

Lista de Exercícios – Processo de Poisson

- 1) Sejam $\{X_i; i \geq 0\}$ e $\{Y_i; i \geq 0\}$ dois processos de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2 , respectivamente. Defina $Z_t = X_t - Y_t, t \geq 0$. Este é um processo estocástico cujo espaço de estados consiste de todos os inteiros (positivos, negativos e zero).

Seja $P_n(t) = P\{Z_t = n\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$

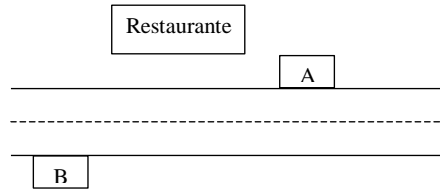
Estabeleça a fórmula $\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(t) Z^n = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\} \exp\{\lambda_1 z t + (\lambda_2 / z)t\}$.

Calcule $E\{Z(t)\}$ e $E\{Z(t)^2\}$

- 2) Chamadas chegam a uma taxa de 15 chamadas por minuto de acordo a um processo de Poisson.
- Encontre a probabilidade de que, em um período de 1 minuto, cheguem 3 chamadas durante os primeiros 10 segundos e 2 chamadas durante os últimos 15 segundos.;
 - Determine a média e a variância do tempo até a chegada da décima chamada.
- 3) Seja $\mathbf{X} = \{X_i; i \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa $\lambda = 15$. Calcule:
- $\mathbf{P}(X_6 = 9)$;
 - $\mathbf{P}(X_6 = 9, X_{20} = 13, X_{56} = 27)$;
 - $\mathbf{P}(X_{20} = 13 | X_6 = 9)$;
 - $\mathbf{P}(X_6 = 9 | X_{20} = 13)$.
- 4) Seja $\mathbf{X} = \{X_i; i \geq 0\}$ um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2$. Calcule:
- $\mathbf{E}(X_t)$ e $\mathbf{Var}(X_t)$;
 - $\mathbf{E}(X_{t+s} | X_t)$.
- 5) Suponha que as chegadas de passageiros em uma parada de ônibus seguem um processo de Poisson \mathbf{X} , com taxa $\lambda = 1/3$ por minuto. Assuma que um ônibus partiu da parada no instante $t = 0$, não deixando nenhum passageiro para trás. Seja T o instante de chegada do próximo ônibus. Então o número de passageiros presentes quando ele chegar será X_T . Suponha que T tem distribuição Ψ .
- Calcule $\mathbf{E}(X_T | T)$ e $\mathbf{E}(X_T^2 | T)$.
 - Calcule $\mathbf{E}(X_T)$ e $\mathbf{Var}(X_T)$ para $f_\Psi = 1/2, 9 \leq t \leq 11$.
- 6) Uma loja promete dar um pequeno presente a cada 13º cliente que chegue à loja. Supondo que os clientes cheguem segundo um processo de Poisson com taxa λ ,
- Encontre a f.d.p. do tempo entre chegadas de clientes que recebem presentes ;
 - Encontre $\mathbf{P}(M_t = k)$ para o número de presentes dados pela loja no intervalo $[0, t]$
- 7) Clientes chegam a uma loja segundo um processo de Poisson \mathbf{X} com taxa $\lambda = 20$ por hora. Encontre o número esperado de vendas realizadas durante um dia de trabalho (a loja fica aberta 8 horas por dia), supondo que a probabilidade de um cliente comprar algo é 0,3.
- 8) Para um processo de Poisson, mostre que, para $0 < s < t$,

$$P(X_s = k | X_t = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- 9) Considere o tráfego em uma estrada, conforme figura abaixo. Sabe-se que a quantidade de veículos passando pelo ponto A em uma hora segue uma distribuição de Poisson com média 60; 20% destes veículos são caminhões. O número de veículos passando pelo Ponto B em uma hora também segue uma distribuição de Poisson, possuindo média 80; 30% destes veículos são caminhões. Em geral, 10% de todos os veículos param no restaurante. O número de pessoas em um caminhão é um; o número de passageiros em um carro é igual a 1, 2, 3, 4, ou 5, com probabilidades 0,30; 0,30; 0,20; 0,10 e 0,10. Encontre o valor esperado do número de pessoas chegando no restaurante em uma hora (Z);



- 10) Um dispositivo está sujeito a choques que ocorrem de acordo com um processo de Poisson X , com taxa λ . O dispositivo pode falhar somente devido ao choque, e a probabilidade que um dado choque cause falha é p independente do número e dos tempos dos choques anteriores. Seja K o número total de choques que o dispositivo leva antes da falha, e seja $T=T_K$ o tempo da falha.
- Calcule $E(T)$ e $Var(T)$;
 - Calcule $E(T|K)$.
 - Calcule $E(T|K>9)$.
- 11) Uma loja de departamentos tem três portas. As chegadas em cada porta seguem um processo de Poisson com taxas $\lambda_1=110, \lambda_2=90, \lambda_3=160$ clientes por hora. 30% de todos os clientes são homens. A probabilidade que um cliente masculino compre algum produto é 0,80, sendo de 0,10 no caso das clientes femininas. Uma compra média é avaliada em \$4,50.
- Qual é a média do total de vendas efetuadas em um dia de 10 horas;
 - Qual a probabilidade de que a 3ª cliente feminina a comprar algum produto, chegue durante os primeiros 15 minutos? Qual é o tempo esperado de sua chegada?
- 12) Clientes chegam em um banco de acordo com um processo de Poisson com taxa λ . Suponha que dois clientes cheguem durante a primeira hora. Qual é a probabilidade que:
- Ambos tenham chegado durante os primeiros 20 minutos?
 - Pelo menos um tenha chegado durante os primeiros 20 minutos.
- 13) Admita que automóveis passem por determinado trecho de uma estrada de acordo a um processo de Poisson com taxa $\lambda=3$ carro por minuto.
- Suponha que uma pessoa decida atravessar esse mesmo trecho com os olhos vendados. Qual é a probabilidade de ele conseguir escapar ileso, se a referida travessia demorar s segundos: Considere $s = 2, 5, 10, 20$.
 - Suponha agora que a mesma pessoa é suficientemente ágil para conseguir escapar ileso de um automóvel, não acontecendo o mesmo, se durante a travessia surgirem dois ou mais automóveis. Calcule a probabilidade de esta pessoa não ser ferida, caso a travessia demore $s = 5, 10, 20, 30$ segundos.
- 14) Em cada domingo, 15 unidades de um determinado produto são postas em estoque para venda no restante da semana. As encomendas desse produto ocorrem de acordo a um processo de Poisson de taxa igual a 3 unidades por dia. Note-se que uma encomenda não resulta numa venda caso não haja unidades em estoque. Admita ainda que devido à natureza do produto são destruídas em cada domingo todas as unidades que não tenham sido vendidas na semana anterior.
- Calcule a probabilidade de não haver unidades para venda a partir das 0 horas de terça-feira;
 - Determine a probabilidade de terem sido vendidas todas as unidades em estoque até as 24 horas de sábado;
 - Obtenha a expressão do número esperado de unidades destruídas em cada semana.
- 15) Um certo produto é distribuído diariamente, mas a hora de sua chegada é uma variável aleatória com distribuição uniforme entre -1h e 2h (sendo zero a hora de abertura do supermercado). O processo de chegadas dos clientes ao supermercado é um processo de Poisson de taxa 20 (a unidade de tempo é a hora).
- Sabendo que em cada 100 clientes, 60 pretendem adquirir o referido produto, calcule o número esperado de clientes não servidos diariamente devido ao produto não ter sido ainda distribuído;
- Ainda no mesmo supermercado, vai realizar-se, num determinado dia, uma campanha que consiste em atribuir um prêmio a cada 20º. cliente que chegar.
- Qual é a distribuição do intervalo de tempo entre chegadas de clientes premiados?
 - Sabendo que o supermercado está aberto entre as 9h e as 19h, indique a expressão que lhe permitiria calcular a probabilidade de ter-se que atribuir exatamente 10 prêmios;
 - Considere um processo $\{Y(t), t \geq 0\}$, em que $Y(t)$ representa o número de clientes premiados no intervalo $(0, t]$. Será que $Y(t)$ é um processo de Poisson? Justifique.

- 16) Automóveis passam em determinado ponto de uma estrada de acordo a um processo de Poisson de taxa $\lambda = 1$ automóvel por minuto. Considerando que a percentagem de Mercedes que circulam nessa estrada é de 5%, calcule:
- A probabilidade de passar pelo menos uma Mercedes no período de uma hora;
 - O número esperado de automóveis que passaram no período de uma hora, sabendo que 10 deles eram Mercedes;
 - A probabilidade de terem passado 5 Mercedes ao fim de uma hora, sabendo que nesse período passaram 50 carros pelo referido ponto da estrada;
- 17) Seja, para $t \geq 0$, $X(t)$ o valor do total dos prêmios pagos por uma companhia de seguros de vida no intervalo $(0, t]$. Os pagamentos de prêmios de seguros de vida são reclamados à companhia segundo um processo de Poisson de taxa 5 pagamentos por semana. Se os prêmios forem independentes e possuírem distribuição exponencial com valor esperado \$ 20.000, determine:
- O valor esperado e a variância do valor total de prêmios pagos pela companhia num período de 4 semanas;
 - $\text{Cov}(X(s), X(t))$, com $0 \leq s \leq t$;