Lista nº 1 – Distribuições Conjuntas Discretas

1. (Montgomery – Exercício 5.3, pág. 98) Mostre que a seguinte função satisfaz as propriedades de uma função de probabilidade conjunta.

x	y	$f_{XY}(x, y)$
–1	–2	1/8
–0,5	–1	1/4
0,5	1	1/2
1	2	1/8

Determine o seguinte:

a. $P\{X < 0{,}5;\ Y < 1{,}5\}$. *R.: 3/8*

b. $P\{X < 0{,}5\}$. *R.: 3/8*

c. $P\{Y < 1{,}5\}$. *R.: 7/8*

d. $P\{X > 0{,}25;\ Y < 4{,}5\}$. *R.: 5/8*

e. $E[X]$, $E[Y]$, $Var[X]$ e $Var[Y]$. *R.: Var(X) = 0,4219; Var(Y)=1,6875*

f. A distribuição de probabilidade marginal da variável aleatória X. *R.: f(-1)=1/8. F(-0,5)=1/4, f(0,5)=1/2, f(1)=1/8.*

g. A distribuição de probabilidade condicional de Y, dado que $X = 1$. *R.: 1.*

h. A distribuição de probabilidade condicional de X, dado que $Y = 1$. *R.: 1.*

i. $E[X \mid Y = 1]$. *R.: 0,5.*

j. X e Y são independentes? *R.: Não.*

2. (Montgomery – Exercício 5.9, pág. 99) Uma classe de estatística para engenheiros tem 40 estudantes, sendo 60% de engenharia elétrica, 10% de engenharia de produção e 30% de engenharia mecânica. Uma amostra de quatro estudantes é selecionada aleatoriamente, sem reposição, para um grupo de projeto. Sejam X e Y o número de engenheiros de produção e mecânicos, respectivamente. Determine o seguinte:

   a. $f_{XY}(x, y)$.

   b. $f_X(x)$.
   R.: $f_X(0)=0{,}2511$; $f_X(1)=0{,}0405$; $f_X(2)=0{,}0063$; $f_X(3)=0{,}0009$; $f_X(4)=0{,}0001$

   c. $E[X]$. *R.: 0,0562.*

d. $f_{Y|3}(y)$.

R.: $f_{Y|3}(0)=2/3$; $f_{Y|3}(1)=1/3$; $f_{Y|3}(2)= f_{Y|3}(3)= f_{Y|3}(4)=0$.

e. $\mathrm{E}[Y \mid X=3]$. *R.: 0,0003.*

f. $\mathrm{Var}[Y \mid X=3]$. *R.: 0,0741.*

g. X e Y são independentes? *R.: Não.*

3. (Montgomery – Exercício 5.11, pág. 99) Baseado no número de vazios, uma placa de óxido de ferro é classificada como alta, média ou baixa. Historicamente, 5% das placas são classificadas como altas, 85% como médias e 10% como baixas. Uma amostra de vinte placas é selecionada para teste. Sejam X, Y e Z a quantidade de placas que são independentemente classificadas como altas, médias e baixas, respectivamente.

a. Quais são os nomes e os valores dos parâmetros da distribuição de probabilidades conjuntas de X, Y e Z?

R.: $p_1=0,05$; $p_2=0,85$; $p_3=0,10$;

b. Qual é a faixa da distribuição de probabilidades conjunta de X, Y e Z?

c. Quais são os nome e os valores dos parâmetros das distribuição de probabilidades marginais de X?

d. $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$. *R.: 1 e 0,95.*

Determine o seguinte:

e. $\mathrm{P}\{X=1;\ Y=17;\ Z=3\}$.

f. $\mathrm{P}\{X\leq 1;\ Y=17;\ Z=3\}$. *R.: 0,07195.*

g. $\mathrm{P}\{X\leq 1\}$. *R.: 0,7358.*

h. $\mathrm{E}[Y]$. *R.: E[Y]=17.*

i. $\mathrm{P}\{X=2;\ Z=3 \mid Y=17\}$. *R.: 0.*

j. $\mathrm{P}\{X=2 \mid Y=17\}$. *R.: 0,2224.*

k. $\mathrm{E}[X \mid Y=17\}$. *R.: 1.*

4. (Montgomery – Exercício 5.13, pág. 99). Quatro fornos elétricos, que foram derrubados durante o transporte, são inspecionados e classificados como contendo grandes, pequenos ou nenhum defeito. No passado, 60% dos fornos derrubados tinham grandes defeitos, 30% tinham médios

defeitos e 10% não tinham defeitos. Considere que os defeitos dos quatro fornos ocorrem independentemente.

a. A distribuição de probabilidade da contagem de fornos em cada categoria é multinomial? Por que sim ou por que não?
b. Qual é a probabilidade de, dos quatro fornos derrubados, dois terem grandes defeitos e dois terem pequenos defeitos?
R.: 0,1944.
c. Qual a probabilidade de o forno não ter defeitos?
R.: 0,0001.

Determine o seguinte:

d. A função de probabilidade conjunta do número de fornos com um defeito grande e o número de fornos com um defeito pequeno.
e. O número esperado de fornos com grandes defeitos.
R.: 2,4.
f. O número esperado de fornos com pequenos defeitos.
R.: 1,2.
g. A probabilidade condicional de dois fornos terem grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 0,7347.
h. A probabilidade condicional de três fornos terem grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 0.
i. A distribuição de probabilidades condicionais do número de fornos com grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: $f_{X|2}(0)=0,0204$; $f_{X|2}(1)=0,2449$; $f_{X|2}(2)=0,7347$.
j. A média condicional do número de fornos com grandes defeitos, dado que dois fornos têm pequenos defeitos.
R.: 1,7143.

5. (Montgomery – Exercício 5.16, pág. 100). Uma companhia de marketing realizou uma análise de risco para um fabricante de fibras sintéticas e concluiu que novos competidores não apresentam risco 13% das vezes (na maioria, por causa da diversidade de fibras fabricadas), risco moderado 72% das vezes (alguma sobreposição de produtos) e risco muito alto (competidores fabricam exatamente os mesmo produtos) 15% das vezes.

Sabe-se que 12 companhias internacionais estão planejando abrir novas fábricas para produzir fibras sintéticas, dentro dos próximos três anos. Considere as companhias como independentes. Sejam X, Y e Z o número de novos competidores que representarão risco nulo, moderado e muito alto para a companhia interessada, respectivamente.

a. Qual é a faixa da distribuição de probabilidade conjunta de X, Y e Z?

b. $\mathrm{P}\{X = 1;\ Y = 3;\ Z = 1\}$.

c. $\mathrm{P}\{Z \leq 2\}$.

d. $\mathrm{P}\{Z = 2 \mid X = 10;\ Y = 1\}$.

e. $\mathrm{P}\{Z \leq 1 \mid X = 10\}$.

f. $\mathrm{P}\{Y \leq 1;\ Z \leq 1 \mid X = 10\}$.

g. $\mathrm{E}[Z \mid X = 10]$.