizamos o software estatístico R (R Core Team, 2013) para o estudo Monte Carlo. Essa análise baseou-se em 10.000 simulações de *n.k* observações, *n* = 5, 10 e *k* = 5, 20, das distribuições supracitadas. Cada conjunto de *n.k* observações foi reamostrado *B* = 2.000 vezes para a determinação dos limites de controle *bootstrap*. Em cada caso, foram determinados o limite superior de controle médio (LSC_m), limite inferior de controle médio (LIC_m) e a taxa média de cobertura (CBT_m), por meio das expressões $LSC_m = \frac{1}{10.000}\sum_{i=1}^{10.000} LSC_{SG_i}$, $LIC_m = \frac{1}{10.000}\sum_{i=1}^{10.000} LIC_{SG_i}$ e $CBT_m = \frac{1}{10.000}\sum_{i=1}^{10.000} CBT_i$, respectivamente. A estimativa correta do comprimento médio da sequência, com o processo estável, foi obtida por: $CMS_m = \frac{1}{10.000}\sum_{i=1}^{10.000} \frac{1}{1-CBT_i}$. Salienta-se que o desvio padrão dos comprimentos da sequência é definido como $DCS_m = \sqrt{\frac{1}{10.000-1}\sum_{i=1}^{10.000}\left(\frac{1}{1-CBT_i} - CMS_m\right)^2}$.

Os limites de controle teóricos e a taxa de cobertura da distribuição de Laplace foram calculados de acordo com o método proposto por Nguyen e Chen (2009). No caso da mistura de normais, essas quantidades foram aproximadas por meio de simulação Monte Carlo. Para comparar os resultados da simulação com o desempenho do gráfico de controle de Shewhart de , foram calculados os limites de controle do gráfico clássico para cada conjunto de *k* subgrupos de tamanho *n*. Nesse caso, o desvio padrão do processo foi calculado através da média das amplitudes dos subgrupos. Nas tabelas de 2 a 5, os erros padrão das estimativas estão relacionados entre parênteses.

Os valores estimados dos limites médios superiores e inferiores construídos tanto pelo método clássico quanto pelo *bootstrap* por subgrupos são próximos entre si no caso das distribuições simétricas estudadas (ver Tabela 2). Percebe-se também que as estimativas médias se aproximam do valor exato à medida que a quantidade de observações aumenta. Salienta-se, entretanto que os erros padrão das estimativas *bootstrap* são de duas a três vezes maiores que a variabilidade alcançada pelas estimativas através do método clássico. No caso das distribuições assimétricas (Tabela 3), percebe-se que as estimativas *boostrap* estão consistentemente mais próximas do valor exato, embora não muito distantes das estimativas obtidas pelo método clássico. Aparentemente o método *bootstrap* oferece melhores estimativas dos limites inferiores. Novamente, percebe-se que os erros padrão das estimativas *bootstrap* são maiores que aqueles obtidos através do método clássico.

Tabela 2: Estimativas dos limites de controle – Distribuições simétricas.

Distribuição		N(0, 1)				Laplace			
	n	5	5	10	10	5	5	10	10
	k	5	20	5	20	5	20	5	20
LSC_m	*clássico*	0,750 (0,018)	0,737 (0,006)	0,518 (0,008)	0,520 (0,003)	1,034 (0,023)	1,031 (0,011)	0,750 (0,011)	0,732 (0,006)
	bootstrap	0,753 (0,028)	0,738 (0,022)	0,518 (0,017)	0,520 (0,015)	1,028 (0,042)	1,026 (0,039)	0,749 (0,024)	0,730 (0,023)
	exato	0,736	0,736	0,520	0,520	1,048	1,048	0,743	0,743
LIC_m	*clássico*	–0,731 (0,018)	–0,737 (0,006)	–0,526 (0,007)	–0,530 (0,007)	–1,065 (0,036)	–1,054 (0,017)	–0,724 (0,011)	–0,735 (0,007)
	bootstrap	–0,731 (0,027)	–0,738 (0,021)	–0,527 (0,017)	–0,531 (0,016)	–1,061 (0,052)	–1,053 (0,040)	–0,724 (0,026)	–0,735 (0,024)
	exato	–0,736	–0,736	–0,520	–0,520	–1,048	–1,048	–0,7743	–0,743

Tabela 3: Estimativas dos limites de controle – Distribuições assimétricas.

Distribuição		Exponencial				Assimétrica unimodal			
	n	5	5	10	10	5	5	10	10
	k	5	20	5	20	5	20	5	20
LSC_m	*clássico*	1,740 (0,025)	1,739 (0,027)	1,528 (0,018)	1,528 (0,011)	1,352 (0,010)	1,360 (0,014)	1,179 (0,008)	1,176 (0,006)
	bootstrap	1,807 (0,040)	1,803 (0,039)	1,572 (0,028)	1,572 (0,022)	1,328 (0,019)	1,335 (0,020)	1,165 (0,013)	1,162 (0,013)
	exato	1,831	1,831	1,571	1,571	1,318	1,318	1,154	1,154
LIC_m	*clássico*	0,266 (0,007)	0,268 (0,005)	0,484 (0,002)	0,481 (0,022)	0,157 (0,022)	0,162 (0,010)	0,332 (0,010)	0,328 (0,008)
	bootstrap	0,349 (0,016)	0,349 (0,016)	0,535 (0,013)	0,534 (0,011)	0,135 (0,030)	0,139 (0,022)	0,318 (0,017)	0,315 (0,016)
	exato	0,394	0,394	9,543	0,543	0,126	0,126	0,310	0,310

Na maioria dos casos, os gráficos de controle de Shewhart para $\bar{X}$ e o de *bootsrap* por subgrupos têm valores de comprimento médio da sequência (CMS_m) que são próximos aos valores exatos quando os limites de controle são estimados a partir de amostras simétricas (ver Tabela 4). Entretanto quando a amostra é proveniente de distribuições assimétricas o comprimento médio de sequência (CMS_m) obtidos pelo procedimento de *bootstrap* é sensível ao tamanho amostral (ver Tabela 5).

Os valores obtidos consideraram uma taxa de falso alarme $\alpha = 0{,}10$. Na prática, é improvável, no entanto, que limites de controle com taxas de alarme falso dessa magnitude sejam úteis. É importante salientar que as estimativas não paramétricas da função de distribuição convergem muito mais lentamente que as estimativas de médias e, portanto as estimativas de quantis requerem reamostragens *bootstrap* muito maiores que aquelas utilizadas na estimação de erros padrão ou na construção de intervalos de confiança (Davison e Hinkley, 1997). Jones e Woodall (1998) apontam que, para amostras de distribuição exponencial o CMS_m obtido pelo *bootstrap* por subgrupo é sensível aos tamanhos amostrais menores que 5 e às taxas de falso alarme menores que 0,01.

Tabela 4: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições simétricas.

Distribuição		N(0, 1)				Laplace			
	n	5	5	10	10	5	5	10	10
	k	5	20	5	20	5	20	5	20
CBT_m (0,90)	*clássico*	0,9019	0,9006	0,9011	0,9030	0,9000	0,9066	0,9012	0,8984
	bootstrap	0,9021	0,9007	0,9009	0,9030	0,8978	0,9052	0,9005	0,8979
CMS_m (10)	*clássico*	10,2 (0,285)	10,1 (0,184)	10,1 (0,234)	10,3 (0,233)	10,0 (0,382)	10,8 (0,205)	10,1 (0,355)	9,8 (0,159)
	bootstrap	10,3 (0,771)	10,1 (0,707)	10,1 (0,744)	10,4 (0,750)	9,8 (0,757)	10,6 (0,792)	10,1 (0,763)	9,8 (0,720)

Tabela 5: Medidas médias de desempenho com processo sob controle – Distribuições assimétricas.

Distribuição		Exponencial				Assimétrica Unimodal			
	n	5	5	10	10	5	5	10	10
	k	5	20	5	20	5	20	5	20
CBT_m (0,90)	*clássico*	0,9221	0,9217	0,9123	0,9133	0,8963	0,8954	0,9027	0,9064
	bootstrap	0,9130	0,9124	0,9034	0,9043	0,8947	0,8956	0,9024	0,9048
CMS_m (10)	*clássico*	12,9 (1,066)	12,8 (0,941)	11,4 (0,578)	11,6 (0,464)	9,7 (0,421)	9,6 (0,201)	10,3 (0,593)	10,7 (0,208)
	bootstrap	11,6 (1,129)	11,6 (1,100)	10,4 (0,799)	10,5 (0,769)	9,6 (0,772)	9,6 (0,677)	10,3 (0,926)	10,6 (0,691)

4. Conclusões

Os resultados desses estudos por simulação mostram que as cartas de controle *bootstrap* para $\bar{X}$ não apresentam um comportamento substancialmente melhor que o método tradicional, quando o desempenho das cartas é avaliado em termo do comprimento médio da sequência, dado que o processo de produção esteja sob controle estatístico. Salienta-se que o teorema Central do Limite assegura ao método tradicional uma boa performance para amostras grandes. Verifica-se, entretanto, que a metodologia *bootstrap* adotada produziu estimativas próximas, em média, do verdadeiro valor dos limites de controle no caso das distribuições assimétricas. Além disso, em geral, são pequenas as taxas de falsos alarmes desejadas para os gráficos de controle de $\bar{X}$. Sendo assim, a variabilidade no desempenho do *bootstrap* por subgrupos na estimação dos limites de controle com uma probabilidade pequena de falso alarme pode ser um grave impedimento para sua aplicabilidade. É claro, no entanto, que em muitas aplicações podemos não estar confiantes em um particular modelo paramétrico e na análise baseada nele. Mesmo assim, pode ser útil verificar o que pode ser inferido sem assumir este particular modelo paramétrico. Assim, em concordância com o estudo de Jones e Woodall (1998), nota-se que, no caso de uma carta de controle de $\bar{X}$, o método não paramétrico aparenta ser mais útil quando a população segue uma distribuição assimétrica.

Por outro lado, Capizzi e Masarotto (2013) salientam que os procedimentos não paramétricos são capazes de garantir uma probabilidade prescrita de falsos alarmes sem qualquer conhecimento sobre a distribuição subjacente ao processo sob controle estatístico. Esta característica é particularmente relevante para a Fase I do controle estatístico do processo.

Em continuidade a nossa pesquisa, recomenda-se a verificação do desempenho do método *bootstrap* na construção de gráficos de controle de $\bar{X}$ com taxas de alarmes falsos pequenas, assim como investigar o efeito do aumento no valor de B para reduzir a variabilidade das estimativas. Deve-se dedicar especial interesse na comparação do desempenho do método na estimação de limites de controle, baseando-se em amostras provenientes de distribuições com coeficientes de assimetria e de curtose mais acentuados que aqueles das distribuições utilizadas neste trabalho. É importante também avaliar o comportamento desses gráficos no monitoramento de processos de produção fora de controle.

Outra metodologia não paramétrica para construção de gráficos de controles que merece atenção é a dos núcleos estimadores. Em geral, as estimativas por núcleo estimador também são sensíveis quando se estimam quantis localizados nas extremidades das distribuições e critérios de escolha local do parâmetro de suavização, na direção do proposto por Mercado, Cornely e Perry (2011), podem ser mais eficientes que o método *bootstrap* utilizado neste trabalho.

Agradecimento

Os autores agradecem a PROPESQ/UFJF, que financiou a bolsa de iniciação científica de Alan de Paiva Loures, no âmbito do XXV Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica BIC/UFJF – 2012/2013 e a FAPEMIG (projetos APQ-00613-12 e APQ-01953-12).

Referências

ALBERS, W.; KALLENBERG, W. C. M. Empirical non-parametric control charts: estimation effects and corrections. *Journal of Applied Statistics*. v. 31, n. 3, p. 345-360, 2004.

BAJGIER, S. M. The use of bootstrapping to construct limits on control charts. *Proceedings of the Decision Science Institute*, San Diego, CA, p. 1611-1613, 1992.

BAI, D. S.; CHOI, I. S. $\bar{X}$ and R control charts for skewed populations. *Journal of Quality Technology*, v. 27, n. 2, p. 120-131, 1995.

BALAKRISHNANN, N.; KOCHERLAKOTA, S. Effects of non-normality on $\bar{X}$ charts: single assignable cause model. *Sankya B*, v. 48, p. 439-444, 1986.

BALAKRISHNAN, N.; TRIANTAFYLLOU, I. S.; KOUTRAS, M. V. A distribution-free control charts based on order statistics. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, v. 39, n. 20, p. 3652-3677, 2010.

BURR, I. W. The effect of non-normality on constants for $\bar{X}$ and *R* charts. *Industrial Quality Control*, v. 24, p. 563-569, 1967.

CAPIZZI, G.; MASAROTTO, G. Phase I Distribution-free analysis of univariate data. *Journal of Quality Technology*. v. 45, n. 3, p. 273-284, 2013.

CHAKRABORTI, S.; LAAN, P. e WIEL, M. A. A class of distribution-free control charts. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, v. 53, n. 3, p. 443-462, 2004.

CHAN, L. K.; HAPUARACHCHI, K. P.; MACPHERSON, B. D. Robustness of $\bar{X}$ and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 37, p. 117-123, 1988.

DAVISON, A. C.; HINKLEY, D. V. *Bootstrap methods and their application*. London: Cambridge University Press, 1997. 594 p.

EDOPKA, I. W.; OGBEIDE, E. M. Bootstrap approach control limit for statistical quality control. International Journal of Engineering Science Invention, v. 2, n. 4, p. 28-33, 2013.

EFRON, B. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, v. 7, p. 1-26, 1979.

EFRON, B. e GONG, G. "A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation". The American Statistician, v. 37, pp. 36-48, 1983.

EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An introduction to the bootstrap*. v. 57. Boca Raton: CRC Press, 1994. 456 p.

GUNTER, B. Bootstrapping: how to make something from almost nothing and get statistically valid answers, part I. *Quality Progress*, v. 24, n. 12, p. 97-103, 1991.

GUNTER, B. Bootstrapping: how to make something from almost nothing and get statistically valid answers, part III. *Quality Progress*, v. 25, n. 4, p. 119-122, 1992.

JONES, L. A.; WOODALL, W. H. The performance of bootstrap control charts. *Journal of Quality Technology*, v. 30, n. 4, p. 362-375, 1998.

LIO, Y. L.; PARK, C. A bootstrap control chart for Birnbaum–Saunders percentiles. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 24, n. 5, p. 585-600, 2008.

LIU, R. Y.; TANG, J. Control chart dependent and independent measures based on bootstrap methods. *Journal of the American Statistical Association*, v. 91, 1694-1700, 1996.

MARRON, J. S.; WAND, M. P. Exact mean integrated squared error, *The Annals of Statistics*, 20, 712 – 736, 1992.

MERCADO, G. R.; CONERLY, M. D.; PERRY, M. B. Phase I control charts based on kernel estimator of the quantile function. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 27, n. 8, p. 1131-1144, 2011.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*, 4ª. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2004. 513 p.

MOONEY, C. Z.; DUVAL, R. D. *Bootstrapping: a nonparametric approach to statistical inference*. Newbury Park: Sage Publications, 1993.

NGUYEN, T. T.; CHEN, J. T. A connection between the double gamma model and Laplace sample mean. *Statistics & Probability Letters*, v. 79, n. 10, p. 1305-1310, 2009.

PARK, H. I. Median control charts based on bootstrap method. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, v. 38, n. 3, p. 558-570, 2009.

POLANSKY, A. M. A. General framework for constructing control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 21, n. 6, p. 633-653, 2005.

QIU, P. Distribution-free multivariate process control based on log-linear modeling. *IIE Transactions*, v. 40, n. 7, p. 664-677, 2008.

QIU, P.; HAWKINS, D. A nonparametric multivariate cumulative sum procedure for detecting shifts in all directions. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, v. 52, n. 2, p. 151-164, 2003.

SCHILLING, E. G.; NELSON, P. R. The effect of non-normality on the control limits of $\bar{X}$charts. *Journal of Quality Technology*, v. 8, p. 183-188, 1976.

SEPPALA, T; MOSKOWITZ, H.; PLANTE, R.; TANG, J. Statistical process control via the subgroup bootstrap. *Journal of Quality Technology*, v. 27, p. 139-153, 1995.

SHORE, H. Non-normal populations in quality applications: a revisited perspective. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 20, n. 4, p. 375–382, 2004.

VERMAAT, M. B.; ION, R. A.; DOES, M. M.; KLAASEN, C. A. J. A comparison of Shewhart individuals control charts based on Normal, Non-parametric and extreme-value theory. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 19, p. 337-353, 2003.

WHEELER, D. J. *Advanced topics in statistical process control*. Knoxville: SPC Press. 2004. 470 p.

WOOD, M.; KAYE, M.; CAPON, N. The use of resampling for estimating control charts limits. *Journal of the Operational Research Society*. v. 50, p. 651-659, 1999.

WOODALL, W. H.; MONTGOMERY, D. C. Research issues and ideas in statistical process control. *Journal of Quality Technology*, v. 31, p. 376-386, 1999.

WU, Z.; WANG, Q. Bootstrap control charts. *Quality Engineering*. v. 9, p. 143-150, 1996.

YOUNG, G. A. Bootstrap: more than a stab in the dark. *Statistical Science*. v. 9, p. 382-415, 1994.